ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

5 - 11471

Е.П.Жидков, М.Нгуен, И.П.Недялков, Б.Н.Хоромский

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛОУ

Часть II. Большие по модулю решения

1978

5 - 11471

Е.П.Жидков, М.Нгуен, И.П.Недялков, Б.Н.Хоромский

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛОУ

Часть II. Большие по модулю решения

Направлено в ЖВММФ

Жидков Е.П. и др. 5 - 11471

Исследование одного класса решений уравнения Лоу. Часть II. Большие по модулю решения

Рассматриваются вопросы приближенного решения нелинейной краевой задачи для аналитических функций, соответствующей уравнению Лоу. Обосновывается сходимость одной модификации непрерывного аналога метода Ньютона к решениям с неотрицательным суммарным индексом производной Фреше. Попутно получаются условия существования и единственности таких решений. Построен алгоритм для численных расчетов как малых, так и больших по модулю решений. Приведены результаты численных расчетов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Zhidkov E.P. et al. 5 - 11471

Exploration of a Class of the Low Equation Solutions. II. Big Absolute Value Solutions

We consider some questions of approximate solution of nonlinear boundary problem for analytic functions, associated with the Low equation. There is proved the convergency of one modification of continuous analog of the Newton method to the solutions which have Fresche derivative with nonnegative summery index. Some conditions for existence and uniqueness of these solutions are obtained. An algorithm for numerical computations of solutions with small or big absolute values is stated. Some numerical results are listed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

§ I. Решения задачи I-У [I] с отличным от нуля индексом производной Фреше

Условия существования и единственности малых по модулю решений, полученные в §2 [2], описывают лишь весьма узкий класс решений, имеющих нулевой суммарный индекс производной Фреше. Однако исследование простейших точных решений для одномерной [2] и двухмерной задач [2] показывает, что существуют решения как с положительными, так и с отрицательными индексами производной Фреше, причем абсолютная величина индекса $\varkappa$ может быть сколь угодно большой. Таким образом, все решения задачи I-У [I] можно условно разбить на счетное число классов с одинаковым суммарным индексом производной Фреше. Решения из различных классов не могут быть получены одно из другого при помощи непрерывного преобразования, так как индекс комплексной функции не меняется при непрерывной деформации соответствующей кривой, не проходящей через начало координат [3]. Действительно, функции $2F(\varphi)(u_j + i v_j) - i$, определяющие согласно формуле (2.24) [I] индекс производной Фреше, ввиду условия унитарности Ш удовлетворяют свойству

$$|2F(\varphi)(u_j + i v_j) - i| = 1, \quad \varphi \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \quad j = 1, \ldots, N$$

и поэтому не проходят через точку $z = 0$.

Основным содержанием настоящего параграфа является доказательство существования и оценка области единственности для решений с произвольным неотрицательным суммарным индексом производной Фреше (2.7) [I]. Согласно оценке (2.15) эти решения лежат вне области $|F(\varphi) h_j(\varphi)| < 1/4a^*$, $j = 1, \ldots, N$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то есть имеют достаточно большую норму в пространстве L_α^N. Это означает, что они не могут быть получены с помощью теоремы о сжатом отображении. Однако здесь можно воспользоваться либо Предложением I, [I] либо методом Ньютона-Канторовича. Для этого необходимо иметь хорошее начальное приближение V_0.

Мы используем в качестве начальных приближений некоторые из известных точных решений. Поэтому рассмотрим задачу I-У /I/ лишь для матриц A, обладающих свойством

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{I.I}$$

При этом вектор $\mu = (1, \ldots, 1)$ является собственным вектором матрицы A: $A\mu = \mu$. Условие (I.I) не сужает класс физически интересных матриц A /4/. Легко видеть, что если функция $h(z)$ является решением задачи I-У при $N = 1$, $A = 1$, то вектор $H(z) = (h(z), \ldots, h(z))$ с N_0 компонентами будет решением задачи I-У при $N = N_0$. Назовем решение $H(z)$ с одинаковыми компонентами диагональным. Для этого решения $\Lambda = 0$. Согласно /2/ для $h(z)$ справедливо представление

$$\left[h(z)\right]^{-1} = C - 4A\frac{z^2}{(1+z^2)^2} - \frac{8z^2}{(1+z^2)^2}\sum_n \frac{R_n}{w_n^2 - \frac{4z^2}{(1+z^2)^2}} -$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\int_1^\infty \frac{F(\arccos 1/x)\,dx}{x\left(x^2 - \frac{4z^2}{(1+z^2)^2}\right)}. \tag{I.2}$$

Предположим /4/, что функция $\bar{F}(\varphi)$ есть краевое значение функции

$$F(q) = q^{2\ell+1}u^2(q^2), \quad q = \sqrt{w^2-1}, \quad w = \frac{2z}{1+z^2}, \tag{I.3}$$

$0 \le \ell$ — целое число.

Здесь $\sqrt{w^2-1}$ определяется так, что $\sqrt{(w+i0)^2-1} > 0$ при $w > 1$, а $u(q^2)$ – мероморфная функция и $\bar{u}(w^2-1) = u(\bar{w}^2-1)$. Тогда функции (I.2) будут также мероморфными и для вычисления индекса их производной Фреше можно будет применить формулу (I.6).

При условии (I.3) функции $2F(\varphi)(u_j + i v_j) - i$, определяющие индекс производной Фреше на произвольном решении $H(z) = U + iV$, $U = \{u_j\}$, $V = \{v_j\}$, $j = 1, \ldots, N$ (2.24) /I/, будут лишь множителем i отличаться от матричных элементов статической S-матрицы /4/

$$S_j(z) = 1 + 2iF(z)\,h_j(z), \quad j = 1, \ldots, N. \tag{I.4}$$

Таким образом, индекс определяется суммарным приращением аргументов матричных элементов $S_j(\sigma) = \exp[2i\,\delta_j(\sigma)]$, $\sigma = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\varkappa = \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\left[\delta_j(i) - \delta_j(0)\right]. \tag{I.5}$$

Формула (I.5) для суммарного индекса на основании других соображений получена в /5/.

Установим связь между величиной $\varkappa$ для диагонального решения и полюсами функции $h(z)$ в плоскости z. Обозначим через $P_\psi(\Omega)$ число полюсов функции ψ в области Ω. Рассмотрим следующие области: $\Omega_1 = \{z : |z| > 1\}$; $\Omega_2 = \{z : |z| < 1\}$; $\Omega_3 = \{z : |z| > 1, \operatorname{Re} z = 0\}$; $\Omega_4 = \{z : |z| > 1, \operatorname{Re} z > 0\}$; $\Omega_5 = \{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z = 0\}$; $\Omega_6 = \{z : |z| < 1, \operatorname{Re} > 0\}$. Определим целые числа K, P_0, P_1, L_0, L_1 формулами

$K = P_F(\Omega_1) - P_F(\Omega_2)$; $P_0 = P_h(\Omega_3)$; $P_1 = P_h(\Omega_4)$; $L_0 = P_h(\Omega_5)$; $L_1 = P_h(\Omega_6)$.

Имеет место

<u>Лемма 2</u>. Суммарный индекс $\varkappa$ производной Фреше (2.7) /I/ на диагональном решении выражается формулой

$$\varkappa = N\,(P_0 + 2P_1 - L_0 - 2L_1 + K). \tag{I.6}$$

<u>Доказательство</u>. Производная Фреше на диагональном решении $H(z) = (h(z), \ldots, h(z))$ представляет собой оператор краевой задачи Римана-Гильберта с диагональной матрицей и поэтому распадается на N независимых операторов для одной функции $h = u + iv$.

$$P'(h_0)h = v - 2\bar{F}(\varphi)(u_0 u + v_0 v), \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \tag{I.7}$$

Вычислим индекс $\varkappa_1$ для одномерной задачи. Пусть функция $\Psi(z)$ есть аргумент $S(z)$. В формуле (I.5) содержится лишь величина $\Psi(i) - \Psi(-i)$. Поэтому рассмотрим приращение $\Psi(z)$ при обходе замкнутого контура C_I рис.I (аналогичный прием применялся в /6/ для оценки числа бутстрапных решений). По известной теореме комплексного анализа /3/ искомое приращение дается формулой

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{C_1}\Psi(z) = N_i - P_i, \tag{I.8}$$

где N_i – число нулей функции $S(z)$ внутри C_I, а P_i – число ее полюсов в C_I. Вычислим приращение $\Psi(z)$ по той части контура

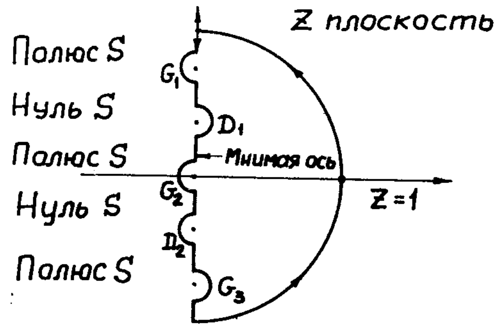

Рис.I. Контур C_I.

C_I, которая расположена на мнимой оси. Так как $S(-z)=S(z)$, то $\Im m\, S(iy)=0$ и поэтому $\psi(z)$ может получить приращение лишь на дугах G_1, G_2, G_3, D_1, D_2. В силу симметрии $\psi(-z)=\psi(z)$, откуда следует $\Delta_{D_1}\psi+\Delta_{D_2}\psi=0$, $\Delta_{G_1}\psi+\Delta_{G_3}\psi=0$. Приращение на контуре G_2 определится полюсом $S(z)$ в нуле. В итоге согласно (I.8) и (I.5) получим

$$\frac{1}{2\pi}(\pi \varkappa_1 - K_0\pi)=\frac{N_0}{2}+N_1-K_1-\frac{M_0}{2}-M_1,$$

где K_0 – порядок полюса $F(z)$ при $z=0$; N_0 и N_1 – числа нулей $S(z)$ на мнимой оси и внутри контура C_I соответственно; M_0 и M_1 – числа полюсов $h(z)$ на мнимой оси и внутри контура C_I соответственно; K_1 – число полюсов $F(z)$ внутри C_I с учетом их кратности. Отсюда получаем формулу

$$\varkappa_1 = N_0+2N_1+K_0-2K_1-M_0-2M_1 . \qquad (I.9)$$

Далее используем известное аналитическое продолжение функции $S(z)$ на внешность круга C_0 [4]:

$$S(z)=\left[S\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{-1}, \quad |z|>1, \quad Re\, z \geqslant 0. \qquad (I.10)$$

Из формулы (I.10) следует, что нули функции $S(z)$ внутри контура C_I соответствуют полюсам функций $F(z)\,h(z)$ вне единичного круга C_0 при $Re\, z \geqslant 0$, поэтому формула (I.9) записывается в виде (I.6). Лемма доказана.

Формулу (I.6) легко обобщить для широкого класса матриц второго порядка. Пусть $N=2$, а матрица А такова, что собственный

вектор $\mu=(\alpha_1, \alpha_2)$, $A\mu=\mu$ удовлетворяет условию $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, а компоненты вектора $\gamma=(\beta_1,\beta_2)$, $A\gamma=-\gamma$ имеют противоположный знак: $\beta_1 \geqslant 0$, $\beta_2 \leq 0$. Предположим, что компоненты решения $S(z)=(S_1(z), S_2(z))$ не имеют нулей на мнимой оси. В силу известных равенств

$$Re\, S(iy)=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} g(y^2), \quad \Im m\, S(iy)=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} y\, g_1(y^2),$$

где g и g_1 – скалярные функции, для аргументов $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ функций S_1 и S_2 получается соотношение

$$tg\,\psi_1(iy)=\frac{\beta_1\, y\, g_1(y^2)}{\alpha_1\, g(y^2)}, \quad tg\,\psi_2(iy)=\frac{\beta_2\, y\, g_1(y^2)}{\alpha_2\, g(y^2)},$$

из которого следует, что ψ_1 и ψ_2 имеют противоположные знаки на мнимой оси. Значит, их суммарное приращение на мнимой оси, исключая дуги G_1, G_2, G_3, равно нулю. Приращение на дугах G_1, G_2, G_3 определяется соответствующими полюсами. В итоге получаем формулу для суммарного индекса

$$\varkappa = 2(P_1+P_2)-L_1-L_2-2(M_1+M_2),$$

где P_i, $i=1,2$, – число полюсов $S_i(z)$ при $|z|>1$, $Re\, z>0$; L_i – число полюсов S_i внутри C_0 на мнимой оси; M_i – число полюсов $S_i(z)$ внутри контура C_I при $Re\, z>0$. Эта формула справедлива, например, для матриц вида

$$A=\begin{pmatrix} a & 1-a\\ 1+a & -a\end{pmatrix}, \quad |a|\leq 1.$$

Итак, производная Фреше на диагональном решении определяется одномерной краевой задачей Гильберта (I.7), для которой можно написать общее решение. Согласно [3], если индекс функции

$$i-2\bar F(\varphi)(u_0(\varphi)+i v_0(\varphi)) = i-2\bar F(\varphi) h_0(\varphi)$$

равен числу $\varkappa_0$ ($\varkappa_0$ кратно 4 в силу соответствующих симметрий), то краевая задача

$$v-2\bar F(\varphi)(u_0 u+v_0 v)=g(\varphi);\ g(\varphi)\in L_\alpha,\ g(-\varphi)=-g(\varphi)$$

имеет следующее решение: $Q(z)=u(z)+i\,v(z)$;

$$Q(z) = z^{\varkappa_0} e^{i\gamma(z)} \Big[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w(\sigma)} g(\sigma) \frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z} \, d\sigma + i\beta_0 + \qquad \text{(I.II)}$$

$$+ i \sum_{K=1}^{\varkappa_0/2} C_{2K} \left(z^{2K} + z^{-2K} \right) \Big] .$$

Здесь β_0, C_{2K} – действительные числа в силу условия П[I], а коэффициенты с нечетными номерами отсутствуют, так как $Q(z) = Q(-z)$. При этом

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[arc\,tg \, \frac{1 - 2\bar F(\varphi) V_0(\varphi)}{-2\bar F(\varphi) U_0(\varphi)} - \varkappa_0 \varphi \right] \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} \, d\varphi , \quad \gamma = w + i w_1 .$$

Функция $e^{i\gamma(z)}$ содержит множителем число i, поэтому коэффициенты при степенях z в (I.II) вещественные. Так как производная Фреше (2.7)[I] определена на функциях $\Upsilon(z)$, таких, что $\Upsilon(0)=0$, то $Q(0)=0$. Тогда $C_{\varkappa_0} = 0$. В итоге получаем, что решение (I.II) зависит от $m = \frac{\varkappa_0}{2}$ произвольных параметров. Согласно формуле (I.6) число полюсов функции $S(z)$ вне единичного круга C_0 на величину $2m$ больше, чем внутри. При этом всякому полюсу в точке z соответствует полюс в симметричной точке $-z$. Таким образом, каждому избыточному полюсу вне круга C_0 соответствует один произвольный параметр в формуле (I.II), то есть положение m полюсов можно считать произвольным. Наряду с указанным произволом можно также задавать $m/2$ полюсов вместе с их вычетами.

Учитывая эти соображения, рассмотрим уравнение $P(V) = 0$ из (2.6)[I] вместе с дополнительными условиями двух типов. В первом случае зафиксируем $\varkappa_0/2$ полюсов функции $h(z)$ при $|z|>1$, $Re\, z \geqslant 0$ в точках $z_1^{-1}, z_2^{-1}, \dots, z_m^{-1}$. Тогда в точках z_j, $j = 1, \dots, m$ функция $S(z)$ будет иметь нули, то есть $1 + 2iF(z_j)\, h(z_j) = 0$, $h(z_j) = -1/2i\, F(z_j) \equiv B_j$.
Систему уравнений

$$P(V) = 0 , \quad h(z_j) = B_j , \quad j = 1, \dots, m$$

рассмотрим как операторное уравнение

$$G(h) = 0 , \quad G : L_\alpha \to L_\alpha \times C^m \equiv L , \qquad \text{(I.I2)}$$
$$\| x \|_L = \| x \|_{L_\alpha} + \| x \|_{C^m} .$$

Здесь C^m – m-мерное пространство комплексных векторов. При таком определении $G(h)$ производная Фреше $G'(V_0)$ уже имеет ограниченный обратный оператор. Действительно, уравнение

$$G'(V_0) h = w(\varphi) ; \quad w(\varphi) = (g(\varphi); C_1) , \quad g \in L_\alpha , \; C_1 \in C^m \qquad \text{(I.I3)}$$

однозначно разрешимо для любой правой части, так как для определения произвольных констант β_0, C_{2K} из (I.II) имеется система линейных уравнений

$$\beta_0 + \sum_{K=1}^{m-1} C_{2K} \left(z_j^{2K} + z_j^{-2K} \right) = \varepsilon_j , \quad j = 1, \dots, m , \qquad \text{(I.I4)}$$

определитель которой есть определитель типа Вандермонда и, как нетрудно показать, отличен от нуля.

Если вместо рассмотренных условий зафиксировать $m/2$ полюсов вместе с их вычетами, то для коэффициентов β_0, C_{2K} получится система уравнений

$$\begin{cases} \beta_0 + \sum_{K=1}^{m-1} C_{2K} \left(z_j^{2K} + z_j^{-2K} \right) = \varepsilon_j' , \quad j = 1, \dots, m/2 , \\ \beta_0 + \sum_{K=1}^{m-1} C_{2K} \left(z_j^{2K} + z_j^{-2K} \right) + 1/2 \sum_{K=1}^{m-1} K C_{2K} \left(z_j^{2K} - z_j^{-2K} \right) = \mu_j , \\ \qquad j = 1, \dots, m/2 , \end{cases} \qquad \text{(I.I5)}$$

определитель которой также не равен нулю. В противном случае у многочлена степени $m-1$ нашлось бы $m/2$ различных корней двойной кратности. Итак, в обоих случаях производная дополненного оператора $G(h)$ является обратимой.

Аналогично формуле (I.I2) для одной функции можно построить дополненный оператор $G_N(H)$, определенный уже на вектор-функциях $H = (h_1, \dots, h_N)$,

$$G_N(H) = \begin{Bmatrix} P(V) \\ H(z_i) - B_i \end{Bmatrix} , \quad G_N : L_\alpha^N \to L_\alpha^N \times C^{(Nm)} . \qquad \text{(I.I6)}$$

Производная Фреше этого оператора на диагональном решении $H_0 = (h, h, \dots, h)$ будет также обратима.

Пусть D – какая-либо из матриц, определяющих уравнения (I.I4), (I.I5). Обозначим норму интеграла Шварца в (I.II) константой β_α. Положим $\| e^{i\gamma(z)} \|_{L_\alpha} = \gamma_\alpha$, а $\varepsilon(\varphi) = \sum_{K=0}^{m-1} |\cos 2K\varphi|$, тогда справедлива оценка

$$\| Q(z) \|_{L_\alpha} \le \gamma_\alpha (\beta_\alpha + \| D^{-1} \| \| \mathcal{E}(\varphi) \|_{L_\alpha}) \, \| w(\varphi) \|_{L_\alpha} \qquad (I.17)$$

для функции $w(\varphi)$ из (I.I3). Это означает, что

$$\| G_N'(H_0)^{-1} \| \le \gamma_\alpha (\beta_\alpha + \| D^{-1} \| \| \mathcal{E}(\varphi) \|) = M . \qquad (I.18)$$

Кроме того, для второй производной G_N'' согласно формуле (2.8)/I/

$$\| G_N''(H) \| = L \le 2 F_\alpha a^3 ,$$

где по-прежнему $F_\alpha = \| F(\varphi) \|_{L_\alpha}$, $a = \| A \|$. В этих условиях удобно сразу воспользоваться теоремой Канторовича о сходимости ньютоновского процесса/7/. В итоге имеет место

Теорема 2. Пусть векторы Λ_0, $\mathcal{D}_0$ таковы, что число $\mathcal{E} = \| G_N(H_0, \Lambda_0, \mathcal{D}_0) \|$, определенное для диагонального решения $H_0 = U_0 + i V_0$, удовлетворяет условию

$$2 \varepsilon M^2 L \le 1 .$$

Тогда для матриц А типа (I.I) задача I-У/I/ при дополнительном условии, фиксирующем положение m полюсов функции $H(z)$ (либо $m/2$ полюсов вместе с их вычетами) вне круга C_0, имеет в шаре $\| V - V_0 \| \le (1 - \sqrt{2 \varepsilon M^2 L})(ML)^{-1}$ единственное решение, суммарный индекс для которого равен m.

В заключение отметим, что суммарный индекс производной Фреше для рассмотренного класса решений не зависит от Λ_0 и совпадает с индексом $\varkappa_0$ на диагональном решении. Численные эксперименты для модельной задачи из/2/ при $N=2$ показывают, что при увеличении модуля Λ_0 некоторые полюса функции $H(z, \Lambda_0)$ движутся к единичной окружности и, таким образом, $|\Lambda_0|$ может возрастать до тех пор, пока у функции $H(z, \Lambda_0)$ не появится полюс на окружности C_0, т.е. до тех пор, пока норма решения $H(z, \Lambda_0)$ не станет бесконечной.

§ 2. О численных расчетах решений задачи I-У /I/

Непрерывный аналог метода Ньютона дает перспективную основу для численных расчетов рассмотренного класса решений. Так, если для расчетов малых по модулю решений можно использовать метод последовательных приближений, то в случае отличного от нуля суммарного индекса оператор уже не будет сжимающим в окрестности решения. Однако конструкция доопределенного оператора $G_N(V)$ позволяет уже применить ньютоновский процесс, так как в этом случае производная Фреше имеет ограниченный обратный оператор. Тем не менее при численных расчетах таких решений возникают дополнительные трудности по сравнению со случаем малых по модулю решений (§2)/I/, где метод Ньютона сходится очень быстро и дает решения с высокой точностью/8/. Эти трудности имеют две причины. Во-первых, судя по численным экспериментам, обязательно существуют полюса функции $H(z)$ вблизи единичного круга (на расстоянии порядка 0,I5–0,2), и поэтому коэффициенты Лорана функции $H(z)$ медленно убывают. Во-вторых, хотя производная Фреше оператора $G_N(H_0)$ и обратима, однако константа M в (I.I8) достаточно велика и оператор $G_N'(H_0)$ является плохо обусловленным (определитель соответствующей матрицы близок к нулю). Это ухудшает точность вычислений и замедляет скорость сходимости.

Приведем некоторые результаты численных экспериментов. Для построения расчетной схемы мы используем некоторые результаты из /9/. Уравнения I-У заменяются бесконечной алгебраической системой для коэффициентов ряда Лорана функции $H(z)$

$$h_\alpha(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^\alpha z^n , \quad \alpha = 1, \dots, N .$$

Согласно/9/ задача I-У эквивалентна следующей бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$a_\nu^\alpha = a_{-\nu}^\alpha + \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\nu,k) \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_\nu^\alpha (a_m ; a_{m+k}) ; \quad \alpha = 1, \dots, N ; \; \nu = 1, 2, \dots, \infty , \qquad (2.1)$$

где $F(\nu,k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \sin \nu\varphi \cos k\varphi \, F(\varphi) \, d\varphi$, а

$$E_\nu^\alpha (a_m ; a_{m+k}) = a_m^\alpha a_{m+k}^\alpha + (-1)^\nu \sum_{\beta=1}^{N} A_{\alpha\beta} a_m^\beta a_{m+k}^\beta .$$

Кроме того, $a_{-1}^\alpha = \lambda^\alpha$; $a_{-\nu}^\alpha = 0$, $\nu \ge 2$. Вектор $\mathcal{D}_0 = (a_0^\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, N$, считается заданным, так что $A\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0$.

Если уравнение I-V, а следовательно, и система (2.I) имеет решение, то согласно результатам работы/7/ будет иметь решение и конечная система уравнений, получающаяся из (2.I), если положить $a_\nu^\alpha = 0$, $\nu > k$, где k – достаточно большое число. Решение конечной системы проводилось методом Ньютона.

Приведем результаты расчетов модельной задачи для двух неизвестных функций с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, точное решение для которой приведено в /2/. Функция F для различных переменных имеет вид

$$F(w) = \frac{\sqrt{w^2-1}}{w^2}\ , \quad w = \frac{2z}{1+z^2}\ ; \quad F(z) = \frac{1}{4i}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right); \quad F(\varphi) = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

и не ограничена в норме L_α по переменной w. В этом случае задача I–У имеет следующее решение:

$$h^\alpha(z)^{-1} = \frac{2z}{\lambda_\alpha(1+z^2-\varepsilon_0^\alpha z)} - \frac{z^2}{2} + \frac{4Az^2}{(1+z^2)^2} + \frac{4z^2}{(1+z^2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n}{w_n\left(w_n - \frac{(-1)^\alpha 2z}{1+z^2-\varepsilon_n^\alpha z}\right)}; \quad (2.2)$$
$$\alpha = 1, 2.$$

Здесь $\lambda_\alpha = (-1)^\alpha\lambda$, $\varepsilon_n^\alpha = (-1)^\alpha\varepsilon_n$, $n = 0, 1, \ldots\infty$. Нетрудно видеть, что среди решений (2.2) можно выбрать такие, которые имеют правильную асимптотику при $z \to \pm i$ $(h(\pm i) = 0)$. Достаточно взять параметр **A** отличным от нуля.

Учитывая формулу (I.6) для суммарного индекса, можно заключить, что единственное решение с нулевым индексом, имеющее один полюс внутри C_0 при $z = 0$, выражается формулой

$$h^\alpha(z)^{-1} = \frac{2z}{\lambda_\alpha(1+z^2-\varepsilon_0^\alpha z)} - \frac{z^2}{2}\ . \quad (2.3)$$

В таблице I представлены коэффициенты a_ν^1 для $\nu = 1, \ldots, 30$, полученные с помощью системы (I.I) методом Ньютона, для следующих значений параметров: $\varepsilon_0^1 = 0$, $\lambda_1 = 1$. Отметим, что искомое решение существует лишь при $\lambda < \lambda_{max} = 2$. Для сравнения приводятся коэффициенты точного решения (2.2).

Далее рассматривалась система (4.I) для дополнительного оператора (3.I6). Было рассчитано решение, имеющее суммарный индекс производной Фреше, равный 8:

$$h^\alpha(z)^{-1} = \frac{2z}{\lambda_\alpha(1+z^2-\varepsilon_0^\alpha z)} - \frac{z^2}{2} - \frac{4z^2R}{(1+z^2)^2w^2 - 4z^2}\ . \quad (2.4)$$

Это решение получается "возмущением" диагонального:

$$h^{-1}(z) = C - \frac{z^2}{2} - \frac{4Rz^2}{(1+z^2)w^2 - 4z^2} \quad (2.5)$$

при следующем соотношении параметров: $\varepsilon_0^\alpha = -\frac{2}{C\lambda_\alpha}$. Если $\lambda_1 = 0{,}01$; $\varepsilon_0^\alpha = -173{,}9$; $R = -2$; $w^2 = 9$, то решение (2.4) имеет полюс при $z = 1{,}137$ с вычетом -.9856. При использовании начального приближения (2.5) и ограничении рассмотрением коэффициентов a_ν^α при $\nu \leq 70$ решалась конечномерная система (2.I). При этом использовался непрерывный аналог метода Ньютона (2.9) /I/, а также метод наискорейшего спуска

$$\frac{dV(\varphi,t)}{dt} = -\left[G_N'(V)\right]^* G_N(V)\ ; \quad V(\varphi,0) = V_0\ , \quad 0 \leq t < \infty, \quad (2.6)$$

отличающийся простотой реализации. В таблице 2 представлены расчетные значения коэффициентов a_ν^1 для $\nu \leq 70$. Видно, что точность вычисления коэффициентов с большими номерами падает, что является следствием слабой аппроксимации задачи I–У конечномерной системой. Точность аппроксимации здесь порядка $a_{70}^\alpha \approx \left(\frac{1}{1{,}14}\right)^{70}$ и увеличивается с ростом размерности алгебраической системы. Расчеты проводились на ЭВМ СДС-6500.

В заключение авторы выражают благодарность В.А.Мещерякову и В.И.Журавлеву за полезные обсуждения.

Таблица I

$\lambda = 1$. $\quad \varepsilon_0 = 0 \quad K = 30$

ν	a_ν^1 для (4.2)	ν	a_ν^1 для (4.I)	ν	a_ν^1 для (4.2)	ν	a_ν^1 для (4.I)
I	.I2500 E+00	I	.I2497 E+00	I6	.36058 E-02	I6	.36050 E-02
2	.53I25 E+00	2	.53I23 E+00	I7	.26247 E-02	I7	.26240 E-02
3	.2578I E+00	3	.2578I E+00	I8	.I98I9 E-02	I8	.I98I4 E-02
4	.95703 E-0I	4	.95685 E-0I	I9	.I3969 E-02	I9	.I3965 E-02
5	.I5674 E+00	5	.I5673 E+00	20	.I0054 E-02	20	.I005I E-02
6	.I0364 E+00	6	.I0363 E+00	2I	.74682 E-03	2I	.74660 E-03
7	.49835 E-0I	7	.49827 E-0I	22	.53594 E-03	22	.53577 E-03
8	.5I643 E-0I	8	.5I636 E-0I	23	.38534 E-03	23	.3852I E-03
9	.38820 E-0I	9	.388I6 E-0I	24	.28304 E-03	24	.28294 E-03
I0	.22I64 E-0I	I0	.22I60 E-0I	25	.20474 E-03	25	.20467 E-03
II	.I8452 E-0I	II	.I8448 E-0I	26	.I4752 E-03	26	.I4747 E-03
I2	.I43I8 E-0I	I2	.I43I6 E-0I	27	.I0764 E-03	27	.I0760 E-03
I3	.92050 E-02	I3	.9II86 E-02	28	.78096 E-04	28	.78065 E-04
I4	.6893I E-02	I4	.689I5 E-02	29	.56404 E-04	29	.5638I E-04
I5	.53028 E-02	I5	.530I7 E-02	30	.4I0II E-04	30	.40994 E-04

Таблица 2

Коэффициенты a^1_ν с **четными** номерами
при $\lambda = 0{,}001$; $\varepsilon^1_0 = -173{,}9$; $R = -2{,}0$; $W = 9{,}0$; $K = 70$

ν	a^1_ν для (4.4)	ν	a^1_ν для (4.I)	ν	a^1_ν для (4.4)	ν	a^1_ν для (4.I)
0	.86957E+00	0	.8697IE+00	36	.93944E-02	36	.968I5E-02
2	.I7223E+0I	2	.I724IE+0I	38	.I3340E-0I	38	.I3568E-0I
44	.I3203E+0I	4	.I3229E+0I	40	.59992E-02	40	.6I832E-02
6	.38I89E+00	6	.38482E+00	42	.23I72E-02	42	.24654E-02
8	.48384E+00	8	.48678E+00	44	.48432E-02	44	.49604E-02
I0	.656I3E+00	I0	.65890E+00	46	.39I73E-02	46	.40I02E-02
I2	.28837E+00	I2	.2909IE+00	48	.II052E-02	48	.II797E-02
I4	.I2059E+00	I4	.I2285E+00	50	.I3077E-02	50	.I3668E-02
I6	.24320E+00	I6	.245I5E+00	52	.I90I4E-02	52	.I9477E-02
I8	.I8974E+00	I8	.I9I40E+00	54	.86557E-03	54	.90236E-03
20	.54373E-0I	20	.55792E-0I	56	.32IIIE-03	56	.35036E-03
22	.67442E-0I	22	.68628E-0I	58	.68303E-03	58	.7059IE-03
24	.93567E-0I	24	.94542E-0I	60	.56277E-03	60	.5807IE-03
26	.4I588E-0I	26	.42397E-0I	62	.I5778E-03	62	.I7203E-03
28	.I67I8E-0I	28	.I7385E-0I	64	.I8I89E-03	64	.I9307E-03
30	.34327E-0I	30	.34867E-0I	66	.27094E-03	66	.27960E-03
32	.27264E-0I	32	.2770IE-0I	68	.I249IE-03	68	.I3236E-03
34	.77485E-02	34	.8I050E-02				

Литература

I. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, Р5-II470, Дубна, I978.

2. Денчев Р. ЖВМ и МФ, I963, т.3, № 4, с.77I;
Castillejo L., Dalitz R.H., Dyson F.J. Rhys.Rev., 1955, 101, 1, p.453.

3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. "Наука", М., I977.

4. Журавлев В.И., Мещеряков В.А. ЭЧАЯ, I974, т.5, в.I, с.I72.

5. Lovelace C. Commun. Math. Rhys., 1967, 4, p. 261.

6. Huang K., Mueller A.H. Rhys. Rev., 1965, 140B, p.365 .

7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. "Наука", М., I977.

8. Жидков Е.П., Недялков И.П., Хоромский Б.Н. Труды Международного совещания по программированию и математическим методам решения физических задач. ОИЯИ, ДI0-II264, Дубна, I978.

9. Nedelkov I.P. JINR, E - 1294, Дубна, I963 ; Rhys. Rev., 1972, D6, p.2842.

Рукопись поступила в издательский отдел
I2 апреля I978 года.