ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 517.913, 517.925
531.011, 531.551

4-87-600

ФИЗИЕВ
Пламен Петков

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ЧАСТИЦ

Специальность 01.04.02 - теоретическая
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 1987

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор Б.М.БАРБАШОВ

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
В.Б.БЕЛЯЕВ

доктор физико-математических наук
профессор Н.А.ПЕРЕСТЮК

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Институт физики высоких энергий, Протвино

Автореферат разослан "___"______________1987 года

Защита диссертации состоится "___"___________1987 года на заседании Специализированного совета К047.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук А.Е.ДОРОХОВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Классическая задача трех частиц давно признана "самой знаменитой проблемой динамики". Несмотря на большие достижения в прошлом в проблеме трех тел остаются открытыми ряд существенных вопросов, в частности, нет доказательства неинтегрируемости задачи в общем случае произвольных масс. В последнее время проблема интегрируемости динамических систем развивается быстро благодаря применению вычислительной техники и созданию ряда новых подходов. Однако до сих пор не удалось применить ни одного из них к задаче трех частиц с ньютоновским или кулоновским взаимодействием, которые играют исключительно важную роль в физических применениях.

В прошлом усилия были направлены на решение гравитационной задачи трех частиц, причем исследовались решения, допускающие астрономические применения. Это привело к несколько одностороннему изучению ряда проблем, в частности, к практически полному пренебрежению к целым классам решений, таких,как коллинеарное движение по неподвижной прямой, не имеющее места в астрономии. Недостаточно изучалась также кулоновская задача трех частиц, так как считалось, что интерес представляет только ее квантовый вариант. Развитие квантовой механики, в частности ее формулировки в терминах интегралов по путям,в последнее время возродило интерес к классическим решениям задач. Для построения интеграла по путям и квазиклассического приближения необходимо знать классические траектории в вещественной и в комплексной области значений переменных. Принципиальные проблемы, возникающие при этом в неинтегрируемых задачах все еще ждут своего изучения. Для продвижения на этом пути необходима физически содержательная и достаточно полно изученная задача. Можно надеяться, что задача трех частиц сыграет свою роль для выяснения этих проблем как пример из физики фундаментальных взаимодействий.

Другая физическая сторона вопроса связана с тем, что квантовое описание необходимо и возможно только для достаточно низких энергетических состояний атомов и молекул. В серии работ последних лет показано, что процессы с высоко возбужденными состояниями описываются хорошо классической механикой, например в случае ридберговских состояний атомов. Физическая причина состоит в том, что атомы с одним электроном на высокой орбите (например,H(110)) имеют большой размер и ведут себя как классический объект по отношению к налетающей частице. Задачу рассеяния электрона на таком атоме нельзя решить в квантовом варианте на ЭВМ из-за нехватки памяти. Это и не нужно делать, поскольку в таких условиях основной вклад дают области, совпадающие с небольшой окрестностью классической траектории. Тогда классический расчет есть единственный способ решения таких задач. Множество полученных с помощью классических расчетов результатов хорошо согласуются с экспериментальными данными. При этом из-за сложности и недостаточной изученности самой классической задачи расчеты проводились в рамках упрощенных моделей.

Следует также отметить цикл работ последних лет по квантовой химии, в которых множество экспериментальных данных с достаточной точностью объясняется рассмотрением только коллинеарных трехчастичных задач с феноменологическими потенциалами разного вида.

Коллинеарное движение реализуется также на ускорителях ионов и элементарных частиц. Поэтому исследование классической задачи трех частиц с разными взаимодействиями представляется актуальным.

Цель работы состоит в исследовании интегрируемости классических задач трех частиц с разными потенциалами взаимодействий, основанное на новом подходе - при помощи изучения коллинеарного движения этой системы.

Научная новизна и практическая ценность работы. С помощью предложенного в диссертации нового варианта гиперсферических координат обнаружены новые стороны проблемы интегрируемости задач трех частиц с разными взаимодействиями. В рамках нового подхода удалось продвинуться дальше в доказательстве неинтегрируемости ньютоновской задачи трех частиц. Ключом к этой проблеме оказалось изучение задач трех частиц на неподвижной прямой, которые практически игнорировались в прошлом. Их детальное изучение позволило получить ряд новых математических и физических результатов. В частности, удалось ввести понятие "примитивность движения", обобщающее понятие полной интегрируемости по Лиувиллю, и с его помощью изучить структуру фазового потока указанных задач.

Сравнение трехчастичных задач, полностью интегрируемых по Лиувиллю, с неинтегрируемыми задачами, в которых все дополнительные первые интегралы являются бесконечнозначными функциями, показывает, что последний случай гораздо интереснее с физической точки зрения. В нем возможно образование трехчастичных связанных резонансных состояний с конечным временем жизни, реакции с обменом и без обмена частицей и т.д. Эти наблюдаемые в химических реакциях и в реакциях между элементарными частицами процессы невозможны в задачах, вполне интегрируемых по Лиувиллю. Обнаруженный факт показывает необходимость детального изучения неинтегрируемых по Лиувиллю задач, которые гораздо сложнее и интереснее в математическом и в физическом плане.

Для защиты выдвигаются следующие основные результаты, полученные в диссертации.

I. Предложена модификация гиперсферических координат, позволяющая непрерывное простое описание классического движения трехчастичной системы. В новых координатах получены гамильтонианы для всех возможных случаев движений.

2. Обоснован выбор формулы $\mu = \sqrt{m_1 m_2 m_3 / (m_1 + m_2 + m_3)}$ для приведенной трехчастичной массы. С ее помощью введены геометрические конструкции, упрощающие изучение движения трехчастичной системы.

3. Проведена полная редукция коллинеарных трехчастичных задач с однородными потенциалами и получено новое уравнение для траектории задачи. С помощью этого уравнения дана классификация решений относительно возможности понижения его порядка. Показано, что имеются три различных случая движений, в зависимости от значения полной энергии системы $\mathcal{E}$: $|\mathcal{E}| = 0$, $|\mathcal{E}| = 1$ и $|\mathcal{E}| = \infty$.

4. Для коллинеарных задач введено аналитическое продолжение потенциала, позволяющее получить аналитическую систему уравнений первого порядка для траекторий на изоэнергетической поверхности

$$M^{(3)}(\mathcal{E}) = \mathbb{T}^{(2)}_{\chi\varphi} \times \mathbb{R}^{(1)+}_{\rho}.$$

Это позволяет рассматривать задачи с ньютоновским и с кулоновским взаимодействием единым образом и показывает, что для изучения аналитических свойств решений каждой из этих физически разных задач следует учитывать особенности в комплексной области значений переменных, отвечающие другой задаче.

5. Установлено, что в случаях бесконечной и нулевой энергии имеется "скрытая" симметрия фазового потока на изоэнергетической поверхности, которая не отмечалась до сих пор. Она приводит к возможности: I) понижать порядок дифференциального уравнения траектории до первого и свести его к уравнению на торе $\mathbb{T}^{(2)}_{\chi\varphi}$, на котором можно спроектировать траектории без пересечения проекций; 2) разделять необычным образом переменные в уравнении Гамильтона-Якоби, представляя классическое действие в факторизованном виде $W(\rho,\varphi) = \rho^{\omega} f(\varphi)$; 3) показать существование не зависящего от гиперрадиуса ρ дополнительного первого интеграла $I^{(1)}_{\omega,0}(\chi,\varphi)$; 4) получить решение в квадратурах.

На основании этих результатов вводится понятие "примитивность движения", обобщающее полную интегрируемость по Лиувиллю, и соответствующие ему понятия "спектр и множество примитивности фазового потока".

6. Изучены свойства интеграла $I^{(1)}_{\omega,0}(\chi,\varphi)$, который играет основную роль в исследовании интегрируемости всей задачи. Для него построены: а) сходящийся в некоторой области ряд теории возмущений но-

вого вида, в которой параметр разложения $\omega = 1 + n/2$ связан с отклонением степени однородности потенциала n от значения $n_o = -2$; б) сходящийся в некоторой области ряд Фурье.

Показано, что интеграл $I^{(1)}_{\omega,o}(\chi,\varphi)$ гравитационной задачи является бесконечнозначной функцией при почти всех значениях масс $m_{1,2,3}$, за исключением, быть может, множества меры ноль.

7. Изучены все особенности коллинеарных решений с $\mathcal{E}=0$ в комплексной области и установлено, что они не обладают свойством Пенлеве. Построен фазовый портрет систем с $\omega=0$ и с $\omega=1/2$ на торе $\mathbb{T}^{(2)}_{\chi\varphi}$, где имеется 24 гиперболические особые точки.

Новым способом показано, что траектории можно продолжать аналитически через точки парных столкновений. Численно изучено глобальное поведение траекторий. Установлено, что в гравитационной и в электрической задачах возникают трехчастичные резонансные состояния с конечным временем жизни, которые распадаются двумя разными способами - с обменом и без обмена частицей. Показано, что это невозможно в полностью интегрируемых по Лиувиллю задачах с $\omega=0$. Построено отображение последования для проекций траекторий на $\mathbb{T}^{(2)}_{\chi\varphi}$.

8. С помощью компонент введенного множества примитивности фазового потока задачи построены разные представления полного набора локальных первых интегралов в коллинеарных задачах с произвольной энергией $\mathcal{E}$. Изучены их локальные особенности и фазовый портрет в окрестности вещественных особых точек: тройные соударения, парные соударения и точки поворота.

9. Показано, что в коллинеарных задачах, как и в общей пространственной задаче трех частиц с однородными потенциалами, все дополнительные первые интегралы являются бесконечнозначными функциями вместе с $I^{(1)}_{\omega,o}(\chi,\varphi)$. Таким способом доказана неинтегрируемость гравитационной задачи при почти всех значениях отношений масс.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались на секторных и отдельских семинарах Лаборатории теоретической физики ОИЯИ и на семинаре кафедры теоретической физики физического факультета Софийского университета, а также на Международном совещании по теории малочастичных и кварк-адронных систем (Дубна, 1987 г). Они обсуждались также на кафедрах дифференциальных уравнений МГУ и КГУ.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 7 работ.

Объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Она содержит 184 страницы машинописного текста и 33 рисунка, расположенных внутри текста. Библиографический список включает 71 ссылку.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение состоит из двух частей. В первой дается обзор современного статуса классической задачи трех тел-частиц, основных результатов прошлого и оставшихся открытыми проблем, связанных с интегрируемостью. Во второй части дан обзор общей проблемы интегрируемости динамических систем и разных имеющихся подходов к ее решению. Приведены также формулировки ряда классических теорем в обозначениях, применяемых в основном тексте диссертации.

В первой главе рассмотрен новый вариант гиперсферических координат, основанный на модификации гиперсферических координат Дельвеса. При описании движения системы в этом варианте последовательно выделяется "третья" частица. Преимущество выбранных нами гиперсферических координат состоит в непрерывном описании всех конфигураций системы. Кроме того, точка, изображающая систему трех свободных частиц, движется в конфигурационном пространстве, остающемся после исключения движения центра масс системы по законам свободного движения одной частицы.

В первой главе после классической редукции задачи с помощью законов сохранения полного импульса и полного момента получены выражения для кинетической энергии системы в выбранных координатах. В случае отличного от нуля полного момента $K \neq 0$:

$$(1)\quad T=\frac{1}{2\mu}\left\{P_\rho^2+\frac{P_\varphi^2}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^2 S^2}\left(P_\vartheta^2+\frac{P_\psi^2}{\sin^2\vartheta}\right)+\frac{1}{\rho^2 C^2}\left[\left(\cos\psi\sqrt{K^2-P_\psi^2}-P_\vartheta\right)^2+\left(\sin\psi\sqrt{K^2-P_\psi^2}+\mathrm{ctg}\,\vartheta\, P_\psi\right)^2\right]\right\}$$

- для случая общего пространственного движения;

$$(2)\quad T=\frac{1}{2\mu}\left\{P_\rho^2+\frac{P_\varphi^2}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{P_\vartheta^2}{S^2}+\frac{(K-P_\vartheta)^2}{C^2}\right]\right\}$$

- для плоского движения;

$$(3)\quad T=\frac{1}{2\mu}P_\rho^2+\frac{K^2}{2\mu\rho^2}$$

- для коллинеарного движения с $K\neq 0$, когда остается одна степень свободы.

В случаях с $K\equiv 0$ имеем

$$(4)\quad T=\frac{1}{2\mu}\left(P_\rho^2+\frac{P_\varphi^2}{\rho^2}+\frac{P_\vartheta^2}{\rho^2 S^2 C^2}\right)$$

- для плоского движения;

$$(5) \qquad T = \frac{1}{2\mu}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right)$$

– для коллинеарного движения по неподвижной прямой.

В этих формулах $s = \sin\varphi$, $c = \cos\varphi$, а μ есть приведенная масса трехчастичной системы, для которой в диссертации из разных физических и формальных соображений обоснована формула

$$(6) \qquad \mu = \sqrt{m_1 m_2 m_3 / (m_1 + m_2 + m_3)}\,.$$

В диссертации рассматриваются трехчастичные системы, потенциалы которых $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ удовлетворяют кроме естественных физических требований трансляционной инвариантности и инвариантности относительно вращений в трехмерном координатном пространстве, также и требованию однородности $V(s\vec{r}_1, s\vec{r}_2, s\vec{r}_3) = s^n V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$. В гиперсферических координатах эти потенциалы имеют вид

$$(7) \qquad V = g\,\rho^n\,\alpha(\varphi, \vartheta)\,,$$

где $g = const$, ρ есть гиперрадиус, ϑ – угол Якоби, φ – модифицированный угол Дельвеса. Приводится сравнение нашего варианта гиперсферических координат с другими, известными из литературы.

В конце главы рассмотрена задача трех частиц на неподвижной прямой ($\vartheta \equiv 0$). Простота коллинеарного движения позволяет легко изучить геометрическое описание конфигураций, а также кривые нулевых скоростей Хилла-Болина, либрационные направления и особые решения динамических уравнений в выбранных нами координатах, основное преимущество которых связано с возможностью независимого раздельного описания тройного и парных столкновений в системе трех частиц.

Во <u>второй главе</u> рассмотрена задача трех частиц на неподвижной прямой. Получены динамические уравнения и их особые решения. Проведена редукция задачи и получено новое нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для траектории на изоэнергетической поверхности $M^{(3)}(\mathcal{E} = const)$:

$$(8) \qquad (\zeta'/\zeta)' - (1 + \zeta'^2/\zeta^2)[\omega - (\alpha'/2\alpha)(\zeta'/\zeta) - \mathcal{E}/\alpha\zeta^{2\omega-2}](1 - \mathcal{E}/\alpha\zeta^{2\omega-2})^{-1} = 0\,,$$

где $\zeta = \rho/R$ – безразмерный гиперрадиус: $\zeta = \zeta(\varphi)$, штрихом обозначено дифференцирование по φ, $\alpha = \alpha(\varphi)$ есть функция из (7), $\mathcal{E} = E/R^n g$ – безразмерная полная энергия системы, а $\omega = 1 + n/2$.

Дана классификация траекторий, основанная на их свойствах при масштабных преобразованиях и на возможности понижать до первого порядок уравнения (8).

После аналитического продолжения потенциала на соответствующей поверхности Римана и введения новых координат: $\mathcal{E}$ и $\chi = arctg(\rho p_\rho / p_\varphi)$

в импульсной части фазового пространства системы, получена аналитическая система дифференциальных уравнений первого порядка для траектории на $M^{(3)}(\mathcal{E}) = \mathbb{T}^{(2)}_{\chi\varphi} \times \mathbb{R}^{(1)}_\eta$:

$$(9) \qquad \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\chi\\ \varphi\\ \eta\end{pmatrix} = \vec{X}_{\omega,\mathcal{E}}\begin{pmatrix}\chi\\ \varphi\\ \eta\end{pmatrix},$$

где в предположении мероморфности функции $\alpha(\varphi) = a(\varphi)/b(\varphi)$ $\vec{X}_{\omega,\mathcal{E}}$ есть аналитическое векторное поле на $\mathbb{C}^{(3)}_{\chi\varphi\eta}$ ($\eta = \ln\zeta$) :

$$(10) \qquad \vec{X}_{\omega,\mathcal{E}} = \varkappa_+(\mathcal{E})\vec{X}_\omega - \varkappa_-(\mathcal{E})\vec{Y}\,,$$

$\varkappa_+(\mathcal{E}) = [1 + \mathcal{E}\exp(n\eta)]/(1 + \mathcal{E}^2)$, $\varkappa_-(\mathcal{E}) = [1 + \mathcal{E}^{-1}\exp(-n\eta)]/(1 + \mathcal{E}^{-2})$, а

$$(11) \qquad \vec{X}_\omega = 2ab[\cos\chi(\partial_\chi + \partial_\varphi) + \sin\chi\,\partial_\eta] + [nab\cos\chi - (a'b - ab')\sin\chi]\,\partial_\chi\,,$$

$$(12) \qquad \vec{Y} = 2b^2[\cos\chi(\partial_\chi + \partial_\varphi) + \sin\chi\,\partial_\eta]\,.$$

Вместо времени t на траектории введен регуляризующий параметр τ:

$$d\tau = (1 + \mathcal{E}^2)\{2b\cos\chi[a - \mathcal{E}b\exp(-n\eta)][1 + \mathcal{E}\exp(n\eta)]\zeta^{-1}\dot{\varphi}\,dt\,.$$

В этой главе рассмотрен случай с $|\mathcal{E}| = \infty$, когда можно считать, что система состоит из трех свободных частиц. Показано, что тогда движение обладает свойствами движения полностью интегрируемых по Лиувиллю систем. В частности, задача сводится к решению тривиального уравнения первого порядка, а в уравнении Гамильтона-Якоби разными способами разделяются переменные. В гиперсферических координатах построен полный набор дополнительных глобальных первых интегралов на $M^{(3)}(\mathcal{E}_\infty)$. Изучена "скрытая" симметрия, связанная с векторным полем, коммутирующим с $\vec{X}_{\omega,\mathcal{E}_\infty}$:

$$(13) \qquad \vec{N} = \rho\frac{\partial}{\partial\rho} = \partial_\eta\,,$$

и геометрия фазового потока на $M^{(3)}(\mathcal{E}_\infty)$, которого можно спроектировать на тор $\mathbb{T}^{(2)}_{\chi\varphi}$ без пересечений проекций траекторий.

Изученные решения играют важную роль в дальнейшем. На них кончается список решений задачи трех частиц на неподвижной прямой, которые выражаются в элементарных функциях.

В <u>третьей главе</u> изучается коллинеарное движение с нулевой полной энергией, что связано с изучением свойств новых классов функций, заданных уравнением (8), или эквивалентной ему системой (9). Случай $|\mathcal{E}| = 0$ играет выделенную роль в задачах трех частиц и обладает рядом свойств, схожих со свойствами движения с $|\mathcal{E}| = \infty$.

В начале главы рассмотрены общие свойства коллинеарных задач с однородными потенциалами при $\varepsilon=0$. Производится понижение порядка уравнения (8) до первого, в результате чего получено уравнение Абеля для функции $\vartheta = \varsigma'/\varsigma$:

$$2\vartheta' - (1+\vartheta^2)[\omega - (1/2)\mathcal{L}(\varphi)\vartheta] = 0, \tag{I4}$$

где $\mathcal{L}(\varphi) = a'/a - b'/b$.

Показано, что на $M^{(3)}(\varepsilon=0)$ имеется дополнительный первый интеграл $\Phi(\varsigma p_\varsigma p_\varphi^{-1}, \varphi)$, и происходит необычное разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби, связанное с факторизацией действия в виде

$$W(\varsigma,\varphi) = \varsigma^{\omega} f(\varphi). \tag{I5}$$

При подходящей нормировке для функции $f(\varphi)$ имеем уравнение

$$f'^2 + \omega^2 f^2 = \mp \alpha(\varphi), \tag{I6}$$

которое эквивалентно уравнению (I4).

Третья эквивалентная форма этого уравнения

$$\chi' = \omega - (1/2)\mathcal{L}(\varphi)\, \mathrm{tg}\, \chi \tag{I7}$$

получается переходом к переменной $\chi = \mathrm{arctg}\, \vartheta$ и является уравнение первого порядка на торе $\mathbb{T}^{(2)}_{\chi\varphi}$. Его существование отражает снова скрытую симметрию фазового потока, которая связана с полем (I3), и позволяет спроектировать на $\mathbb{T}^{(2)}_{\chi\varphi}$ траектории из $M^{(3)}(\varepsilon=0)$ без пересечения их проекций.

Другое выражение этой симметрии есть отщепление уравнения для $\gamma(\tau)$ от системы (9), в результате чего она имеет не зависящий от γ первый интеграл $I^{(1)}_{\omega,0}(\chi,\varphi)$. Он построен двумя способами: а) по теории возмущений с новым параметром разложения $\omega = 1 + n/2$, характеризующим отклонение степени однородности потенциала n от значения $n_0 = -2$; б) в виде ряда Фурье. Изучены области сходимости полученных рядов.

Изучены свойства функций, которые задают траектории ньютоновской задачи, и их связь с траекториями кулоновских задач. В явном виде построены регуляризующие параметры траекторий. Переходом к переменной $u = \exp(2i\varphi)$ получен канонический вид дифференциального уравнения траектории

$$\frac{d\vartheta}{du} = (1+\vartheta^2)[Q_5(u) - i\vartheta P_5(u)]/4iu\,Q_5(u), \tag{I8}$$

где $P_5(u)$ и $Q_5(u)$ есть известные полиномы пятой степени. С его помощью изучены все особенности решений в комплексной области значений переменных, где имеется (с учетом их кратности) 26 неподвижных особых точек и подвижные критические полюса. Таким образом, решения не обладают свойством Пенлеве. Рассмотрены также особенности проекций траекторий на $\mathbb{T}^{(2)}_{\chi\varphi}$, где имеется I2 узлов и I2 седловых особых точек. Построен фазовый портрет для систем с ω =0 и ω =I/2 при $\alpha(\varphi)$ из ньютоновской задачи.

Показано, что дополнительные интегралы на $M^{(3)}(\varepsilon=0)$ ньютоновской задачи являются бесконечнозначными функциями по меньшей мере при почти всех значениях отношений масс.

Установлено, что решения имеют критическую существенно особую точку в нуле по каждой из масс $m_{1,2,3}$ и разлагаются в бесконечный ряд по целым степеням величин $m_i^{-1/2}$. Таким образом определен вид этой особенности, которая в соответствии с результатами Пуанкаре, Черри и др. приводит к сингулярной теории возмущений по малой массе.

Обсуждается аналитическое продолжение траекторий через точки парных соударений. С его помощью исследовано глобальное поведение траекторий для задач с ω =0 и с ω =I/2.

Численно изучено приращение интеграла $I^{(1)}_{1/2,0}(\chi,\varphi)$ при обходе циклов на $\mathbb{T}^{(2)}_{\chi\varphi}$. Как результат многозначности этого интеграла при $\varepsilon=0$ возникает трехчастичное резонансное состояние с конечным временем жизни. Дана классификация траекторий, описывающих реакции с обменом или без обмена частицей. Показано, что во вполне интегрируемом по Лиувиллю случае с $\omega=0$ такие явления невозможны.

Построено отображение последования Пуанкаре при $\varepsilon=0$.

Обнаружено, что при обходе циклов на $\mathbb{T}^{(2)}_{\chi\varphi}$ приращение функции $f(\varphi)$, которая входит как множитель в классическое действие W, не имеет эквидистантный характер в области трехчастичного резонанса.

В четвертой главе дан анализ полученных результатов по интегрируемости коллинеарных задач трех частиц, полученных в двух предыдущих главах. На основании этого вводится понятие "примитивность движения", связанное с возможностью глобально понизить до первого порядок уравнения траектории независимо от аналитических свойств дополнительных первых интегралов. Вводятся также: "спектр примитивности" - множество значений глобальных первых интегралов, определяющих поверхности уровня, на которых такое понижение порядка возможно, и "множество примитивности" - объединение таких поверхностей уровня. Прослежена связь примитивности движения с полной интегрируемостью по Лиувиллю и показана нестандартная роль тора $\mathbb{T}^{(2)}_{\chi\varphi}$ в рассмотренных задачах трех частиц. В отличие от инвариантных торов его можно рассматривать как многообразие классов эквивалентных траекторий, которое раньше частично изучалось как многообразие тройных столкновений.

С помощью компонент $M^{(3)}(\mathcal{E}_\infty)$ и $M^{(3)}(\varepsilon=0)$ введенного множества примитивности фазового потока построены четыре представления полного набора локальных первых интегралов на $M^{(3)}(\varepsilon)$, имеющие разные области сходимости.

Построены также ω -разложения этого набора первых интегралов с помощью вполне интегрируемого по Лиувиллю случая $\omega=0$, $|\varepsilon|\neq 0,\infty$.

Дано качественное исследование вещественных особых точек траекторий на $M^{(3)}(\varepsilon)$: изолированные точки тройных столкновений; особые линии парных столкновений; особые линии из точек поворота на поверхности Хилла; а также сеть особых линий на бесконечной поверхности $\rho=\infty$.

В последнем параграфе доказано, что если ввести в качестве независимой переменной $z = I^{(1)}_{\omega,0}(\chi,\varphi)$, то любой дополнительный интеграл на $M^{(3)}(\varepsilon)$ зависит от z . Тогда любой дополнительный интеграл коллинеарной задачи с $|\varepsilon|\neq\infty$ окажется бесконечнозначной функцией вместе с $I^{(1)}_{\omega,0}(\chi,\varphi)$. Такое же утверждение имеет место и для дополнительных интегралов общей пространственной задачи трех частиц. Из него следует неинтегрируемость ньютоновской задачи трех частиц по меньшей мере при почти всех значениях отношений масс $m_{1,2,3}$.

Это утверждение позволяет также распространить на решения общей задачи полученные в третьей главе результаты о характере сингулярности решений в нуле по $m_{1,2,3}$.

Таким образом видно, что для доказательства неинтегрируемости задачи трех частиц ненужно учитывать силы Кориолиса, а достаточно рассмотреть коллинеарный случай. Это приводит к большим упрощениям, так как наличие сил Кориолиса резко усложняет описание решений задачи трех частиц.

В заключении кратко обсуждаются основные результаты работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. P.Fiziev, Ts.Fizieva. 1) The Classical Three-Particle Problem. A Modification of the Delves Coordinates.- Preprint of the JINR. Dubna E2-86-119, 1986; 2) Modification of Hyperspherical Coordinates in the Classical Three-Particle Problem.- Few-Body Systems, 2(2), p. 71, 1987.
2. П.Физиев, Ц.Физиева. Геометрия задачи трех частиц на прямой линии. Препринт ОИЯИ, Дубна, Р2-86-130, 1986.
3. П.Физиев, Ц.Физиева. Полная редукция и интегрируемость в классической задаче трех частиц на прямой линии. Препринт ОИЯИ, Дубна, Р2-86-131, 1986.

4. P.Fiziev. Complete Integrability in the Classical Problem of Three Particles on a Stright Line. Preprint of the JINR, Dubna, E4-86-227, 1986.
5. P.Fiziev. Completely Integrable case in the Three-Particle Problems with Homogeneous Potentials. 1) Preprint of the JINR, Dubna, E4-86-325; 2) Letters in Math. Phys., 12, p. 267, 1986.
6. П.Физиев, Ц.Физиева. Траектории коллинеарной ньютоновской трехчастичной системы с нулевыми полной энергией и моментом. Препринт ОИЯИ, Дубна, Р4-86-339, 1986.
7. P.Fiziev. Integrability of the Classical Problem of Three Particles on a Stright Line.- Bulg. J. Phys., 14(2), p.117 , 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июля 1987 года.