СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА





5 - 11458

Р.М.Ямалеев

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА

1978

5 - 11458

Р.М.Ямалеев

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Ямалеев Р.М. 5 - 11458

Дифференциальные и интегральные операторы нецелого порядка

Исследуются операторы дифференцирования и интегрирования нецелого порядка, где оператор дифференцирования определяется как обобщенный предел, а оператор интегрирования - как обратный оператору дифференцирования. С помощью преобразования Лапласа вычислены соответствующие пределы для некоторых элементарных функций и составлена таблица. В качестве примера применения предложенного метода вычислены некоторые интегралы, применяемые в теории размерной регуляризации фейнмановских интегралов (АИТН).

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Yamaleev R.M. 5 - 11458

Operators of Differentiation and Integration of Non-Whole Order

Operators of differentiation and integration of non-whole order are investigated. The differentiation operator is determined as a generalized limit, and the integration operator - as a reverse operator of differentiation. By using the Laplace transformation the correspondent limits for some elementary functions are determined and tabulated. As an example of the supposed method some integrals are determined which are applied in the theory of dimensional regularization of Feinman integrals.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978



Определение операции интегрирования и дифференцирования нецелого порядка стало возможным, как только была определена гамма-функция Эйлера, которая является обобщением понятия факториала на нецелые и комплексные значения аргумента. Впервые интегро-дифференциальные операторы нецелого порядка были рассмотрены в работах Римана и Лиувилля путем обобщения формулы для $n$-кратного повторного интеграла /1/. В то время они использовались как удобный аппарат исследования интегрального уравнения Абеля. В настоящее время операторы интегрирования и дифференцирования нецелого порядка с успехом применяются как в математических исследованиях /см., например, /2, 3/ /, так и в физике, а именно, в квантовой теории поля при осуществлении так называемой размерной регуляризации расходящихся фейнмановских интегралов /4/.

В настоящей работе оператор дифференцирования нецелого порядка определяется как обобщенный предел, а оператор интегрирования - соответственно как обратный оператору дифференцирования. С помощью преобразования Лапласа вычислены соответствующие пределы для некоторых элементарных функций и таким образом составлена таблица дифференцирования и интегрирования нецелого порядка. В качестве примера применения предложенного метода вычислены некоторые интегралы, применяемые в теории размерной регуляризации фейнмановских интегралов.

## I. ПРОИЗВОДНАЯ НЕЦЕЛОЙ КРАТНОСТИ

### 1. Определения

Пусть $n\in N$ и $(a,b\in R)$, причем $-\infty\le a<b\le\infty$. Обозначим через $L_n(a,b)$ класс всех измеримых на промежутке $(a,b)$ функций, для которых существует конечный интеграл Лебега

$$\int_a^b |f(x)|^n dx. \qquad /I.1/$$

При этом функции, отличающиеся одна от другой лишь на множестве меры нуль, считаем эквивалентными и рассматриваем как один и тот же элемент класса $L\ (a,b)$.

Определим через

$$||f||_{L_n(a,b)} = \{\int_a^b |f(x)|^n dx\}^{1/2} \qquad /I.2/$$

норму элемента $f(x)\in L_n(a,b)$.

Пусть $f(x)$ - производная функция из класса $L\ (0,\ell)$ $(0<\ell<+\infty)$. Интегралом от $f(x)$ порядка $\alpha$, где $\alpha\in R(0<\alpha<\infty)$, с началом в точке $x=0$ называется функция

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt,\ x\in(0,\ell). \qquad /I.3/$$

С помощью определения /I.3/ можно теперь обобщить и действие дифференцирования порядка $\alpha$. Пусть $m$ - наименьшее целое число, превосходящее $\alpha$, так что $\alpha=m-\delta$, где $0<\delta\le 1$. Тогда оператор $D^{\alpha}$ определяется следующим образом /1/:

$$D^{\alpha} f(x) = D^m D^{-\delta} f(x) = \frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^x (x-t)^{\delta-1} f(t)\,dt. \qquad /I.4/$$



Введенная таким образом операция дифференцирования имеет смысл, если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до $m$-го порядка включительно. Заметим, что формула /I.4/ справедлива, если функция $f(x)$ и ее первые $n-1$ производные обращаются в нуль при $x=0$. В общем случае имеет место следующая формула /3/:

$$D^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(0)\,x^{k-\alpha}}{\Gamma(1+k-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}\,dt.$$

В настоящей работе мы введем определение $\alpha$-кратной производной аналогично классическому определению производной через понятие предела разностного отношения.

Запишем конечно-разностное представление $n$-го порядка через значения функции $f(x)$ по формуле

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-)^{n-k} C_n^k f(x+kh), \qquad /I.5/$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - коэффициенты бинома Ньютона, $h=x_k-x_{k-1}$ - шаг разбиения по оси $x$, причем узлы разбиения $x_k$ расположены на равных расстояниях.

Тогда обобщенная $n$-кратная производная определяется как предел отношения

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n} (-)^{n-k} C_n^k \frac{f(x+kh)}{h^n}. \qquad /I.6/$$

Составим разностное отношение для функции $f(x)$, аналогичное /I.5/, порядка $\alpha$:

$$\Delta^{\alpha} f(x) = (-)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} (-)^k C_{\alpha}^k f(x+kh). \qquad /I.7/$$

# I. ПРОИЗВОДНАЯ НЕЦЕЛОЙ КРАТНОСТИ

## 1. Определения

Пусть $n\in N$ и $(a,b\in R)$, причем $-\infty\le a<b\le\infty$. Обозначим через $L_n(a,b)$ класс всех измеримых на промежутке $(a,b)$ функций, для которых существует конечный интеграл Лебега

$$\int_a^b |f(x)|^n\,dx. \qquad /1.1/$$

При этом функции, отличающиеся одна от другой лишь на множестве меры нуль, считаем эквивалентными и рассматриваем как один и тот же элемент класса $L(a,b)$.

Определим через

$$||f||_{L_n(a,b)} = \{\int_a^b |f(x)|^n\,dx\}^{1/2} \qquad /I.2/$$

норму элемента $f(x)\in L_n(a,b)$.

Пусть $f(x)$ - производная функция из класса $L(0,\ell)$ $(0<\ell<+\infty)$. Интегралом от $f(x)$ порядка $\alpha$, где $\alpha\in R(0<\alpha<\infty)$, с началом в точке $x=0$ называется функция

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt,\quad x\in(0,\ell). \qquad /I.3/$$

С помощью определения /I.3/ можно теперь обобщить и действие дифференцирования порядка $\alpha$. Пусть $m$ - наименьшее целое число, превосходящее $\alpha$, так что $\alpha=m-\delta$, где $0<\delta\le 1$. Тогда оператор $D^\alpha$ определяется следующим образом [1]:

$$D^\alpha f(x) = D^m D^{-\delta} f(x) = \frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^x (x-t)^{\delta-1} f(t)\,dt. \qquad /I.4/$$



Введенная таким образом операция дифференцирования имеет смысл, если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до $m$-го порядка включительно. Заметим, что формула /I.4/ справедлива, если функция $f(x)$ и ее первые $n-1$ производные обращаются в нуль при $x=0$. В общем случае имеет место следующая формула [3]:

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(0)\,x^{k-\alpha}}{\Gamma(1+k-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}\,dt.$$

В настоящей работе мы введем определение $\alpha$-кратной производной аналогично классическому определению производной через понятие предела разностного отношения.

Запишем конечно-разностное представление $n$-го порядка через значения функции $f(x)$ по формуле

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-)^{n-k} C_n^k f(x+kh), \qquad /I.5/$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - коэффициенты бинома Ньютона, $h=x_k-x_{k-1}$ - шаг разбиения по оси $x$, причем узлы разбиения $x_k$ расположены на равных расстояниях.

Тогда обобщенная $n$-кратная производная определяется как предел отношения

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n} (-)^{n-k} C_n^k \frac{f(x+kh)}{h^n}. \qquad /I.6/$$

Составим разностное отношение для функции $f(x)$, аналогичное /I.5/, порядка $\alpha$:

$$\Delta^\alpha f(x) = (-)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k C_\alpha^k f(x+kh). \qquad /I.7/$$

Определим $\alpha$-кратную производную как предел отношения $\Delta f(x)$ к $h^{\alpha}$ при $h \to 0$, т.е.

$$f^{(\alpha)}(x) = (-)^{\alpha} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k C_{\alpha}^k f(x+kh). \qquad /I.8/$$

Таким образом, у функции $f(x)$, заданной в промежутке $[0,\infty]$, существует $\alpha$-кратная производная, если существует предел /I.8/.

Выражение /I.8/ можно представить формально в другом виде:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} f(x) = (-)^{\alpha} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k C_{\alpha}^k e^{kh\frac{d}{dx}} f(x). \qquad /I.9/$$

Или в операторной форме:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} (e^{h\frac{d}{dx}} - 1)^{\alpha}. \qquad /I.10/$$

Приведем теперь некоторые свойства операций дифференцирования произвольного порядка.

1°. Пусть

$g(x) \in L_2(0,\ell)$, $r(x) \in L_2(0,\ell)$,

$c_1$ и $c_2$ - произвольные постоянные.

Тогда

$$(c_1 g(x) + c_2 r(x))^{(\alpha)} = c_1 g^{(\alpha)}(x) + c_2 r^{(\alpha)}(x). \qquad /I.11/$$

Свойство 1° следует непосредственно из определения /I.8/. Таким образом, операция $\alpha$-кратного дифференцирования является линейной.

2°. Пусть $f(x) \in L_2(0,\ell)$, а числа $\alpha_1 \in R$ $(0<\alpha_1<\infty)$, $\alpha_2 \in R(0<\alpha_2<\infty)$.



Тогда справедливы равенства

$$[f^{(\alpha_1)}]^{(\alpha_2)} = f^{(\alpha_1+\alpha_2)}(x) = [f^{(\alpha_2)}(x)]^{(\alpha_1)}. \qquad /I.12/$$

Для доказательства /I.12/ воспользуемся равенством

$$(a-1)^{\alpha_1}(a-1)^{\alpha_2} = (a-1)^{\alpha_1+\alpha_2},$$

что приводит к следующим соотношениям для коэффициентов бинома Ньютона:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{\alpha_1}^{n-k} C_{\alpha_2}^{k} = C_{\alpha_1+\alpha_2}^{n}. \qquad /I.13/$$

Имеем

$$[f^{(\alpha_1)}(x)]^{(\alpha_2)} = (-)^{(\alpha_1+\alpha_2)} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha_2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k C_{\alpha_2}^k \times$$

$$\times [\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha_1}} \sum_{p=0}^{\infty} (-)^p C_{\alpha_1}^p f(x+(k+p)h)] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-)^{\alpha_1+\alpha_2}}{h^{\alpha_1+\alpha_2}} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} (-)^{k+p} C_{\alpha_2}^k C_{\alpha_1}^p f(x+(k+p)h).$$

Перегруппируя соответствующим образом коэффициенты и применяя формулу /I.13/, получим, что

$$[f^{(\alpha_1)}(x)]^{(\alpha_2)} = (-)^{\alpha_1+\alpha_2} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha_1+\alpha_2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k C_{\alpha_1+\alpha_2}^k f(x+kh) =$$

$$= f^{(\alpha_1+\alpha_2)}(x).$$

Точно так же доказывается вторая часть равенства /I.12/.

## 2. $\alpha$-*кратные производные некоторых элементарных функций*

Составление таблицы $\alpha$-кратных производных для некоторых элементарных функций начнем с показательной функции

$$f(x) = a^{px} \quad (a^p < 1) .$$

$$(a^{px})^{(\alpha)} = (-)^{\alpha} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k C_{\alpha}^k a^{p(x+kh)} =$$

$$= a^{px} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} (a^{ph} - 1) = a^{px} p^{\alpha} \ln^{\alpha} a .$$

Таким образом,

$$(a^{px})^{(\alpha)} = a^{px} p^{\alpha} \ln^{\alpha} a . \qquad /I.14/$$

Следствием формулы /I.14/ являются

$$(e^{px})^{(\alpha)} = e^{px} p^{\alpha} ,$$

$$(\sin x)^{(\alpha)} = \sin(x + \alpha\frac{\pi}{2}), \qquad /I.15/$$

$$(\cos x)^{(\alpha)} = \cos(x + \alpha\frac{\pi}{2}) .$$

Остальную часть таблицы $\alpha$-кратного дифференцирования можно получить, используя преобразование Лапласа.

Имеет место следующая

***Теорема***

Пусть $F^{(\alpha)}(p)$ удовлетворяет условиям существования оригинала и $F(p) \doteqdot f(t)$, тогда

$$F^{(\alpha)}(p) \doteqdot (-)^{\alpha} t^{\alpha} f(t) .$$



Доказательство:

Несобственный интеграл равномерно сходится в области $\mathrm{Re}\,p > a$, где $a$ - показатель степени роста функции $f(t)$, что позволяет поменять местами знак предела со знаком интеграла /предполагается, что предел существует/.

$$F^{(\alpha)}(p) = (-)^{\alpha} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k C_{\alpha}^k \int_0^{\infty} e^{-(p+kh)t} f(t)\,dt =$$

$$= (-)^{\alpha} \int_0^{\infty} f(t) \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k C_{\alpha}^k e^{-(p+kh)t}\,dt =$$

$$= (-)^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\alpha} f(t)\,dt . \qquad /I.16/$$

Таким образом, $F^{(\alpha)}(p) \doteqdot (-t)^{\alpha} f(t)$ .

Теорема доказана.

В качестве применения доказанной теоремы найдем производную функции $f(x) = \frac{1}{x^A}$, $A > 0$ .

Рассмотрим преобразования Лапласа

$$\frac{\Gamma(\nu + 1)}{p^{\nu+1}} \doteqdot t^{\nu}, \quad \nu = -1,$$

или

$$\frac{1}{p^A} = \frac{1}{\Gamma(A)} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{A-1}\,dt .$$

Тогда

$$(\frac{1}{p^A})^{(\alpha)} = \frac{(-)^{\alpha}}{\Gamma(A)} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{A+\alpha-1}\,dt . \qquad /I.17/$$

Но

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^{A+\alpha-1}\,dt = \frac{\Gamma(A+\alpha)}{p^{A+\alpha}} . \qquad /I.18/$$

Таким образом, подставляя /I.18/ в /I.17/ и заменив р на x, окончательно получим:

$$\left(\frac{1}{x^A}\right)^{(\alpha)} = \frac{(-)^\alpha}{x^{A+\alpha}} \, \frac{\Gamma(A+\alpha)}{\Gamma(A)} . \qquad /I.19/$$

На основе формулы /I.19/ получим формулу $\alpha$ - кратной производной функции $f(x) = \ln x$:

$$(\ln x)^{(\alpha)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(\alpha-1)} = \frac{(-)^{\alpha-1}}{x^\alpha}\Gamma(\alpha) . \qquad /I.20/$$

Для вывода формулы $\alpha$ -кратной производной функции $f(x) = x^A$ нельзя применять непосредственно доказанную выше теорему. Однако и здесь можно использовать преобразования Лапласа.

Рассмотрим несобственный интеграл $\int_0^\infty e^{-pt}(t^A)^{(\alpha)}dt$.

Предположим, что этот интеграл существует и равномерно сходится по параметру p при $\operatorname{Re} p > 0$. Тогда:

$$\int_0^\infty e^{-pt}(t^A)^{(\alpha)}\,dt =$$

$$= (-)^\alpha \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^\infty (-)^k C_\alpha^k \int_0^\infty e^{-pt}(t+kh)^A\,dt . \qquad /I.21/$$

Сделаем замену переменной:

$$\xi = t + kh, \quad -pt = pkh - p\xi .$$

Тогда выражение /I.21/ преобразуется:

$$(-)^\alpha \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^\infty (-)^k C_\alpha^k (e^{ph})^k \int_{kh}^\infty e^{-p\xi}\xi^A d\xi =$$



$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}(e^{ph}-1)^\alpha \int_0^\infty e^{-p\xi}\xi^A d\xi = \frac{\Gamma(A+1)}{p^{A-\alpha}} .$$

Таким образом,

$$\int_0^\infty e^{-pt}(t^A)^\alpha\,dt = \frac{\Gamma(A+1)}{p^{A-\alpha}} . \qquad /I.22/$$

Интеграл /I.22/ сравним с интегралом

$$\int_0^\infty e^{-pt}t^{A-\alpha}\,dt = \frac{\Gamma(A-\alpha+1)}{p^{A-\alpha}} . \qquad /I.23/$$

Тогда

$$\int_0^\infty e^{-pt}\left[(t^A)^{(\alpha)} - \frac{\Gamma(A+1)}{\Gamma(A-\alpha+1)}t^{A-\alpha}\right]dt = 0 .$$

В силу свойства преобразования Лапласа выражение в квадратных скобках равно нулю. Заменяя t на x, окончательно имеем

$$(x^A)^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(A+1)}{\Gamma(A-\alpha+1)}x^{A-\alpha} . \qquad /I.24/$$

Формула /I.24/ справедлива при $\alpha \le A$. Однако выражение /I.24/ имеет смысл и тогда, когда $\alpha > A$, и поэтому при $\alpha > A$ выражение /I.24/ примем как определение.

Пусть $\alpha = \delta + n$, $A = \delta + m$, причем $n > m$. Тогда, как следствие формулы /I.24/ и /I.12/, имеем

$$(x^{\delta+m})^{(\delta+n)} = 0 . \qquad /I.25/$$

Заметим, что совместное применение формул /I.18/ и /I.24/ неправомерно, поскольку при $\alpha > A$ формулу /I.24/ мы принимаем как определение, а не как результат вычисления предела /I.8/.

Для нахождения формул $\alpha$ -кратной производной функции

$$\frac{\omega}{x^2+\omega^2} \quad \text{и} \quad \frac{\omega}{x^2+\omega^2}$$

воспользуемся преобразованиями Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-pt}\sin\omega t\,dt = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \qquad /I.26/$$

и

$$\int_0^\infty e^{-pt}\cos\omega t\,dt = \frac{p}{p^2+\omega^2}\,. \qquad /I.27/$$

Теперь выразим $\alpha$-кратную производную от правой части /I.26/ по переменной $p$. Имеем:

$$\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)^{(\alpha)} = \int_0^\infty e^{-pt}\,t^2\sin\omega t\,dt = \qquad /I.28/$$

$$= \frac{(-)^\alpha\,\omega}{2i}\,\Gamma(\alpha+1)\left[\frac{1}{(p-i\omega)^{\alpha+1}} - \frac{1}{(p+i\omega)^{\alpha+1}}\right].$$

Для второго выражения аналогично найдем:

$$\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)^{(\alpha)} = \frac{(-)^\alpha\,\Gamma(\alpha+1)}{2}\left[\frac{1}{(p-i\omega)^{\alpha+1}} + \frac{1}{(p+i\omega)^{\alpha+1}}\right]. \qquad /I.29/$$

Воспользовавшись формулами /I.28/ и /I.29/, найдем $\alpha$-кратную производную функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} x\,.$$

Согласно $2^\circ$ имеем



$$(\operatorname{arctg} x)^{(\alpha)} = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(\alpha-1)}\,.$$

Но из /I.28/ при $\omega = 1$ следует, что

$$(\operatorname{arctg} x)^{(\alpha)} = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(\alpha-1)} = \qquad /I.30/$$

$$= \frac{(-)^{\alpha-1}\,\Gamma(\alpha)}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^\alpha} - \frac{1}{(x+i)^\alpha}\right].$$

Правую часть можно преобразовать к виду

$$(\operatorname{arctg} x)^{(\alpha)} = (-)^{\alpha-1}\,\Gamma(\alpha)\,\frac{\sin\left(\alpha\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)}{(1+x^2)^{\alpha/2}} \qquad /I.31/$$

или к виду

$$(\operatorname{arctg} x)^{(\alpha)} = \Gamma(\alpha)\cos^\alpha y\,\sin\left[\alpha\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right], \qquad /I.32/$$

где $y = \operatorname{arctg} x$.

Приведем другой вывод формулы /I.30/. С этой целью представим функцию $\operatorname{arctg} x$ в виде интеграла

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^1 \frac{x\,dx}{t^2x^2+1}\,.$$

Возьмем от обеих частей данного равенства $\alpha$-кратную производную. Получим:

$$(\operatorname{arctg} x)^{(\alpha)} = \int_0^1 \left(\frac{x}{x+\frac{1}{t^2}}\right)^{(\alpha)}\frac{dt}{t^2}\,. \qquad /I.33/$$

Согласно формуле /I.29/ имеем

$$\left(\frac{x}{x^2+\frac{1}{t^2}}\right)^{(\alpha)} = \frac{(-)^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{2}\left[\frac{1}{(x-\frac{i}{t})^{\alpha+1}} + \frac{1}{(x+\frac{i}{t})^{\alpha+1}}\right]. \qquad /I.34/$$

Подставляя /I.34/ в /I.33/ и вычисляя табличный интеграл, после несложных преобразований получим формулу /I.30/.

## II. ИНТЕГРАЛЫ НЕЦЕЛОЙ КРАТНОСТИ

### 1. Определения

Неопределенный интеграл нецелой кратности $\alpha(\alpha>0,\ \alpha\in R)$ определяется как оператор, обратный $\alpha$-кратному дифференцированию. Пусть $f(x)$, $\Phi(x)\in L_2(0,\ell)$ $(0<\ell<\infty)$. Нахождение неопределенного интеграла кратности $\alpha$ от функции $f(x)$ равносильно решению уравнения

$$\Phi^{(\alpha)}(x) = f(x). \qquad /II.1/$$

Пусть $\alpha=n+\delta$, $0\leq\delta<1$, $n\in N$. Тогда уравнение /II.1/ с помощью преобразования Лапласа можно свести к дифференциальному уравнению порядка $\delta$. Умножим обе части уравнения /II.1/ на $e^{-pt}$ и проинтегрируем по $t$ от $0$ до $\infty$. Согласно теореме об изображении производной имеем:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}\,[\Phi^{(\delta)}(t)]^n\,dt = \qquad /II.2/$$

$$= p^n\left\{F(p) - \frac{f^{(\delta)}(0)}{p} - \ldots - \frac{f^{(\delta+n-1)}(0)}{p^n}\right\} = \mathcal{Y}(p),$$

где $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}\,\Phi^{(\delta)}(t)\,dt$, $\mathcal{Y}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$.

Применяя обратное преобразование Лапласа /в предположении, что оно существует/, находим

$$\Phi^{(\delta)}(t) = \phi(t) + f^{(\delta)}(0) + f^{(\delta+1)}(0)\,t + \ldots \frac{f^{(\delta+n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}, \qquad /II.3/$$

где

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}\,\frac{\mathcal{Y}(p)}{p^n}\,dp,\quad x>a$$

/прямая $x=a$ проходит правее всех особых точек подынтегральной функции/.

Обозначим неопределенный интеграл кратности $\alpha$ символом

$$\int f(x)\,d^{\alpha}x.$$

Поскольку неопределенный интеграл определяется как оператор, обратный дифференцированию, для степенной функции имеем:

$$\int t^{\beta}\,d^{\alpha}t = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\,t^{\beta+\alpha}. \qquad /II.4/$$

Пользуясь формулой /II.4/, проинтегрируем /II.3/ $\delta$-кратно, получим:

$$\Phi(x) = \int\phi(x)\,d^{\delta}x + P_{\delta,n-1}(x), \qquad /II.5/$$

где

$$P_{\delta,n-1}(x) = \frac{f^{(\delta)}(0)\,x^{\delta}}{\Gamma(\delta+1)} +$$

$$+\frac{f^{(\delta+1)}(0)\,x^{\delta+1}}{\Gamma(\delta+2)}+\ldots\frac{f^{(\delta+n+1)}(0)\,x^{\delta+n-1}}{\Gamma(\delta+n)}. \qquad /II.6/$$

В общем виде решение уравнения символично запишем в виде

$$\Phi(x) = \int f(x)\, d^{\alpha} x + P_{\delta,\, n-1}(x)\,, \qquad /II.7/$$

где $P_{\delta,n-1}(x)$ - многочлен типа /II.6/ с произвольными коэффициентами.

На основе выражения /II.7/ и формул $\alpha$-кратного дифференцирования можно составить таблицу $\alpha$-кратных интегралов /см. приложение/.

Для однозначного решения уравнения /II.1/ необходимо задать $n$ начальных условий, из которых определялись бы коэффициенты многочлена $P_{\delta,n-1}(x)$. Такая постановка задачи равносильна заданию определенного интеграла. Определенный интеграл кратности $\alpha$ запишем в виде следующего символа:

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\, d^{\alpha} t\,, \qquad /II.8/$$

причем $\Phi(a) = 0$.

Пусть $F^{(\alpha)}(x) = f(x)$. Тогда согласно /II.6/ и /II.7/ имеем:

$$\Phi(x) = F(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(\delta+k)}(a)}{\Gamma(\delta+k+1)}(x-a)^{\delta+k}\,, \qquad /II.9/$$

формула /II.9/ является обобщением формулы Ньютона-Лейбница на случай $\alpha$-кратного интеграла.



## 2. *Вычисление интеграла* $\int\limits_0^\infty e^{-ax^b}dx$ *с помощью формул* $\alpha$ *-кратного дифференцирования*

Интеграл $\Phi(a,b) = \int\limits_0^\infty e^{-ax^b}\, d^{\alpha}x$ сходится равномерно по параметрам $a>0$ и $b>0$, вследствие чего можно дифференцировать подынтегральную функцию по параметрам $a$ и $b$.

Продифференцируем функцию $\Phi(a,b)$ по переменной $a$ $\alpha \dfrac{b-1}{b}$ - кратно.

$$\Phi^{\left(\frac{b-1}{b}\right)}(a,b) = (-)^{\frac{b-1}{b}} \int\limits_0^\infty e^{-ax^b}\, x^{b-1}\, dx =$$

$$= (-)^{\frac{b-1}{b}}\, \frac{1}{b} \int\limits_0^\infty e^{-ax^b}\, dx^b = \frac{(-)^{\frac{b-1}{b}}}{b}\,.$$

Таким образом,

$$\Phi^{\left(\frac{b-1}{b}\right)}(a,b) = \frac{(-)^{\frac{b-1}{b}}}{ab}\,.$$

Будем искать $\Phi(a,b)$ в виде

$$\Phi(a,b) = \frac{c}{a^{1/b}}\,.$$

Дифференцируя $\Phi(a, b)$ $\frac{b-1}{b}$ -кратно и сравнивая с $\left(\frac{(-)^{(b-1)/b}}{b}\right)$, находим c.

$$\Phi^{\left(\frac{b-1}{b}\right)}(a, b) = \left(\frac{c}{a^{1/b}}\right)^{\left(\frac{b-1}{b}\right)} =$$

$$= (-)^{\frac{b-1}{b}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{b} + \frac{b-1}{b}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{b}\right)} \frac{c}{a} .$$

Откуда $c = \frac{\Gamma(\frac{1}{b})}{b}$ .

Итак, $$\int_0^\infty e^{-ax^b} dx = \frac{\Gamma(1/b)}{ba^{1/b}} . \qquad /II.10/$$

### 3. *Вычисление интеграла*

$$\Phi(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} d^2 x \quad (a > 0) . \qquad /II.11/$$

Интеграл /II.11/ является аналогом интеграла Гаусса и широко применяется как производящая функция в теории размерной регуляризации.

Пусть $a = 1/4t$, тогда интеграл /II.11/ преобразуется в интеграл

$$\Phi(t) = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} d^\alpha x. \qquad /II.12/$$

Умножим обе части /II.12/ на $e^{-pt} / \sqrt{\pi t}$ и проинтегрируем по t от 0 до $\infty$. Получим



$$\int_0^\infty \left[ \int_0^\infty e^{-pt} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} dt \right] d^\alpha x = \int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{\sqrt{\pi t}} \Phi(t)\, dt . \qquad /II.13/$$

Выражение в квадратных скобках есть преобразование Лапласа и равно

$$\int_0^\infty e^{-pt} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} dt = \frac{e^{-x\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} . \qquad /II.14/$$

Следовательно, левая часть /II.13/ вычисляется и равна

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^\infty e^{-x\sqrt{p}} d^\alpha x = \qquad /II.15/$$

$$= \int_0^\infty e^{-x\sqrt{p}} d^\alpha(-\sqrt{p}\,x) \cdot \frac{(-)^\alpha}{(\sqrt{p})^{\alpha+1}} = \frac{(-)^{\alpha+1}}{p^{\frac{\alpha+1}{2}}} .$$

С другой стороны,

$$\frac{(-)^{\alpha+1}}{p^{\frac{\alpha+1}{2}}} = \frac{(-)^{\alpha+1}}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} \int_0^\infty e^{-pt}\, t^{\frac{\alpha+1}{2} - 1} dt . \qquad /II.16/$$

Таким образом, сравнивая /II.16/ и /II.15/ и подставляя /II.16/ в /2.13/, имеем

$$\int_0^\infty e^{-pt} \left[ \Phi(t) - \frac{(-)^{(\alpha+1)}}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} t^{\frac{\alpha+1}{2} - 1} \right] dt = 0 .$$

Т.е.

$$\Phi(t) = \frac{(-)^{(\alpha+1}}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}\sqrt{\pi}\, t^{\alpha/2} .$$

Но $t = \frac{1}{4a}$. Итак, окончательно имеем

$$\Phi_\alpha(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} d^\alpha x = \frac{(-)^{\alpha+1}}{2^\alpha} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} \frac{1}{a^{\alpha/2}} . \qquad /II.17/$$

В работе /4/ интеграл /II.11/ по определению полагается равным $(\frac{\sqrt{\pi}}{2})^\alpha \frac{1}{a^{\alpha/2}}$, что отличается от результата /II.17/ множителем, зависящим от $\alpha$. Это отличие обусловлено тем, что в настоящей работе $\alpha$-кратный интеграл /II.11/ является обобщением n-кратного повторного интеграла от функции одного переменного, в то время как в работе /4/ он рассматривается как обобщение n-кратного интеграла от функции n-переменных. Поскольку интеграл /II.11/ в теории размерной регуляризации рассматривается как производящая, то результаты вычислений данных интегралов указанными методами будут отличаться друг от друга на один и тот же множитель.

В качестве примера вычислим еще один интеграл, применяемый в теории размерной регуляризации.

Рассмотрим интеграл

$$\Phi(m^2) = \int_0^\infty \frac{d^\alpha k}{(k^2+m^2)^\beta} . \qquad /II.18/$$

Перепишем интеграл /II.18/ в виде



$$\Phi(m^2) = \int_0^\infty d^\alpha k \int_0^\infty e^{-(k^2+m^2)t} d^\beta t =$$

$$= \int_0^\infty d^\beta t\, e^{-m^2 t} \int_0^\infty d^\alpha k\, e^{-k^2 t} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-m^2 t} \left[ \frac{(-)^\alpha \sqrt{\pi}}{2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} \frac{1}{t^{\alpha/2}} \right] d^\beta t . \qquad /II.19/$$

Таким образом, задача сводится к вычислению интеграла

$$F(m^2) = \int_0^\infty \frac{e^{-m^2 t}}{t^{\alpha/2}} d^\beta t . \qquad /II.20/$$

Продифференцируем /II.20/ $\alpha/2$ раз по параметру $m^2$. Получим

$$F^{(\alpha/2)}_{(m^2)} = (-)^{\alpha/2} \int_0^\infty e^{-m^2 t} d^\beta t = \frac{(-)^{\alpha/2}}{m^{2\beta}} . \qquad /II.21/$$

Предположим следующий вид $F(m^2)$:

$$F(m^2) = \frac{c}{m^{2\beta - \alpha/2}} . \qquad /II.22/$$

Дифференцируя /II.22/ $\alpha/2$ раз и сравнивая результат с /II.21/, находим c:

$$c = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \frac{\alpha}{2})} . \qquad /II.23/$$

Подставляя /II.23/ в /II.22/, а /II.22/ в /II.19/, окончательно находим:

$$\Phi(m^2) = \int_0^\infty \frac{d^\alpha k}{(k^2+m^2)^\beta} = \frac{(-)^{\alpha+1}\sqrt{\pi}}{2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} \; \frac{\Gamma(\beta-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\beta)\, m^{2\beta-\alpha}} . \qquad /II.24/$$

## *ПРИЛОЖЕНИЕ*

***А.*** Таблица $\alpha$ -кратных производных для некоторых элементарных функций

| | $f(x)$ | $f^{(\alpha)}(x)$ |
|---|---|---|
| 1. | $e^x$ | $e^x$ |
| 2. | $a^{px}$ | $a^{px} p^\alpha \ln a$ |
| 3. | $\sin x$ | $\sin(x+\alpha\frac{\pi}{2})$ |
| 4. | $\cos x$ | $\cos(x+\alpha\frac{\pi}{2})$ |
| 5. | $x^A\ (A>0)$ | $\frac{\Gamma(A+1)}{\Gamma(A-\alpha+1)} x^{A-\alpha}$ |
| 6. | $\frac{1}{x^A}\ (A>0)$ | $\frac{(-)^\alpha}{x^{A+\alpha}} \frac{\Gamma(A+\alpha)}{\Gamma(A)}$ |
| 7. | $\ln x$ | $\frac{(-)^{\alpha-1}}{x^\alpha} \Gamma(\alpha)$ |



***В.*** Таблица $\alpha$ -кратных неопределенных интегралов для некоторых элементарных функций /с точностью до многочлена, определенного выше/

| | $f(x)$ | $\int f(x)\, d^\alpha x$ |
|---|---|---|
| 1. | $e^x$ | $e^x$ |
| 2. | $a^{px}$ | $\frac{a^{px}}{p^\alpha \ln a}$ |
| 3. | $\sin x$ | $\sin(x-\alpha\frac{\pi}{2})$ |
| 4. | $\cos x$ | $\cos(x-\alpha\frac{\pi}{2})$ |
| 5. | $x^A\ (A>0)$ | $\frac{\Gamma(A+1)}{\Gamma(A+\alpha+1)} x^{A+\alpha}$ |
| 6. | $\frac{1}{x^A}\ (A \neq \alpha)$ | $\frac{\Gamma(A-\alpha)}{\Gamma(A)} \frac{1}{x^{A-\alpha}}$ |
| 7. | $\frac{1}{x^\alpha}$ | $\frac{(-)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ln x$ |

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.II, "Наука", М., 1970.*
2. *Карасев И.М. Операторный метод интегрирования гипергеометрического уравнения. УМН, 1962, XVII, вып. 2 /104/.*
3. *Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. "Наука", М., 1966.*
4. Leibbrandt G. Rev. of Modern Physics, 1975, Vol.47, No. 4.


***Рукопись поступила в издательский отдел 6 апреля 1978 года.***