ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

4-95-524

На правах рукописи
УДК 531.19

ЩЕРБАКОВ
Роберт Робертович

МУЛЬТИКРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ И САМООРГАНИЗАЦИЯ В РЕШЕТОЧНЫХ МОДЕЛЯХ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 1995

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук Н.С. Ананикян

доктор физико-математических наук В.Б. Приезжев

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук С.Л. Гинзбург

кандидат физико-математических наук, доцент Д.В. Ктитарев

Ведущая организация:

Московский Физико–Технический Институт

Защита диссертации состоится 21 февраля 1996 г. в 15 часов на заседании специализированного совета К047.01.01 при Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований по адресу: Московская обл. г. Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан 17 января 1996 г.

Ученый секретарь
специализированного совета К047.01.01
доктор физико-математических наук А.Е. Дорохов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В течение последних сорока лет в различных областях физики наблюдается неослабевающий интерес к решеточным моделям. Первоначально решетки использовались в статистической физике для моделирования кристаллической структуры твердых тел и для исследования критического поведения магнетиков. В дальнейшем, они стали широко применяться в квантовой теории поля, где введение дискретного пространства-времени обеспечивает обрезание ультрафиолетовых расходимостей. В последнее время, на решетке рассматривают различные нелинейные динамические системы, типа клеточных автоматов, которые, в определенных областях параметров, проявляют хаотическое поведение.

Решеточный подход проявил себя в полной мере после введения понятий подобия (скейлинга) и универсальности, так как на решетке модели становятся математически хорошо определенными и могут быть исследованы различными методами. Основная идея этих гипотез состоит в предположении о том, что критическое поведение различных физических величин должно быть нечувствительным к деталям поведения потенциала взаимодействия и определяется главным образом крупномасштабными свойствами, такими, как размерность системы и ее симметрия.

Особенно интересные результаты были получены для фазовых переходов II рода. При приближении к точке перехода характерный размер флуктуаций параметра порядка неограниченно возрастает. В результате тонкие детали микроскопического строения системы оказываются несущественными, а взаимодействие флуктуаций определяется только природой самого параметра порядка (т.е. симметрией системы).

Благодаря восстановлению непрерывности вблизи критической точки, крупномасштабные флуктуации, которые ответственны за появление сингулярностей термодинамических функций, можно описывать на языке евклидовой квантовой теории поля. Таким образом, благодаря решеточным моделям возникло новое направление в физике—конформные квантовые теории поля.

Решеточный подход позволяет установить тесную связь калибровочной теории поля со статистической механикой. Особенно наглядно это видно в фейнмановской формулировке квантовой механики в терминах континуального интеграла. Оказывается, что в евклидовом пространстве производящий функционал эквивалентен статсумме соответствующей статистической системы, а квадрат калибровочной константы связи прямо соответствует температуре. Таким образом, в физике элементарных частиц становится возможным использовать все методы, известные из спиновых решеточных моделей.

Еще одной областью исследований, где успешно применяется решеточный подход, являются различные динамические нелинейные модели.

В 1987г. П.Бак, К.Визенфельд и Ч.Танг предложили теорию самоорганизованной критичности. Согласно этой теории, многие составные диссипативные системы естественным образом эволюционируют к критическому состоянию, в котором малое событие вызывает цепную реакцию, могущую повлиять на любое число элементов системы. Хотя в составных системах происходит больше незначительных событий, чем катастроф, цепные реакции всех масштабов являются неотъемлемой частью динамики. Как следует из теории самоорганизованной критичности, малые события вызывает тот же механизм, что и крупные. Более того, составные системы никогда не достигают равновесия, а вместо этого эволюционируют от одного метастабильного состояния к другому.

В последние годы эксперименты и расчеты по моделям показали,

что многие составные системы, стоящие в центре исследований в геологии, экономике, биологии и метеорологии, обнаруживают признаки самоорганизованной критичности. Эти открытия улучшили наше понимание эволюции земной коры, рынка акций, экосистем и многих других составных систем.

Развитие разнообразных приближенных методов особенно актуально при изучении решеточных моделей. В то же время существующие приближенные методы не лишены недостатков. Многие из них, либо недостаточно точны, либо слишком сложны в применении, либо имеют ограниченные аналитические возможности. Это оставляет место для развития других схем приближения.

Цель работы. Целью настоящей диссертации является развитие уже существующих и создание новых аналитических методов исследования различных спиновых, калибровочных и динамических моделей на "бесконечномерных" решетках с древовидной структурой.

Научная новизна и практическая ценность. В диссертации разработана рекуррентная схема решения различных спиновых, калибровочных и динамических моделей на "бесконечномерных" решетках, имеющих древовидную структуру. Основным достоинством этих решеток является возможность аналитического получения точных выражений для различных характеристик, описывающих их критическое поведение. Примененные в диссертации методы могут быть использованы для исследования широкого класса решеточных моделей. Полученные в диссертации результаты позволяют понять критическое поведение спиновой БЭГ модели и модели Изинга со спином 3/2, Z(3)–калибровочной модели, абелевой модели самоорганизованной критичности (sandpile model) и могут служить основой для дальнейших исследований в этом направлении. Предложенная в диссертации Z(3)–калибровочная модель открывает возможность построения нетривиальной непрерывной теории в окрестности трикритической точки.

На защиту выдвигаются следующие результаты.

- разработан рекуррентный метод вычисления различных характеристик решеточных моделей, использующий древовидную структуру решеток.

- найдено точное решение спиновой модели Блюма-Эмери-Гриффитса (БЭГ) на обычной решетке Бете, при определенном условии, наложенным на константы обменных взаимодействий. Аналитически получены точные рекуррентные соотношения для статистической суммы, определенной на ветви дерева Кейли. В термодинамическом пределе найдено точное выражение для свободной энергии БЭГ модели на решетке Бете. Найдена λ-линия фазового перехода II рода, оканчивающаяся в трикритической точке. Вычислены критические индексы в окрестности точек фазовых переходов II рода.

- рассмотрена модель Изинга со спином 3/2 на той же решетке. Получены точные рекуррентные соотношения для статистической суммы, определенной на ветви дерева Кейли. Выведено точное выражение для свободной энергии. Проведено исследование критического поведения модели: найдена λ-линия фазового перехода II рода.

- сформулирована $Z(3)$-калибровочная модель с двухплакетным представлением действия. Показано, что модель может быть сведена к спиновой БЭГ модели. Показано, что в данной модели, рассмотренной на двумерных треугольной и квадратной решетках, существует линия фазового перехода II рода, а в модели на обобщенной решетке Бете, наряду с линией фазового перехода II рода, существует трикритическая точка.

- исследована абелева модель самоорганизованной критичности на бесконечномерной решетке Хусими из треугольных и квадратных плакетов. Построены рекуррентные соотношения для чисел дозволенных конфигураций, определенных на ветви дерева Хусими. Аналитически найдено точное распределение вероятностей высот в состоянии самоорганизованной критичности. Также получены точные выражения для двухточечных корреляционных функций.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на: VIII-th International Seminar: Quarks-94, Vladimir, May 1994; XI-th International Congress of Mathematical Physics, Paris, July 1994; International Seminar: Critical Phenomena and Self-Organization, Dubna, July 1995; Network program on "Frontiers in Condensed Matter Physics", Torino, October 1995; Семинарах Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, Дубна; Семинарах теоретического отдела Ереванского физического института, Ереван.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-6].

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Общий объем диссертации 83 страниц машинописного текста, включая 15 рисунков и список литературы из 94 наименований.

Во введении обоснована актуальность темы, приведен краткий обзор проблем, затронутых в диссертации, а также описаны структура диссертации и ее основные результаты.

В первой главе (*"Спиновые модели на решетке Бете"*) рассмотрено мультикритическое поведение спиновых моделей типа Изинга на "бесконечномерной" решетке Бете.

В **§1.1** приведен рекуррентный способ построения решетки Бете и указаны ее основные отличия от стандартных решеток. Решетка Бете представляет собой структуру, основанную на специальном графе, известном в топологии под названием "дерево Кейли". Отличие дерева Кэйли от обычных решеток связано прежде всего с тем, что при координационном числе (число соседей каждого узла) $q \geq 2$ мы имеем топологически тривиальную решетку, т.е. не содержащую петель. Нетривиальная топология-отличное от нуля второе число Бетти–является основной преградой на пути к точному решению решеточных моделей, поэтому получение точных решений на дереве Кэйли выглядит естественным.

Переход к решетке Бете можно осуществить двумя методами. В первом подходе из статсуммы определенной на полном дереве Кэйли специальным способом выделяется, а затем отбрасывается часть, связанная с границей. Мы используем другой подход, в котором все выражения первоначально выводятся для центрального узла, а в дальнейшем, исходя из их эквивалентности, обобщаются на все узлы решетки Бете.

В **§1.2** приводится формулировка модели Блюма-Эмери-Гриффитса (БЭГ). Эта модель была введена для качественного и количественного описания низкотемпературных критических свойств следующих систем:

класс анизотропных антиферромагнетиков ($FeCl_2$, $FeBr_2$, $NiNO_32H_2O$ и т.д.), раствор двух изотопов гелия (^3He и ^4He), многокомпонентные жидкие растворы, микроэмульсии и высокотемпературные сверхпроводники.

В данной модели предполагается, что каждая частица взаимодействует только с ближайшими соседями, а также с внешними полями. Гамильтониан БЭГ модели имеет следующий вид:

$$\mathcal{H}(S) = -\sum_{<i,j>} \left[J' S_i S_j + K' S_i^2 S_j^2\right] - \sum_i \left(h' S_i - \Delta' S_i^2\right), \qquad (1)$$

где первое суммирование выполняется по всем ребрам графа, а второе – по всем узлам.

В данном параграфе решена точно ферромагнитная БЭГ модель с определенным условием, наложенным на константы обменных взаимодействий:

$$\frac{K'}{k_B T} = -\ln\cosh\left(\frac{J'}{k_B T}\right). \qquad (2)$$

Аналитически получены точные рекуррентные соотношения для статистической суммы, определенной на ветви дерева Кейли. В термодинамическом пределе найдено точное выражение для свободной энергии БЭГ модели на решетке Бете. В модели обнаружена λ–линия фазового перехода II рода, которая, при координационных числах решетки $q \geq 6$, оканчивается трикритической точкой. Приведена фазовая диаграмма модели. Также вычислены критические индексы в окрестности λ–линии и трикритической точки. Полученные индексы, как и следовало ожидать, имеют классические значения.

В **§1.3** рассмотрена ферромагнитная модель Изинга со спином 3/2 на той же решетке. Гамильтониан модели имеет вид:

$$
\mathcal{H}(S) = -\sum_{<i,j>} \left[J' S_i S_j + 16K' S_i^2 S_j^2 + L' S_i^3 S_j^3 + \frac{1}{2} M' (S_i S_j^3 + S_i^3 S_j) \right] -
$$

$$
- \sum_i \left(h' S_i - 4\Delta' S_i^2 + h_3' S_i^3 \right) , \tag{3}
$$

где $S_i = \{-3/2, -1/2, +1/2, +3/2\}$, первое суммирование выполняется по всем ребрам графа, а второе–по всем узлам.

Для этой модели также найдены рекуррентные соотношения для статистической суммы, определенной на ветви дерева Кейли. В термодинамическом пределе аналитически выведено точное выражение для свободной энергии. Нами найдена только λ–линия фазового перехода II рода.

Во второй главе (*"Калибровочная теория на решетке"*) сформулирована $Z(3)$-калибровочная модель с двухплакетным представлением действия.

В §**2.1** приведен обзор решеточной калибровочной теории, которая была сформулирована Вильсоном в 1974 г. Идея его подхода основана на представлении калибровочного поля как зависящего от пути фазового множителя. Полевыми переменными U_{ij} являются элементы некоторой калибровочной группы G, сопоставляемые ребрам решетки (i, j). Данная формулировка замечательна тем, что сохраняет требование локальной калибровочной инвариантности. Вильсоновская формулировка выявляет аналогию решеточной калибровочной теории с моделями статистической механики, описывающими магнетики. Величины U_{ij} играют туже роль, что и "спины", расположенные в узлах решетки.

Вильсоновская формулировка позволяет рассматривать калибровочные модели с дискретными группами симметрии. Исследование этих моделей может помочь в понимании фазовой структуры калибровочных теорий основанных на непрерывных группах.

В 1984 г. Тюрбаном была предложена двумерная $Z(2)$-калибровочная модель с действием, в котором суммирование распространяется по всем соседним плакетам. Им было показано, что в случае чисто калибровочной теории (без полей материи) эта модель сводится к спиновой модели Изига. Как следствие, в данной модели существует фазовый переход II рода.

В §**2.2** нами сформулирована $Z(3)$-калибровочная модель с действием, включающем взаимодействие ближайших плакетов:

$$
S_{Gauge}(\alpha_{2g}, \beta_{2g}, \beta_g) = -\sum_{<p_i\, p_j>} \left\{ \alpha_{2g} \left(\delta_{U_{p_i},1} \delta_{U_{p_j},1} + \delta_{U_{p_i},z} \delta_{U_{p_j},z} \right) + \right.
$$

$$
\left. \beta_{2g} \left(\delta_{U_{p_i},1} \delta_{U_{p_j},z} + \delta_{U_{p_i},z} \delta_{U_{p_j},1} \right) \right\} + \beta_g \sum_{p_i} \left(\delta_{U_{p_i},1} + \delta_{U_{p_i},z} \right) . \tag{4}
$$

Первое суммирование выполняется по всем ближайшим плакетам, а второе по всем плакетам решетки, $z = \exp(i\frac{2\pi}{3}) \in Z(3)$, а $U_{p_i} = \prod_{b \in \partial p} U$ обозначает произведение полевых переменных U вдоль контура элементарного плакета i.

Данная Z(3)–калибровочная модель преобразованием:

$$
\begin{aligned}
S_i &= \delta_{U_{p_i},1} - \delta_{U_{p_i},z} , \\
S_i^2 &= \delta_{U_{p_i},1} + \delta_{U_{p_i},z} ,
\end{aligned} \tag{5}
$$

может быть сведена к спиновой БЭГ модели, определенной на узлах дуальной решетки и исследована различными методами, известными для спиновых моделей.

В §**2.3** Z(3)–калибровочная модель рассматривается на двумерных треугольной и квадратной решетках. Показано, что в модели существует линия фазового перехода II рода, которая разделяет фазовую плоскость констант обменных взаимодействий (β_g, β_{2g}) на упорядоченную и неупорядоченную области.

В §**2.4** Z(3)–калибровочная модель рассматривается на обобщенной решетке Бете. В модели обнаружена, наряду с линией фазового перехода II рода, трикритическая точка. Данный результат открывает возможность построения нетривиальной непрерывной теории в окрестности трикритической точки.

В третей главе (*"Абелева модель самоорганизованной критичности на решетке Хусими"*) рассмотрена динамическая модель, которая, с течением времени, эволюционирует в состояние самоорганизованной критичности (СОК).

В §**3.1** приведен алгоритм построения дерева Хусими и его отличия от бесконечномерной решетки Хусими, на которой рассматривается Абелева модель самоорганизованной критичности (АМСК).

Абелева модель самоорганизованной критичности может быть определена на произвольном графе. Каждому узлу i $(1 \le i \le N)$ сопоставляется некоторая целая переменная z_i, которая может трактоваться, как высота столбца песчинок или число частиц в этом узле. Эволюция во времени данной модели задается следующими двумя правилами:

(i) Добавление частиц в систему: мы выбираем произвольно узел i и увеличиваем его высоту z_i на 1, не изменяя остальные узлы. Вероятность, с которой выбираются узлы, может быть неодинаковой для различных узлов.

(ii) Правило осыпания: если высота некоторого узла j превысит критическое значение $z_c(j)$, то узел становится неустойчивым и осыпается, теряя часть песчинок, которые падают на соседние узлы, либо покидают систему.

В §**3.2** АМСК рассмотрена на решетке Хусими из треугольных плакетов. Выведены точные рекуррентные соотношения для чисел дозволенных конфигураций, определенных на ветви дерева Хусими. Найдено распределение вероятностей высот в состоянии самоорганизованной критичности. Также получены точные выражения для двухточечных корреляционных функций:

$$P_n(i,j) = P(i)P(j) + p_{ij}\,4^{-(n+5)}, \qquad n > 1. \qquad (6)$$

где p_{ij} являются численными константами.

В §**3.3** та же модель рассмотрена на решетке Хусими из квадратных плакетов. Найдены точные выражения для распределения вероятностей высот и двухточечных корреляционных функций в состоянии самоорганизованной критичности.

В конце этого параграфа проведено сравнение распределения вероятностей высот в СОК состоянии, вычисленных на решетках Хусими с координационным числом $q = 4$, с известными результатами для квадратной решетки и решетки Бете.

В заключении сформулированы полученные в диссертации результаты, которые и выносятся на защиту.

Литература

[1] Ананикян Н.С., Измаилян Н.Ш., Щербаков Р.Р., *Фазовый переход "порядок–порядок" в БЭГ модели*, ФТТ, 1992, том **34**, стр. 3448.

[2] Ананикян Н.С., Измаилян Н.Ш., Щербаков Р.Р., *Точное решение Блюм-Эмери-Гриффитс модели на решетке Бете*, Письма в ЖЭТФ, 1994, том **59**, стр. 71-74.

[3] Ananikian N.S. and Shcherbakov R.R., *Tricritical phenomena in a Z(3) lattice gauge theory*, J.Phys. A:Math.Gen., 1994, v.**27**, pp.L887-L890.

[4] Ananikian N.S. and Shcherbakov R.R., *Reduction of a Z(3) Gauge Theory on the Flat Lattices to the Spin-1 BEG Model*, Phys.Lett. A, 1995, v.**200**, pp.27-30.

[5] Papoyan Vl.V. and Shcherbakov R.R., *Distribution of Heights in the Abelian Sandpile Model on the Husimi lattice*, Fractals, 1995.

[6] Papoyan Vl.V. and Shcherbakov R.R., *Abelian Sandpile Model on the Husimi Lattice of Square Plaquettes*, J.Phys. A:Math.Gen., 1995, v.**28**, pp.6099-6107.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 декабря 1995 года.