ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

5 - 11470

Е.П.Жидков, М.Нгуен, И.П.Недялков, Б.Н.Хоромский

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛОУ

Часть 1. Малые по модулю решения

1978

5 - 11470

Е.П.Жидков, М.Нгуен, И.П.Недялков, Б.Н.Хоромский

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛОУ

Часть 1. Малые по модулю решения

Направлено в ЖВММФ

Жидков Е.П. и др.

5 - 11470

Исследование одного класса решений уравнения Лоу. Часть I. Малые по модулю решения

Рассматриваются вопросы приближенного решения нелинейной краевой задачи для аналитических функций, соответствующей уравнению Лоу. Обосновывается сходимость к малым по модулю решениям непрерывного аналога метода Ньютона, откуда получаются также условия существования и единственности решений. Получена формула для суммарного индекса производной Фреше.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Zhidkov E.P. et al.

5 - 11470

Exploration of a Class of the Low Equation Solutions. I. Small Absolute Value Solutions

We consider some questions of approximate solution of nonlinear boundary problem for analytic functions, associated with the Low equation. There is proved the convergency of continuos analog of the Newton method to the solutions with small absolute value. Also there are obtained conditions for existence and uniqueness of these solutions. The formula for the summary index of the Fresche derivative is obtained as well.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

§ I. Введение

В течение последних двадцати лет уравнение Лоу является объектом всестороннего изучения. Столь постоянное внимание - не частое явление в теории элементарных частиц, в которой интерес к тому или иному подходу, как правило, меняется достаточно быстро. Дело в том, что уравнение Лоу, как модель некоторых процессов сильного взаимодействия, имеет примечательные свойства. Так, с одной стороны, оно дает возможность решать задачу о соударении в условиях сильного взаимодействия, что удается обычно при сильно упрощенных точно решаемых моделях, которые мало говорят о реальных процессах. С другой стороны, эти уравнения учитывают то, что считается твердо установленным в теории элементарных частиц: аналитичность, унитарность и кроссинг-симметрию. И кроме того, математическая постановка задачи нетривиальна. Она сводится к системе нелинейных сингулярных интегральных уравнений /1,2,3/, которой соответствует нелинейная краевая задача для аналитических функций /3/ или бесконечная система нелинейных алгебраических уравнений /4,5/. Эта система имеет решения, которые при специальных условиях являются единственными. Однако доказательство существования и единственности удалось найти лишь для класса решений с малыми амплитудами и малыми константами связи /6,7/. Исключение составляет работа В.А.Мещерякова и В.П.Гердта /8/, в которой представлено доказательство существования для "больших" решений. Доказательство относится к одному эквивалентному разностному уравнению и использует понятия неподвижной точки и инвариантного многообразия Пуанкаре.

В настоящей работе мы приведем доказательство как существования, так и единственности для некоторого класса "малых" и "больших" решений уравнения Лоу, а также построим итерационную последовательность для численных расчетов рассматриваемого класса решений. Используемые при этом стандартные методы функционального анализа дают нам надежду в дальнейшем рассмотреть более общие уравнения.

Отметим, что найденная нами область единственности для "малых" решений существенно шире области единственности, полученной в[6,7] для N/D формулировки, и совпадает по порядку величины с областью существования из [6,7].

В § 2 с помощью непрерывного аналога метода Ньютона доказывается существование и единственность малых по модулю решений. В § 3 строится семейство больших по модулю решений, имеющих отличный от нуля суммарный индекс производной Фреше.

В § 4 рассматривается численный метод для отыскания как "больших", так и "малых" решений.

§ 2. Краевая задача с нулевым индексом производной Фреше

Обсуждаемые в настоящей работе вопросы тесно связаны с уравнением Лоу[3], которое определяет аналитические внутри единичной окружности C_0 функции $h_\alpha(z)$, $\alpha = 1, \dots, N$, со следующими свойствами:

I) $h_\alpha(z)$ – аналитические функции внутри C_0, имеющие непрерывные на C_0 граничные значения.

II) $\bar{h}_\alpha(z) = h_\alpha(\bar{z})$ – условие действительности (черта означает операцию сопряжения).

III) $\operatorname{Im} h_\alpha(z) = F(\varphi)\,|h_\alpha(z)|^2$; $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, – условие унитарности. Здесь функция $F(\varphi)$ удовлетворяет условию Гельдера при $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и $F(0) = F(\frac{\pi}{2}) = 0$.

IУ) $h_\alpha(-z) = \sum\limits_{\beta=1}^{N} A_{\alpha\beta} h_\beta(z)$, где заданная действительная матрица $A = [A_{\alpha\beta}]$ удовлетворяет условию $A^2 = E$, E – единичная матрица – условие перекрестной симметрии.

У) $h_\alpha(z)$ имеет полюс первого порядка при $z = 0$ с заданным вычетом $\operatorname{Res} h_\alpha(0) = \lambda_\alpha$; $\lambda_\alpha = -\sum\limits_{\beta=1}^{N} A_{\alpha\beta}\lambda_\beta$.

Условия I–У представляют нелинейную краевую задачу типа Римана-Гильберта (соответсвующая линейная задача рассматривается, например, в [10,11]) для мероморфного вектора $H(z) = (h_1(z), \dots, h_N(z)) = U + iV$:

$$V(\sigma) - \bar{F}(\varphi)\, G(U(\sigma), V(\sigma)) = 0; \quad \sigma = e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \tag{2.I}$$

где

$$\bar{F}(\varphi) = \begin{cases} F(\varphi), & \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -F(\varphi), & \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ F(\varphi - \pi), & \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases},$$

а вектор $G(U,V)$ имеет вид:

$$G(U,V) = \begin{cases} U^2 + V^2, & \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ A([AU]^2 + [AV]^2), & \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]. \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь вектор $X^2 = (x_1^2, \dots, x_N^2)$ составлен из квадратов координат вектора $X = (x_1, \dots, x_N)$.

Отметим, что условие II дает возможность продолжить функцию $F(\varphi)$ нечетным образом и, таким образом, содержится в уравнении (2.I).

Будем рассматривать эту задачу как нелинейное операторное уравнение в некотором нормированном пространстве и искать такие решения $H(z)$, краевые значения которых на C_0 удовлетворяют условию Гельдера.

Определим нормированное пространство L_α непрерывных на C_0 действительных функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $0 < \alpha < 1$ и нормой

$$\|f\|_{L_\alpha} = \sup_{\sigma \in C_0} |f(\sigma)| + \sup_{\sigma_1, \sigma_2 \in C_0} \frac{|f(\sigma_1) - f(\sigma_2)|}{|\sigma_1 - \sigma_2|^\alpha} < \infty. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.I) является также краевой задачей для искомого аналитического вектора $\Phi(z) = H(z) - \Lambda / z$, где $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, но для удобства мы будем записывать его лишь для компонент вектора $H(z)$. Если $\Phi(z) = D(z) + i M(z)$, то формула Шварца[12] дает

$$\Phi(z) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(\varphi) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}\, d\varphi + D_0, \quad (D_0 = \Phi(0,0)), \tag{2.4}$$

где $M(\sigma)$ – краевое значение на C_o функции $M(z)$. Формула обращения Гильберта /I2/ дает выражение действительной части $D(z)$ через мнимую на контуре C_o:

$$D(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M(\varphi)\, ctg\,\frac{\varphi-s}{2}\, d\varphi + D_o \quad . \qquad (2.5)$$

Из этих формул следует, что краевую задачу (2.I) для функции $\Phi(z)$ можно рассматривать как операторное уравнение в пространстве $L_\alpha^N = \underbrace{L_\alpha \times \ldots \times L_\alpha}_{N}$, $\|X\|_{L_\alpha^N} = \max_{j\le N} \|X_j\|_{L_\alpha}$, относительно одной неизвестной функции $M(\varphi)=V(\varphi)+\Lambda \sin\varphi$:

$$P(V) \equiv V-\bar F(\varphi)\, G(U,V)=0 \;, \quad \varphi\in[-\pi,\pi] \;, \qquad (2.6)$$

где

$$U(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\varphi)\, ctg\,\frac{\varphi-s}{2}\, d\varphi + D_o \equiv KV + D_o \quad .$$

Так как сингулярный интегральный оператор K с ядром Гильберта ограничен в L_α^N /I2/, а $\bar F(\varphi)\in L_\alpha$, то оператор $P: L_\alpha^N \to L_\alpha^N$ и является ограниченным и непрерывным в L_α^N. Из формул (2.4), (2.5) видно, что вектор D_o можно задавать произвольно, с одним условием: $A D_o = D_o$. Таким образом, в постановке краевой задачи I-У обнаруживается неоднозначность в определении вектора $D_o=\Phi(o,o)$, поскольку условия I-У не накладывают на него никаких ограничений. Поэтому величину D_o в уравнении (2.6) будем считать фиксированной, так же как и Λ.

Нетрудно видеть, что оператор $P(V)$ (2.6) дважды дифференцируем по Фреше (определение производной Фреше можно найти в /I3/). Первая производная есть ограниченный линейный оператор, представляющий собой оператор линейной задачи Римана-Гильберта для аналитического вектора $\Psi(z)=U(z)+iV(z)$, такого, что $U(o,o)=0$:

$$P'(V_o)V = V(\varphi)-2\bar F(\varphi)\big(\Omega(U_o)U(\varphi)+\Omega(V_o)V(\varphi)\big),\ \varphi\in[0,2\pi]. \qquad (2.7)$$

Матрица $\Omega(x)$ определяется по вектору $X(\varphi)$ следующим образом:

$$\Omega(x)=\begin{pmatrix} x_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & x_N\end{pmatrix},\ \ \Omega_{ij}=0,\ i\ne j\ ;\quad \varphi\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]\,. \qquad (2.7')$$

$$\Omega(x)=AT(x)A,\ \ T_{ij}=0,\ \ i\ne j;\ \ T_{ii}=\sum_{j=1}^{N} A_{ij}x_j\ ;\ \ \varphi\in[\tfrac{\pi}{2},\tfrac{3\pi}{2}]\ .$$

Вторая производная представляет билинейную форму:

$$P''(V_o)(V_1,V_2)=-2\bar F(\varphi)A\left\{T(U_1)AU_2 + T(V_1)A(V_2)\right\}\ , \qquad (2.8)$$

и является постоянным оператором, не зависящим от V_o. Это есть следствие квадратичной нелинейности исходной задачи.

В рассмотренной постановке мы исследуем вопросы существования и единственности решений операторного уравнения (2.6) в некоторых областях пространства L_α^N и построим численный алгоритм для нахождения этих решений. При этом здесь и далее под L_α^N будем подразумевать лишь подпространство нечетных на $[-\pi,\pi]$ функций с нормой (2.3). Это обеспечит выполнение условия действительности (П).

Для вывода условий существования решений используем эволюционный процесс, называемый непрерывным аналогом метода Ньютона, который сводит решение абстрактного операторного уравнения $P(V)=0$ к интегрированию следующей задачи Коши:

$$\frac{dV(\varphi,t)}{dt}=-P'(V)^{-1}P(V)\ \ ,\ V(\varphi,o)=V_o(\varphi)\,,\ 0\le t<\infty\,, \qquad (2.9)$$

где $V(\varphi,t)$ – функция параметра t со значениями в L_α^N, а $P'(V)^{-1}$ – оператор, обратный к $P'(V)$; $V_o(\varphi)$ – начальное приближение. При этом решение V_* уравнения (2.6), если оно существует, получается как предел при $t\to\infty$ решения $V(\varphi,t)$:

$$\lim_{t\to\infty}\|V(\varphi,t)-V_*(\varphi)\|_{L_\alpha^N}=0. \qquad (2.10)$$

Таким образом, условия существования предела в (2.I0) являются одновременно и условиями существования решения (2.6). Воспользуемся условием сходимости процесса (2.9), полученным в /I4/.

Предложение I

Пусть начальное приближение V_o таково, что в окрестности $\|V-V_o\|\le\tau$ выполнено $\|P'(V)^{-1}\|\le B$, а $P''(V)$ ограничена. Если при этом $\|P(V_o)\|\cdot B\le\tau$, то в этой окрестности точки V_o существует решение V_* уравнения (I.6) и процесс сходится к нему со скоростью

$$\|V(\varphi,t)-V_*(\varphi)\|_{L_\alpha^N}\le B\,\|P(V_o)\|\, e^{-t}\ .$$

Это утверждение не дает оценки области единственности решения, поэтому мы получим ее при помощи некоторых специальных рассмотрений.

Отметим, что в окрестности точки $V_0 = 0$ исследование вопросов существования и единственности решений уравнения Лоу, рассматриваемого в интегральной форме, проводилось в /7,8/ с помощью теоремы Шаудера и принципа сжатых отображений. Доказано существование и единственность малых по модулю решений для N/D уравнений. В /I5,I6/ существование "малых" решений устанавливается при помощи метода Ньютона-Канторовича /I3/. Использование процесса (2.9) оправдывается тем, что область начальных приближений V_0, для которых непрерывный аналог метода Ньютона сходится к точному решению V_*, вообще говоря, шире, чем для дискретного метода Ньютона-Канторовича.

Введем следующие обозначения: $\| \bar{F}(\varphi) \|_{L_\alpha} = F_\alpha$,
$a = \|A\| = \max\limits_{i \le N} \left(\sum\limits_{j=1}^{N} |A_{ij}| \right)$. Пусть a^* есть максимальное собственное значение матрицы AA^*. Если $A = A^*$, как рассматривается в /7,8/, то $a^* = 1$. Обозначим норму сингулярного оператора

$$Ku = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s)\, ctg \frac{x-s}{2}\, ds, \quad u \in L_\alpha, \quad K: L_\alpha \to L_\alpha, \tag{2.II}$$

через K_α, $\| K \| = K_\alpha$. Согласно оценке из /I7/ для нормы сингулярного интеграла типа Коши

$$Q f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(z')}{z' - z_0}\, dz'; \quad z_0, z' \in C_0, \tag{2.I2}$$

и известному тождеству

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x)\, ctg \frac{x-s}{2}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{C_0} \frac{u(t)}{\tau - t}\, dt - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t)\, dt, \quad \tau = e^{ix},$$

можно получить оценку

$$K_\alpha \le 2 \left(2 + \frac{2^{1+\alpha}}{\pi \alpha} + \frac{2}{\pi(1-\alpha)} + \frac{(2\pi)^{\alpha-1}}{\alpha} \right).$$

Определим на окружности C_0 вектор-функцию $R(\varphi, \Lambda, D_0)$:

$$R(\varphi,\Lambda,D_0) \equiv P\left(\frac{\Lambda}{z} + D_0\right) = \begin{cases} -\Lambda \sin\varphi - \bar{F}(\varphi)[\Lambda^2 + D_0^2 + 2\Lambda D_0 \cos\varphi], & \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ -\Lambda \sin\varphi - \bar{F}(\varphi)[A(\Lambda^2 + D_0^2) + 2\Lambda D_0 \cos\varphi], & \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]. \end{cases}$$

Справедлива следующая теорема.

<u>Теорема I.</u> Пусть векторы $\Lambda_0, D_0 \in R^N$ таковы, что $A\Lambda_0 = -\Lambda_0$, $AD_0 = D_0$ и выполнено соотношение

$$\| R(\varphi, \Lambda_0, D_0) \|_{L_\alpha^N} \le \left[8 F_\alpha a^3 (1 + K_\alpha^2) \right]^{-1}. \tag{2.I3}$$

Тогда существует решение $\Phi(z) = H(z) - \frac{\Lambda}{z}$ задачи I-У при $\Lambda = \Lambda_0$ и $\Phi(0,0) = D_0$, такое, что $\| \Im m\, \Phi \|_{L_\alpha^N} \le [4F_\alpha a^3 (1 + K_\alpha^2)]^{-1}$. Это решение можно получить с помощью процесса (2.9) с начальным приближением $V_0(\varphi) = 0$.

При $\Lambda = 0$, $D_0 = 0$ в области

$$\Omega = \left\{ V(\varphi) \in L_\alpha^N : \max_{\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}],\, i = 1, \dots, N} | F(\varphi) V_i(\varphi) | < 1/2\, a^* \right\} \tag{2.I4}$$

нет других решений, кроме $H(z) = 0$.

Решение для $\Lambda \ne 0$ единственно в области

$$\Omega_1 = \left\{ V(\varphi) \in L_\alpha^N : \max_{\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}],\, i = 1, \dots, N} | F(\varphi) V_i(\varphi) | < 1/4\, a^* \right\}, \quad V = \Im m H. \tag{2.I5}$$

<u>Доказательство.</u> Обоснование условий существования сводится к проверке требований Предложения I. Выберем начальное приближение $V_0 = 0$ и положим $\tau = 4F_\alpha a^3 (1 + K_\alpha^2)$. Оценим в окрестности $\| V - V_0 \| \le \tau$ норму оператора $P'(v)^{-1}$. Рассмотрим для произвольной функции $g(s) \in L_\alpha^N$ и некоторой $V_1(s)$, $\| V_1 \| \le \tau$ равенство

$$P'(V_1) V = V - 2\bar{F}(s) \left(\Omega(U_1) K V + \Omega(V_1) V \right) = g(s)$$

или

$$[E - 2\bar{F}(s) \Omega(V_1)] V - 2\bar{F}(s) \Omega(U_1) K V = g(s),$$

$$V - [E - 2\bar{F}(s) \Omega(V_1)]^{-1} 2\bar{F}(s) \Omega(U_1) K V = [E - 2\bar{F} \Omega(V_1)]^{-1} g(s).$$

Оценим норму оператора $[E - 2\bar{F}(s) \Omega(V_1)]^{-1} 2\bar{F}(s) \Omega(U_1) K$.
Предположим, что $a > 1$, тогда

$$\| (E - 2\bar{F} \Omega(V_1)) y(s) \| \ge (1 - 2F_\alpha a^3 \| V_1 \|) \| y \|_{L_\alpha^N},$$

$$\| 2\bar{F} \Omega(U_1) \| \le 2 F_\alpha a^3 K_\alpha \| V_1 \|_{L_\alpha^N}.$$

Отсюда, учитывая, что $\|V_1\| \le r$, получаем

$$\| [E - 2\bar{F}\Omega(V_1)]^{-1} 2\bar{F}\Omega(U_1)K \| \le \frac{2F_\alpha K_\alpha^2 a^3 \|V_1\|}{1 - 2F_\alpha a^3 \|V_1\|} = q,$$

$$\| P'(V_1)^{-1} \| \le \frac{\| [E - 2\bar{F}\Omega(V_1)]^{-1} \|}{1 - q} \le \left(1 - 2F_\alpha a^3 (1 + K_\alpha^2) \|V_1\|\right)^{-1}. \quad (2.16)$$

Далее, поскольку при $V_0 = 0$ $P(V_0) = R(\varphi, \Lambda_0, D_0)$, то в силу (2.13), (2.16) при $\|V_1\| \le r$ имеет место оценка

$$\| P(V_0) \| \ \| P'(V_1)^{-1} \| \le \| V_1 \| \le r,$$

откуда и следует часть теоремы, относящаяся к условиям существования.

Оценим далее область единственности решений. Пусть при некоторых Λ_0, D_0 существует решение $H_0(z) = U_0 + iV_0$ задачи I-У. Тогда $P(V_0) = 0$. Это означает, что линейная краевая задача Римана-Гильберта

$$V - \bar{F}(\varphi)\left(\Omega(U_0)U + \Omega(V_0)V\right) = 0 \quad (2.17)$$

имеет нетривиальное решение: $U = U_0$, $V = V_0$. Пусть $\Lambda_0 = D_0 = 0$, то есть $H(z) = U + iV$ – аналитическая функция, исчезающая при $z = 0$. Тогда задача (2.17) будет однородным линейным уравнением относительно V:

$$V = \bar{F}(\varphi)\left(AT(U_0)AKV + AT(V_0)AV\right) \equiv \Psi(V). \quad (2.18)$$

Это уравнение, в отличие от предыдущего, рассмотрим в пространстве $L_2^N(C_0)$ – функций, суммируемых с квадратом на C_0 с нормой

$$\|\Phi\|_{L_2^N(C_0)} = \left\{ \int_{C_0} \left(\sum_{i=1}^N |\Phi_i(t)|^2 \right) dt \right\}^{1/2}, \quad \Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N).$$

Выбор такого пространства оправдан тем, что $\|K\|_{L_2^N(C_0)} = 1$ /17/. Поэтому в силу (2.14) получаем

$$\|\Psi\|_{L_2^N} \le 2 \|A\|_{L_2^N}^2 (2a^*)^{-1} < 1,$$

откуда следует, что уравнение (2.18) имеет только нулевое решение в пространстве $L_2^N(C_0) \supset L_\alpha^N$, то есть $H(z) = 0$ – единственное в области (2.14) решение при $\Lambda_0 = D_0 = 0$.

Если $\Lambda_0 \ne 0$ и существуют два решения, $U_1 + iV_1$, $U_2 + iV_2$, с одинаковыми Λ_0 и D_0, то, записав для каждого из них равенство (2.17) и вычитая одно из другого, получим линейную краевую задачу для разности $\Delta H = \Delta U + i\Delta V$ (которая является аналитической, исчезающей в нуле функцией, $\Delta H(0,0) = 0$):

$$\Delta V - \bar{F}(\varphi)\left(\Omega(U_1 + U_2)\Delta U + \Omega(V_1 + V_2)\Delta V\right) = 0. \quad (2.19)$$

Аналогично предыдущему из условия (2.15) следует, что уравнение (2.19) имеет только нулевое решение в пространстве $L_2^N(C_0)$. Теорема доказана.

Отметим, что для всякого решения I-У выполнено неравенство $\max\limits_{\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}],\, i=1,\dots,N} |F(\varphi) v_i(\varphi)| \le 1$, которое показывает, что области единственности (2.14), (2.15) являются существенно нелокальными.

В заключение этого параграфа покажем, что суммарный индекс производной Фреше (2.7) для рассмотренного класса решений V_0 с малой нормой равен нулю. Напомним, что суммарный индекс $\varkappa$ линейной краевой задачи Римана-Гильберта для аналитического вектора $H = U + iV$

$$B(\varphi)U(\varphi) - C(\varphi)V(\varphi) = D(\varphi), \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad (2.20)$$

определяется согласно /10/, как деленное на 2π приращение аргумента функции $\det\{(B - iC)(B + iC)^{-1}\}$ при обходе контура C_0 против часовой стрелки:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \Delta_0^{2\pi} \arg \det\{(B - iC)(B + iC)^{-1}\} = \frac{1}{\pi} \Delta_0^{2\pi} \arg \det(B - iC). \quad (2.21)$$

От величины $\varkappa$ зависит, будет ли краевая задача (2.20) безусловно и однозначно разрешима для всякой правой части $D(\varphi)$. В частности, для оператора $P'(V_0)$ из (2.7) можно получить

$$B - iC = iE - 2\bar{F}(\varphi)\Omega(U_0 + iV_0); \qquad E \text{ – единичная матрица.}$$

Теперь из формулы (2.24) для суммарного индекса легко вывести, что для всех решений $H_0(z) = U^0 + iV^0$ задачи I-У, удовлетворяющих условию

$$\max_{\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}],\, i=1,\dots,N} |F(\varphi) v_i^0(\varphi)| < 1/2, \quad (2.22)$$

суммарный индекс производной Фреше равен нулю. Для этого рассмотрим, например, функцию $2F(\varphi)u_1^\circ + i(2F(\varphi)v_1^\circ - 1) \equiv b(\varphi)$. Так как $b(0) = -i$, а из условия Ш следует, что $|b(\varphi)| = 1$, то ввиду (2.22) кривая $b(\varphi)$ не пройдет через точку $z = i$, а, значит, аргумент $b(\varphi)$ не получит приращения при обходе контура C_0.

Имеет место следующая лемма.

Лемма1. Суммарный индекс $\varkappa$ линейной краевой задачи Римана-Гильберта

$$V - 2\bar F(\varphi)(\Omega(U_0)U + \Omega(V_0)V) = 0; \qquad U_0, V_0 \in L_\alpha^N, \tag{2.23}$$

вычисляется по формуле

$$\varkappa = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N} \Delta_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \arg[2\bar F(\varphi)(u_j^\circ + i v_j^\circ) - i] = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{N} \Delta_0^{\frac{\pi}{2}} \arg[2F(\varphi)(u_j^\circ + i v_j^\circ) - i], \tag{2.24}$$

где $U_0 = (u_1^\circ, \dots, u_N^\circ)$, $V_0 = (v_1^\circ, \dots, v_N^\circ)$ удовлетворяют условию IУ.

Доказательство. В силу определения (2.2I) имеем

$$\varkappa = \frac{1}{\pi}\Delta_0^{2\pi} \arg\det\{-iE + 2\bar F(\varphi)(\Omega(U_0) + i\Omega(V_0))\}.$$

Согласно формулам (2.7') на правой полуокружности имеем:

$$\Delta_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \arg\det(B - iC) = \sum_{j=1}^{N} \Delta_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \arg[2\bar F(\varphi)(u_j^\circ + i v_j^\circ) - i]. \tag{2.25}$$

Используя свойство $A^2 = E$, приращение аргумента на $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ можно вычислить по формуле

$$\Delta_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \arg\det(B - iC) = \Delta_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \arg\det A\{2\bar F(\varphi)(T(U_0) + iT(V_0)) - iE\}A =$$

$$= \Delta_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \arg\det\{2\bar F(\varphi)T(U_0 + iV_0) - iE\} = \Delta_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \arg\prod_{j=1}^{N}\{2\bar F(\varphi)\sum_{k=1}^{N} A_{jk}(u_k^\circ + i v_k^\circ) - i\}.$$

Последнее выражение в силу условия Ш перекрестной симметрии принимает вид

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \arg(2\bar F(\varphi)(u_j^\circ + i v_j^\circ) - i). \tag{2.26}$$

Складывая (2.25) и (2.26) и учитывая симметрию относительно действительной оси, приходим к формулам (2.24). Лемма доказана.

Формула (2.24) показывает, что суммарный индекс $\varkappa$ зависит лишь от поведения решения $U_0 + iV_0$ на правой полуокружности. Это согласуется с тем фактом, что в подходе, связанном с интегральными уравнениями, вклад от левого разреза является вполне непрерывным оператором и не влияет на индекс[18].

В заключение отметим, что условие из (2.I5) является неявным ограничением на величину Λ, так как оно содержит, кроме Λ, все остальные коэффициенты ряда Лорана функции $H(z) = \Lambda/z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Если использовать грубую оценку $|v_i(\varphi)| < (4a^* \max_{\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]}|F(\varphi)|)^{-1}$, соответствующую (2.I5), то для случая трехрядной матрицы A, рассмотренного в[8] в N/D формулировке, можно получить оценку $|\lambda_i| \lessapprox 0.05$, совпадающую по порядку с полученной в той же работе оценкой области существования. Таким образом, условия (2.I4), (2.I5) естественным образом дополняют результаты из[18].

Литература

I. Chew G., Mandelstam S. Rhys. Rev., 1960, 119, p. 467.
2. Saltzman G., Saltzman F., Rhys., Rev., 1957, 108, p. 1619.
3. В.И.Журавлев, В.А.Мещеряков. ЭЧАЯ, I974, т.5, в.I, с.I72.
4. П.Х.Бырнев, В.А.Мещеряков, И.П.Недялков. ЖЭТФ, I964, 46, с.663; ОИЯИ, Е-949, Дубна, I963.
5. Nedelkov I.P. JINR, E-1294, Дубна, I963 ; Phys. Rev., 1972, D6, p. 2842.
6. Nedelkov I.P., Pentchev G.J. JINR, p-1445, Дубна, 1963.
7. Warnock R.L. Rhys, Rev., 1968, 170, p. 1323; 1969, 174, p.2169.
8. Mc Daniel H., Warnock R.L. Nuovo Cim., 1969, 64, p.905.
9. В.П.Гердт, В.А.Мещеряков, ТМФ, I975, т.24, № 2, с.I55.
I0. Н.П.Векуа. Системы сингулярных интегральных уравнений. "Наука", М., I970.
II. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. "Наука", М., I966.
I2. Ф.Д.Гахов. Краевые задачи. "Наука", М., I977.

13. Л.В.Канторович , Г.П.Акилов. Функциональный анализ. "Наука", М., 1977.
14. М.К.Гавурин. Известия вузов, математика, № 5, 1958.
15. Amatuni A.Tz.Nuovo Cim.,1969,58A,p.321.
16. Конно Тайра, Нелипа Н.Ф. ТМФ, 1972, т.12, № 3,p.214.
17. И.И.Данилюк. Нерегулярные граничные задачи на плоскости. "Наука", М., 1975.
18. Lovelace C. Commun. Math. Rhys., 1967, 4, p. 261.

Рукопись поступила в издательский отдел

12 апреля 1978 года.