

Б-742

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**  
**ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ**  
**И АВТОМАТИЗАЦИИ**

4 - 9466

**БОГОЛЮБСКИЙ**  
**Игорь Львович**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**  
**НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ**  
**В ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ**

Специальность 01.04.02 - теоретическая  
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Дубна 1976

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук В.Г.Маханьков

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук А.А.Иванов

доктор физико-математических наук В.К.Федянин

Ведущая научно-исследовательская организация: факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета.

Автореферат разослан "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 1976 года.

Защита диссертации состоится "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 1976 года в \_\_\_ часов на заседании Учёного совета Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ, г.Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Учёный секретарь Совета

кандидат физико-математических наук

Т.П.Пузынина

4 - 9466

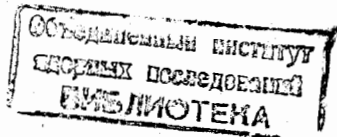
БОГОЛЮБСКИЙ  
Игорь Львович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ  
В ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ

Специальность 01.04.02 - теоретическая  
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)



Для исследования сложных физических задач в настоящее время интенсивно применяется метод математического моделирования. Широко используется как моделирование на основе континуальных уравнений (например, гидродинамических), так и численный эксперимент с использованием "укрупнённых" частиц (в тех случаях, когда существенна дискретность системы) /1/.

Одним из важных направлений современной физики является изучение динамики нелинейных волн. При достаточно больших амплитудах волн сильная корреляция их фаз может делать неприменимым хорошо разработанный аппарат теории слабой турбулентности /2-5/. В работе /6/ было предложено удобное динамическое описание сильно-нелинейных в.ч. процессов в плазме, и выдвинута гипотеза о возможности "коллапса ленгмюровских волн" (КЛВ). Важными решениями нелинейных эволюционных уравнений являются солитоны (установившиеся уединенные нелинейные волны), которым посвящён фундаментальный обзор /7/. В терминах солитонов удобно обсуждать известную проблему Ферми-Паста-Улама /8/, наиболее общая формулировка которой такова: может ли нелинейность волн привести к необратимому перераспределению их энергии по степеням свободы и стохастизации рассматриваемых систем? Стохастизация невозможна в полностью интегрируемых гамильтоновых системах, взаимодействие солитонов в них является упругим, т.е. сохраняет их форму, амплитуды и скорости.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и приложения.

В первой главе на примере волн в плазме рассматривается эволюция нелинейных в.ч. волн, оказывающих усреднённое воздействие на н.ч. движения (ионно-звуковые ( $S$ ) волны). Н.ч. волны, рассматриваемые в этой главе, существенно влияют на в.ч. процессы, в частности, на динамику в.ч. солитонов.

§ I главы I содержит краткий обзор используемых уравнений. Так, система

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z^\alpha} \frac{\partial}{\partial z} z^\alpha E = VE, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta_{zz} V = \Delta_{zz} |E|^2 \quad (1)$$

удобна для одномерного моделирования сильной ленгмювской ( $\ell$ ) турбулентности в плоской, цилиндрически-симметричной ( $CS$ ) и сферически-симметричной ( $SS$ ) геометрии [6] ( $\alpha=0, 1, 2$  соответственно). Часто рассматривают "квазистатическое" ( $qs$ ) приближение, полагая в (1)  $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$ ; в этом приближении  $V = -|E|^2$ . Именно  $qs$ -механизмы влияния нелинейности рассматриваются обычно в теории самофокусировки  $t$ -волн (см. обзор [9]).

В § I отмечается, что задача о самофокусировке  $t$ -волн в плазме требует динамического описания (1), в котором оператор  $\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z^\alpha} \frac{\partial}{\partial z} z^\alpha$  заменён на  $\Delta_{zz} = \frac{1}{z^\alpha} \frac{\partial}{\partial z} z^\alpha \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\alpha=1$ .

В § 2 первой главы уравнения (1) преобразованы заменой переменных  $\varphi = E z^{\alpha/2}$ ,  $\nu = V z^{\alpha/2}$ ,  $\alpha=1, 2$  к виду, удобному для исследования на ЭВМ. Для полученных уравнений построены консервативные [10] разностные схемы 2-го порядка точности, и сконструирована подвижная разностная сетка с переменными шагами  $\tau$  и  $h$ .

В § 3 главы I на основе системы уравнений

$$i E_t + E_{xx} = VE, \quad V_{tt} - V_{xx} = |E|^2_{xx} \quad (2)$$

изучается формирование и взаимодействие в.ч.  $\ell$ -солитонов,

$$E = E_m \operatorname{sech} \left[ (x-Mt) \frac{E_m}{\sqrt{2(1-M^2)}} \right] \cdot \exp \left( i \frac{M}{2} x - i \Omega t \right),$$

$$V = -\frac{|E|^2}{1-M^2}, \quad \Omega = \frac{M^2}{4} - \frac{E_m^2}{2(1-M^2)} \quad (3)$$

Солитоны (3) принципиально не могут иметь скорости  $M > 1$ , в отличие от  $qs$ -солитонов уравнения

$$i E_t + E_{xx} + |E|^2 E = 0, \quad (4)$$

полученных в [11]; скорость  $qs$ -солитонов, которые получаются заменой  $(1-M^2)$  в формуле (3) на единицу, произвольна. При анализе процессов формирования и взаимодействия солитонов (3) использованы интегралы движения  $S_1 = \int |E|^2 dx$  и

$$S_2 = \int (V|E|^2 + |E'_x|^2 + \frac{V^2}{2} + \frac{u^2}{2}) dx, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

(законы сохранения числа плазмонов и энергии системы, моделируемой уравнениями (2)). Для солитонов получены выражения  $S_1$  и  $S_2$  через  $E_m$  и  $M$  и зависимость  $S_2 = S_2(S_1, M)$ .

Показано, что в рамках  $qs$ -уравнения (4) невозможно формирование в.ч.  $qs$ -солитонов, если только начальные данные не совпадают случайным образом с  $N$ -солитонным решением этого уравнения, полученным методом обратной задачи теории рассеяния (ОЗТР) в [12]. Причина состоит в том, что пренебрежение в (2) членом  $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$  запрещает генерацию н.ч.  $S$ -волн, играющих роль переносчиков энергии и импульса в процессах формирования и взаимодействия в.ч. солитонов. В отличие от  $qs$ -уравнения (4) динамическая система (2) позволяет проследить формирование солитонов (3) из различных начальных пакетов в.ч. волн [13]. В частности, рассмотрено формирование движущегося солитона из непод-

вижного несимметричного пакета в результате "реактивного" действия излучаемых  $S$ -волн. Кроме того, на ЭВМ изучено формирование из сверхзвукового ( $M_0=2$ ) пакета:

$$E(x, 0) = C \cdot \exp[-(x-x_0)^2/2d^2] \cdot \exp(i \frac{M_0}{2} x), \quad (6)$$

$$V(x, 0) = 0, \quad C=1, \quad d=2,$$

дозвукового солитона, имеющего скорость  $M \approx 0.55$ . Если в (6)

$V(x, 0) = -|E(x, 0)|^2$ , образуется более медленный солитон ( $M \approx 0.1$ ). Вообще, для формирования солитона (6), движущегося со скоростью  $M$ , необходимо, чтобы энергия начального возмущения  $S_2(0)$  превышала энергию солитона  $S_2(S_1, M) / I^4$ .

Взаимодействие  $qs$ -солитонов в рамках уравнения (4) упруго /12/. При переходе к динамической системе (2) положение координатным образом изменяется. Так, в широкой области параметров  $E_m, M$  происходит "слипание" двух одинаковых встречных солитонов в один; избыточная энергия  $\Delta S_2$  при этом уносится  $S$ -волнами. Область слипания получена в большой серии экспериментов на ЭВМ. По-видимому, это первый пример так ярко выраженной неупругости взаимодействия солитонов.

Далее продемонстрирована возможность обратного явления - расщепления солитона (3) на два в результате действия на него н.ч.  $S$ -волн. Одновременно показывается, что использование при моделировании периодических и нулевых граничных условий приводит к обращению процесса через время  $t_c \approx 2L/v_s$  ( $2L$ -длина рассматриваемого отрезка,  $v_s=1$  - скорость  $S$ -волн). Слипание и дробление солитонов означает возможность передачи энергии соответственно в ступки меньших и больших масштабов и позволяет разработать модель солитонной  $l$ -турбулентности /15/. Отмечается, что в процессе самофокусировки  $t$ -волн в плазме также должна наблюдаться генерация  $S$ -волн.

Полученные результаты интерпретируются на языке ядерной физики и могут быть использованы для построения моделей элементарных частиц конечного размера.

В § 4 главы I на основе системы (I) изучаются  $CS$  и  $SS$  модели КЛВ. Рассмотрен процесс образования квазисолитонов, имеющий много общего с процессом формирования солитонов (3). Изучена аналитически начальная стадия движения квазиплоского ( $\Delta \tau \ll \tau$ ) "сферитона", неподвижного при  $t=0$ . Показано отсутствие автомодельных решений в  $SS$ -геометрии. Получены выражения для инварианта  $S_2$  в  $CS$  и  $SS$  случаях. С помощью расчетов на ЭВМ, а также анализа интегралов движения, выполненного впервые в /16/, показано, что установление скорости квазисолитона  $M \approx 1/\sqrt{5}$  - общая закономерность для  $CS$  и  $SS$  моделей КЛВ. В  $SS$  случае обнаружен эффект вычислительной остановки сферитона при малых  $\tau$ .

В § 5 главы I изучается динамика формирования и взаимодействия геликонных ( $w$ ) солитонов на основе системы

$$i \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + Vh = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 |h|^2}{\partial x^2} \quad (7)$$

$w$ -солитоны являются сверхзвуковыми,  $M > 1$ , и переносят положительное возмущение плотности  $V = |h|^2 (M^2 - 1)^{-1}$ . Для них вычислены значения инвариантов  $S_1$  и  $S_2$  системы (7) и найдено соотношение  $S_2 = S_2(S_1, M)$ . Показано, что в области применимости системы (7) энергия  $w$ -солитона  $S_2$  положительна. Н.ч.  $S$ -волны играют важную роль в процессах формирования и взаимодействия в.ч.  $w$ -солитонов, однако теперь, в отличие от результатов § 3,  $S$ -волны отстают от сверхзвуко-

вых  $w$ -солитонов. При их встречных столкновениях между собой, которые оказываются неупругими, часть энергии передаётся  $S$ -волнам, что приводит к уменьшению скорости  $M$   $w$ -солитонов; многократное торможение при парных столкновениях может перевести эти солитоны в область сильного затухания,  $\omega \approx \omega_{ni}$ . Отмечается возможность слипания  $w$ -солитонов при малой относительной скорости  $\Delta M$ .

Решения систем (2), (7) в виде  $l$  и  $w$ -солитонов являются неудовлетворительными при  $M \rightarrow 1$ , так как при этом  $|V| \rightarrow \infty$ , и становится неприменимым линейное описание н.ч. возмущений.

Во второй главе изучается динамика солитонов, для которых существенны нелинейность и дисперсия н.ч. волн. К ним относятся н.ч. солитоны (например, ионно-звуковые) и высокочастотные, скорость которых близка к скорости линейных н.ч.  $S$ -волн,  $M \rightarrow 1$ , (околозвуковые ленгмювские ( $ls$ ) и геликонные ( $ws$ ) солитоны).

В § I этой главы отмечается, что уравнение Буссинеса /17/ (уравнение нелинейной струны), полученное для описания различных нелинейных волн в длинноволновом пределе ( $\kappa \ll 1$ ) и тесно связанное с проблемой ФПУ,

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx} \quad (8)$$

описывает развитие нефизической неустойчивости, что объясняется неправильным описанием коротких ( $\kappa \gg 1$ ) волн, для которых из (8) при  $u \rightarrow 0$  следует  $\omega^2 = \kappa^2(1 - \kappa^2)$ . Предлагается корректный аналог (8) - модифицированное уравнение Буссинеса

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^p)_{xx} + u_{xxtt}, \quad p=2 \quad (9)$$

которое может быть получено при  $u \rightarrow 0$  линеаризацией гидродинамической системы для  $S$ -волн и является удобным для исследо-

вания на ЭВМ динамики нелинейных волн со слабой дисперсией. Получено приближённое уравнение для гидродинамической скорости н.ч.  $S$ -волн, имеющее в плоском одномерном случае вид:

$$v_{tt} = v_{xx} - (v^2)_{tx} + v_{xxtt} \quad (10)$$

Найдены решения уравнений (9) при  $p=2,3$  и (10) в виде солитонов, образующих однопараметрические семейства. Приводятся выражения для интегралов движения рассмотренных уравнений.

В § 2 главы 2 построены неявные девятиточечные разностные схемы для решения на ЭВМ уравнений (9) при  $p=2,3$  и (10), которые оказываются удобными для численных расчётов. Показано, что уравнение Буссинеса можно решать на ЭВМ, только используя разностную сетку с шагом по оси  $x$   $h > 2$ , исключая таким способом короткие ( $\kappa \geq 1$ ) волны из рассмотрения.

В § 3 этой главы рассматривается динамика н.ч. солитонов. Уравнение (9), в отличие от уравнения Кортевега-де Вриза, позволяет проследить процесс образования солитонов, движущихся в произвольную сторону оси  $x$ . В проведённых экспериментах из любого начального возмущения, для которого  $\int u dx > 0$ , формируется по меньшей мере один солитон, число образующихся солитонов увеличивается с увеличением при фиксированной амплитуде ширины начального возмущения.

Уравнение (8) имеет  $N$ -солитонные решения /18/, которые означают, что взаимодействие солитонов упруго и указывают, вместе с наличием счётного множества интегралов движения, на то, что уравнение (8) описывает вполне интегрируемую гамильтонову систему /19/. Характер взаимодействия солитонов принципиально меняется - оно становится неупругим - при переходе к уравнению (9). Коэффициент неупругости  $K_{in}$ , определённый как отноше-

ние амплитуды несолитонных возмущений, рождённых при столкновении солитонов к их амплитуде  $A$ , стремится к нулю, когда  $A \rightarrow 0$ , и монотонно растёт с увеличением  $A$ , достигая величины  $K_{in} \approx 0.1$  при  $A=2$ . Взаимодействие солитонов в рамках уравнений (10) и (9) при  $\rho=3$  также оказывается неупругим. Таким образом, перечисленные уравнения, в отличие от (8), моделируют стохастизуемые системы, в которых возможно перераспределение энергии между степенями свободы.

В § 4 главы 2 с помощью ЭВМ исследуется динамика двугорбых  $ls$ -солитонов. Для этой цели используется моделирование н.ч. движений плазмы на основе: а) точной гидродинамической системы для  $s$ -волн с уравнением Пуассона в виде:

$$\frac{\varepsilon}{3} \varphi_{xx} = \exp(\varphi - \varepsilon |E|^2) - n_i, \quad \varepsilon = \frac{4}{3} \frac{m_e}{m_i} \ll 1, \quad (II)$$

$n_i$  - плотность ионов; б) неоднородного модифицированного уравнения Буссинеса:

$$V_{tt} - V_{xx} - \varepsilon (V^2)_{xx} - \frac{\varepsilon}{3} V_{xxtt} = |E|^2_{xx}. \quad (I2)$$

В.ч. поле  $E(x, t)$ , как и в главе I, описывается первым уравнением (2).

Показана устойчивость  $ls$ -солитонов в одномерном приближении. Рассмотрены их встречные столкновения между собой, а также с  $s$ -солитонами и нелинейными  $s$ -волнами разрежения. Обнаружено, что при этих существенно неупругих взаимодействиях происходит ускорение заметной части  $l$ -плазмонов до сверхзвуковых скоростей. Оказалось, что неупругость взаимодействия  $ls$ -солитонов с  $s$ -солитонами значительно превышает неупругость их столкновений с  $s$ -волнами разрежения (при взаимодействии линейных  $s$ -волн с  $l$ -солитонами положение обратное [15]).

В § 5 этой главы получено аналитически однопараметрическое семейство околосвуковых ( $M=1+\Delta$ ,  $0 < \Delta \ll 1$ ) геликонных  $ws$ -солитонов:

$$\begin{aligned} h &= B \cdot \text{th } bx \cdot \text{sech } bx \cdot \exp(i \frac{M}{2} z - i \Omega t), \\ V &= A \cdot \text{sech}^2 bx, \quad x = z - Mt, \quad b = \sqrt{-\lambda}, \quad \lambda = -\frac{A}{6}, \\ A &= \frac{3(1-M^2)}{(\beta-3\sigma)}, \quad B = A \sqrt{\sigma-\beta}, \quad \Omega = \frac{M^2}{4} + \lambda, \\ \sigma &= \frac{\omega_{pe}^4 v_s^2}{\omega_{he}^2 K_0^2 c^4}, \quad \beta = \frac{M^2 \omega_{pe}^4 v_s^2 d_e^2}{\omega_{he}^2 c^4}, \quad \sigma > \beta. \end{aligned} \quad (I3)$$

$ws$ -солитоны (I3) являются сверхзвуковыми аналогами дозвуковых  $ls$ -солитонов, но переносимое ими возмущение плотности  $V$  имеет вид "горба" вместо "ямы" в  $ls$ -солитонах.

В третьей главе в одномерной модели изучаются продольные движения в сгустках релятивистских электронов при их торможении в плотной плазме вследствие диссипации возникающего в ней обратного тока [20]. Учёт конечной проводимости плазмы  $\sigma$  приводит к появлению поля  $E = n e c \sigma^{-1}$ , тормозящего электроны сгустка. Принимается, что  $n/n_0 \ll 1$  ( $n, n_0$  - концентрация электронов пучка и плазмы),  $v_e = c$ ,  $\sigma = \sigma_{ei} = \sigma_0 (T/T_0)^{3/2}$ ,  $T$  - температура плазмы.

В § 1 главы 3 используется приближение "холодной" гидродинамики и выясняются условия его применимости к данной задаче. Уравнения движения и непрерывности, записанные в собственной системе координат сгустка, преобразуются к лагранжовой координате  $Z = \int_0^x n dx$ ,  $Z_{max} = \int_0^L n dx = N$ , где  $N$  - полное число электронов сгустка длины  $L = c\tau$  на единицу площади. В безразмерных переменных уравнения принимают вид: ( $v$  - скорость электронов):

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n^2 \frac{\partial v}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -A n (1 + B \int_0^1 n dz)^{-3/2}. \quad (I4)$$



В общем случае картина течения определяется значениями параметров  $A = \frac{e^2 N}{m_e \epsilon_0 c}$ ,  $B = \frac{5}{2} \frac{e^2 N}{\epsilon_0 n_0 T_0 c}$ , формой сгустка  $n(x)$  и тепловым разбросом в момент инжекции. В случае  $B=0$  найдены точные решения в разделяющихся переменных,  $v = V(z) \cdot v(t)$ ,  $n = N(z) \cdot \eta(t)$ , в виде деформирующихся треугольников. Показано, что в тех местах сгустка, где при  $t=0$  резко уменьшается  $dn/dx$ , существует тенденция к понижению плотности  $n$ . Отмечается также возможность разделения переменных в (I4) при  $B \gg 1$ .

В § 2 третьей главы использован имеющий большую общность метод укрупнённых частиц /I/, позволяющий рассматривать сгустки, в которых происходит пересечение траекторий электронов. Область, занимаемая сгустком, делилась на  $m = 100$  отрезков, по которым в начальный момент распределялись  $K \gg m$  частиц с переменным "зарядом"  $q_i(x)$ . Для каждой частицы решалось уравнение движения; плотность  $n(x)$  вычислялась суммированием по отрезку разбиения. Вычислительный алгоритм был проверен на точных решениях § I.

Численные эксперименты при  $A = 0.01$ ,  $B = 1; 10$  подтвердили, что прогрев плазмы сгустком ( $B \neq 0$ ) приводит к ослаблению торможения "задних" электронов по сравнению с "передними" и делает возможным пересечение траекторий электронов тех сгустков, в которых оно не возникало при  $B = 0$ . На примере сгустков "гауссовской" формы,  $n(x, 0) \sim \exp[-(x-x_0)^2/2d^2]$  показано, что даже при  $B = 0$  возникает пересечение электронных траекторий, если в начальный момент существуют участки сгустка, где  $\frac{d^2 n}{dx^2} > 0$ . Исследована также динамика сгустка в виде равно-стороннего треугольника с тепловым разбросом.

Сформулируем основные результаты, полученные в настоящей работе:

1. Показано, что в квазистатическом приближении, т.е. при использовании уравнения Шредингера с кубической нелинейностью (4), невозможно формирование в.ч. солитонов. В динамической модели из различных начальных пакетов, как сверхзвуковых, так и дозвуковых, формируются дозвуковые в.ч. солитоны; важную роль переносчиков избыточной энергии и импульса играют генерируемые при этом н.ч. ионно-звуковые волны.

2. Приведены примеры неупругого взаимодействия солитонов, как высокочастотных, так и низкочастотных.

Показано, что в широкой области параметров происходит слипание высокочастотных солитонов в динамической модели, тогда как вполне интегрируемое уравнение Шредингера с кубической нелинейностью (4), возникающее в квазистатическом приближении, порождает упругое взаимодействие солитонов.

Найдено, что в рамках предложенного в данной работе корректного аналога уравнения Буссинеса (нелинейной струны) и некоторых близких уравнений взаимодействие н.ч. солитонов является тем более неупругим, чем выше амплитуда сталкивающихся солитонов, в то время как уравнение Буссинеса описывает гамильтонову систему со счётным набором независимых интегралов движения и определяет упругое взаимодействие солитонов.

3. При последовательном описании околосвуковых ленгмюровских солитонов обнаружен эффект ускорения  $l$ -плазмонов до сверхзвуковых скоростей при взаимодействии этих солитонов между собой и с  $S$ -волнами.

Аналитически получены новые решения - сверхзвуковые двугорбые геликонные солитоны.

4. Показано, что прогрев плотной плазмы пучком релятивистских электронов и некоторые реализуемые в экспериментах законы нарастания тока пучка могут приводить к появлению многоскоростных течений электронов. Для сгустков треугольной формы получены автомоделльные решения.

Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в работах /13,14,21-25/ и докладывались на Международном совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (г.Дубна, 1973 г.), на I Всесоюзной школе по физике плазмы (Москва, 1974 г.), на II Международной конференции по теории плазмы (г.Киев, 1974 г.), на VI конференции по физике элементарных частиц, атомного ядра и конденсированного состояния (Ленинград, 1975 г.) и на семинарах в ОИЯИ, ИАЭ и ФИАН.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Вычислительные методы в физике плазмы, т.1, "Мир", М., 1974.
2. Б.Б.Кадоццев. Вопросы теории плазмы, т.4, стр.188, Атомиздат, М., 1964.
3. Р.З.Сагдеев. Вопросы теории плазмы, т.4, стр.20, Атомиздат, М., 1964.
4. В.Н.Цытович. Нелинейные эффекты в плазме, "Наука", М., 1967.
5. А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев. Вопросы теории плазмы, т.7, стр.3, Атомиздат, М., 1973.
6. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 62, 1745, 1972.
7. A.C.Scott, F.Y.F.Chu, D.W.McLaughlin. Proc. IEEE, 61, 1443, 1973.

8. Э.Ферми. Научные труды, т.II, стр.647, "Наука", М., 1972.
9. В.Н.Луговой, А.М.Прохоров. УФН, III, 203, 1973.
10. А.А.Самарский. Введение в теорию разностных схем, "Наука", М., 1971.
11. Л.И.Рудаков. ДАН СССР, 127, 321, 1972.
12. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. ЖЭТФ, 61, 118, 1971; ЖЭТФ, 64, 1627, 1973.
13. Kh.O.Abdulloev, I.L.Bogolubsky, V.G.Makhankov. Nucl. Fusion, 15, 21, 1975.
14. V.G.Makhankov, I.L.Bogolubsky, Kh.O.Abdulloev. Preprint JINR E9-8225, Dubna, 1974.
15. Л.М.Дегтярев, В.Г.Маханьков, Л.И.Рудаков. ЖЭТФ, 67, 533, 1974.
16. Л.М.Дегтярев, В.Е.Захаров, Л.И.Рудаков. ЖЭТФ, 68, 115, 1975.
17. J.Boussinesq. J.Math. Pures Appl., ser. 2, 17, 55, 1872.
18. R.Hirota. J. Math. Phys., 14, 810, 1973.
19. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 65, 219, 1973.
20. А.А.Иванов, Л.И.Рудаков. ЖЭТФ, 59, 2091, 1970.
21. X.O.Абдуллоев, И.Л.Боголюбский, В.Г.Маханьков. Издание ОИЯИ, Д10-7707, Дубна, 1974.
22. I.L.Bogolubsky, V.G.Makhankov. Preprint E9-8315, Dubna, 1974.
23. И.Л.Боголюбский, В.Г.Маханьков. Препринт ОИЯИ, P9-7988, Дубна, 1974.
24. И.Л.Боголюбский. Препринт ОИЯИ, P9-7970, Дубна, 1974.
25. И.Л.Боголюбский. Препринт ОИЯИ, P9-8698, Дубна, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел

19 января 1976 года