

C-15

4-82-115

САКВАРЕЛИДZE  
Манана Игорьевна

ПРИМЕНЕНИЕ  
КОНЕЧНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ  
В ЗАДАЧАХ ЯДЕРНОЙ И П-ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Специальность: 01.04.16 - физика атомного ядра  
и элементарных частиц

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук  
старший научный сотрудник

В.Б.Беляев,

доктор физико-математических наук  
профессор

И.Ш.Вашакидзе.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук  
профессор

Р.И.Джибути,

кандидат физико-математических наук  
старший научный сотрудник

И.В.Фаломкин.

Ведущее научно-исследовательское учреждение:  
Ташкентский государственный университет

Защита диссертации состоится "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 1982 года на заседании специализированного совета КО47.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.  
Автореферат разослан "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 1982 года.

Ученый секретарь Совета

кандидат физико-математических наук

В.И.Луравлев.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Несмотря на большие успехи, достигнутые в области ядерной физики на основе модельных представлений, до сих пор не существует удовлетворительной микроскопической теории многочастичных систем, исходящей из элементарных взаимодействий между частицами. Основная трудность, возникающая при практическом решении задач нескольких тел, заключается в многомерном характере соответствующих динамических уравнений. Стандартные методы, такие, как импульсное и борновское приближения или вариационные подходы, как правило, оказываются здесь мало эффективными. Действительно, их применимость обусловлена наличием малого параметра в системе, либо априорным знанием структуры пробной функции в случае вариационных подходов.

Вместе с тем уже начиная с решения ядерной задачи трех тел стали развиваться методы сепарабельного представления парного взаимодействия и, следовательно, парной T-матрицы, применимость которых не связана с малостью каких-либо физических параметров системы и которые позволяют уменьшить размерность многочастичных интегральных уравнений. В связи с этим представляет интерес разработка многомерных обобщений двухчастичных сепарабельных представлений.

С другой стороны, пион-ядерные данные, поступающие с мезонных фабрик, предъявляют все более высокие требования к надежности и однозначности теоретического их анализа и интерпретации. В настоящее время существует много теоретических схем, в рамках которых описываются те или иные аспекты пион-ядерной динамики. Однако представляет интерес рассмотрение задачи на основе математически обоснованных приближений к точным уравнениям. Одна из таких процедур, основанная на применении метода конечномерных аппроксимаций к гамильтонианам связанных подсистем, позволила получить различные варианты интегральных уравнений для амплитуд упругого и неупругого рассеяний в системе четырех частиц. На основе этих уравнений появляется возможность рассмотрения процессов рассеяния  $\pi$ -мезонов на ядрах  $He^3(N^3)$ .

Цель работы - формулировка метода конечномерной аппроксимации операторов; применение метода конечномерной аппроксимации полного взаимодействия для решения проблемы связанного состояния трех тел; описание процесса низкоэнергетического ( $E \lesssim 0$ ) упругого рассеяния мезонов на  $He^3(N^3)$  с помощью приближенных четырехчастичных уравнений, полученных применением метода конечномерной аппроксимации к гамильтониану ядерной подсистемы; совместное рассмотрение упругого  $\pi He^3$ -рассеяния и двухчастичного развала  $\pi + He^3 \rightarrow \pi + p + d$  на ос-

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
БИБЛИОТЕКА

нове указанных уравнений с дополнительным условием об адиабатическом характере движения нуклонов в ядре в области низких и средних энергий мезонов ( $0 \lesssim E \lesssim 400$  МэВ).

Научная новизна и практическая ценность. В диссертации впервые в ядерно-физических исследованиях предложен метод конечномерной аппроксимации операторов, действующих в пространстве функций нескольких переменных. Одним из главных преимуществ данного метода является его простота. Другой, существенно важный аспект рассматриваемого метода, связан со следующим обстоятельством. В задачах малого числа тел часто представляет интерес не только численное решение уравнения само по себе, но и выражение для решения, записанное в удобном виде для последующего его использования как входной информации при рассмотрении задач большого числа тел. В этом смысле предложенный метод является особенно удобным, так как он приводит к приближенному решению, обладающему такими свойствами.

Эффективность предложенного метода применительно к оператору полного взаимодействия систем была продемонстрирована на примере задачи на связанное состояние трех тел. С таким же успехом указанный метод может быть использован для изучения связанных состояний большего числа тел.

В случае задачи упругого рассеяния метод конечномерной аппроксимации применялся к гамильтониану связанной подсистемы. Были получены приближенные четырехчастичные уравнения, которые являются довольно точными при отрицательной полной энергии системы (ниже порога развала). На основе указанных уравнений впервые было проведено микроскопическое рассмотрение упругого  $\pi^- \text{He}^3 (\text{H}^3)$ -рассеяния при отрицательной полной энергии системы, рассчитывались фазы и длины рассеяния. Было обнаружено, что в отличие от  $\pi^- \text{He}^3$ -длина  $\pi^+ \text{He}^3$ -рассеяния в основном формируется за счет упругого многократного рассеяния.

В диссертации впервые рассматривался двухчастичный развал  $\pi^+ \text{He}^3 \rightarrow \pi + p + d$  в адиабатическом приближении одновременно с упругим  $\pi^- \text{He}^3$ -рассеянием при энергиях  $0 \lesssim E \lesssim 400$  МэВ. Вводился параметр адиабатичности, который оказался довольно малым ( $\sim 0,25$ ), что является указанием на применимость адиабатического приближения в этой области энергии. Проводилась оценка сечений двухчастичного развала  $\pi^+ \text{He}^3 \rightarrow \pi + p + d$ , что позволяет определить величину вклада бинарной части непрерывного спектра трехнуклонного гамильтониана в упругое рассеяние  $\pi^- \text{He}^3$  по сравнению с вкладом от основного состояния  $\text{He}^3$ .

Следующие результаты выдвигаются для защиты:

1. Дана формулировка метода конечномерной аппроксимации операторов, действующих в пространстве функций нескольких переменных.

2. Метод конечномерной аппроксимации применен к операторам полного взаимодействия систем нескольких связанных частиц. Выполнен расчет связанного состояния трех тел.

3. Изучено низкоэнергетическое (до порога развала) упругое  $\pi^- \text{He}^3$ -рассеяние на основе приближенных четырехчастичных уравнений, полученных применением метода конечномерной аппроксимации к ядерному гамильтониану.

4. Исследованы вклады упругого и неупругого процессов в длины  $\pi^\pm \text{He}^3$ -рассеяний.

5. Изучено упругое  $\pi^- \text{He}^3$ -рассеяние и двухчастичный развал  $\pi^+ \text{He}^3 \rightarrow \pi + p + d$  в адиабатическом приближении при низких и средних энергиях ( $0 \lesssim E \lesssim 400$  МэВ).

6. Получена оценка применимости адиабатического приближения для рассеяния  $\pi^- \text{He}^3$  при низких и средних энергиях.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на семинарах ЛТФ ОИЯИ, кафедры теоретической физики ТГУ, на Всесоюзных совещаниях по теории систем частиц с сильным взаимодействием (Калинин, 1975 г., Вильнюс, 1977 г., Ташкент, 1979 г.) Международном симпозиуме по проблемам нескольких тел в ядерной физике (Дубна, 1979 г.) и были представлены на VIII Международной конференции по системам нескольких тел и ядерным силам (Грац, 1978 г.).

Публикации. По результатам диссертации опубликовано пять работ.

Объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и трех приложений, содержит 101 страницу машинописного текста, 11 рисунков и 11 таблиц. Библиографический список включает 81 наименование.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении содержится краткое обсуждение современного состояния проблем описания малонуклонных систем и взаимодействия  $\pi^-$ -мезонов с ядрами при низких и средних энергиях, которым посвящается настоящая диссертация. Рассмотрена общая структура диссертации.

Первая глава посвящена формулировке метода конечномерных аппроксимаций и его применению для решения задач на связанные состояния.

В § I излагаются основные положения метода Бейтмана, рассматриваются возможности его обобщения в пространстве нескольких перемен-

ных. Показано, что метод конечномерной аппроксимации многочастичного потенциала можно рассматривать как прямой многомерный аналог метода Бейтмана.

В § 2 обсуждаются некоторые преимущества переформулировки  $\mathcal{M}$ -частичного уравнения Шредингера в виде интегральных уравнений второго рода с компактным ядром. Такая формулировка гарантирует существование и единственность решения и вместе с тем предоставляет способы для получения практических решений, что основано на теореме о равномерной аппроксимации компактного оператора оператором конечного ранга.

На самом деле часто приходится решать уравнения, ядра которых не являются компактными. Для таких ядер невозможно построить аппроксимацию конечного ранга, сходящуюся по произвольной операторной норме к точному ядру. Однако требование сходимости аппроксимированного ядра к точному по произвольной операторной норме является слишком сильным. Существенно важным обстоятельством является тот факт, что ядро уравнения входит в уравнение не само по себе, а как оператор, действующий на решение. Поэтому задача заключается в том, чтобы найти оператор конечного ранга, который будет хорошей аппроксимацией для ядра в смысле действия на решение. В связи с этим в данном параграфе предлагается метод аппроксимации операторов, действующих в пространстве функций нескольких переменных, операторами конечного ранга.

При рассмотрении систем нескольких связанных частиц волновая функция является квадратично-интегрируемой функцией. Это обстоятельство дает возможность применить метод конечномерной аппроксимации к оператору полного взаимодействия  $V = \sum_i V_i$ . Существует много разных возможностей конечномерной аппроксимации потенциала, в диссертации использовались две из них:

симметричная 
$$V \rightarrow \tilde{V}^{(n)} = \sum_{i,j=1}^n V |\chi_i\rangle \langle \chi_i| \langle \chi_j| V, \quad d_{ij} = \langle \chi_i | V | \chi_j \rangle;$$

несимметричная 
$$V \rightarrow \tilde{V}^{(n)} = \sum_{i,j=1}^n V |\chi_i\rangle \langle \chi_j|, \quad d_{ij} = \langle \chi_i | \chi_j \rangle.$$

В § 3 предложенный метод применяется для решения задачи на связанное состояние трех тел, при этом задача сразу алгебраизуется. Демонстрируется быстрая сходимость вычисленных в последовательных приближениях энергий связи к значению, полученному при помощи довольно точной двухсторонней оценки. Волновая функция связанного состояния получается в виде ряда по матричным элементам потенциала, т.е. по

многомерным функциям, учитывающим динамику взаимодействия, и обладает правильным асимптотическим поведением.

Вторая глава посвящается упругому рассеянию  $\pi$ -мезонов на ядре  $He^3(H^3)$  при полной энергии системы  $E \neq 0$ .

В § I содержится вывод приближенных четырехчастичных уравнений для упругого рассеяния  $\pi$ -мезона на связанной трехнуклонной системе, основанный на применении метода конечномерной аппроксимации к гамильтониану связанной подсистемы. При указанных значениях энергии (до порога развала) волновая функция рассматриваемой системы является квадратично-интегрируемой по координатам нуклонов. Это обстоятельство позволяет аппроксимировать часть полного гамильтониана  $H_c$ , зависящую только от ядерных переменных, оператором конечного ранга:

$$H_c \rightarrow \tilde{H}_c^{(n)} = \sum_{i,j=1}^n |\chi_i\rangle d_{ij} \langle \chi_j|.$$

Последняя запись представляет собой различные варианты замены оператора  $H_c$  на оператор конечного ранга  $\tilde{H}_c^{(n)}$  в зависимости от того, как определены матрицы  $d_{ij}$  и векторы состояний  $|\chi_i\rangle$ . Выбирая в качестве  $|\chi_1\rangle$  волновую функцию основного состояния связанной трехчастичной подсистемы и ограничиваясь в разложении  $\tilde{H}_c^{(n)}$  одним членом, получаем приближенное четырехчастичное уравнение для  $T$ -матрицы рассеяния

$$\langle \bar{r} | T(E) | \bar{r}' \rangle = \langle \bar{r} | T^0(E) | \bar{r}' \rangle - |E| \int \langle \bar{r} | T^0(E) | \bar{r}'' \rangle G_0(k^0, E) G_0(k^0, E + |E|) \langle \bar{r}'' | T(E) | \bar{r}' \rangle d\bar{r}'',$$

где  $\langle \bar{r} | T^0(E) | \bar{r}' \rangle$  является усредненным по основному состоянию связанной подсистемы решением следующего уравнения:

$$\langle \bar{r} | T^0(E, \vec{r}_2, \vec{r}_3) | \bar{r}' \rangle = \langle \bar{r} | V(\vec{r}_2, \vec{r}_3) | \bar{r}' \rangle - \int \langle \bar{r} | V(\vec{r}_2, \vec{r}_3) | \bar{r}'' \rangle G_0(k^0, E) \langle \bar{r}'' | T^0(E, \vec{r}_2, \vec{r}_3) | \bar{r}' \rangle d\bar{r}''.$$

При получении этих уравнений не используется импульсное приближение, кратность перерассеяний пионов на нуклонах учитывается во всех порядках. Единственное приближение состоит в том, что в спектральном разложении ядерного гамильтониана оставляем только вклад от основного состояния ядра-мишени.

В § 2 приближенное четырехчастичное уравнение, полученное в § I, применяется для вычисления длины и фазы упругого рассеяния  $\pi$ -мезонов на ядре  $He^3(H^3)$  в области отрицательной полной энергии системы. Фазы рассеяния в состояниях с полным изоспином системы  $T=1/2$  и  $T=3/2$  качественно ведут себя так же, как соответствующие фазы пион-нуклонного рассеяния. Для длины  $\pi^+ He^3$ -рассеяния получается значение  $A_{\pi^+ He^3} \approx -0,21$  фм, что находится в хорошем согласии с экспериментальным значением  $A_{\pi^+ He^3} \approx -0,226$  фм. В случае  $\pi^- He^3$ -рассеяния происходит сильное сокращение  $\pi^-$ -ядерных амплитуд в состояниях

с определенным значением изоспина ( $T=1/2$ ,  $T=3/2$ ), хотя сами эти амплитуды существенно отличны от нуля. В связи с этим величина упругой части длины  $\pi$ - $He^3$ -рассеяния оказалась очень чувствительной как к изменениям параметров  $\pi N$ -взаимодействия, так и к приближению, которое используется при вычислении  $\langle \bar{r} | T^0(E) | \bar{r} \rangle$ . В то же время амплитуды  $\pi$ - $He^3(N^3)$ -рассеяния в состояниях с определенным значением изоспина системы ( $T=1/2$ ,  $T=3/2$ ) слабо зависят от этих изменений. Была обнаружена слабая зависимость длин и фаз рассеяния от структуры ядра в рассматриваемой области энергии.

В третьей главе изучается упругое  $\pi$ - $He^3$ -рассеяние при низких и средних энергиях ( $0 \leq E \leq 400$  МэВ) одновременно с двухчастичным развалом  $\pi + He^3 \rightarrow \pi + p + d$  на основе приближенных четырехчастичных уравнений, полученных во второй главе.

Строго говоря, при энергиях выше порога развала нет оснований ограничиваться одним членом в разложении ядерного гамильтониана  $He$ . Однако, если средняя энергия возбуждения ядерной системы значительно меньше обратного времени пролета пиона через ядро, можно считать, что процесс происходит через основное состояние ядра. С другой стороны, при энергиях системы, больших по сравнению с энергией связи ядра, интегральный член уравнения для  $T$ -матрицы в силу своей структуры оказывается малым, т.е. получаем указание на разумность приближения  $T \approx T^0$ .

В § I вычисляются упругие  $\pi$ - $He^3$ -сечения и сечения развала  $\pi + He^3 \rightarrow \pi + p + d$  на основе нулевого приближения для  $T$ -матрицы  $\langle \bar{r} | T^0(E, \vec{\tau}_d, \vec{\zeta}) | \bar{r} \rangle$ . Физические амплитуды определяются усреднением по волновой функции  $He^3$  для упругого рассеяния и вычислением матричного элемента  $T^0$  по волновым функциям  $He^3$  и системы  $pd$  в случае неупругого рассеяния. Численные расчеты проводились при энергиях налетающего пиона  $E_\pi = 20, 68, 100, 200, 260, 300, 400$  МэВ. Упругие дифференциальные сечения качественно воспроизводят ход экспериментальных кривых. К сожалению, экспериментальные данные по развалу отсутствуют. Что касается полных сечений, при энергии  $E_\pi = 20$  МэВ неупругое полное сечение примерно в два раза меньше полного упругого сечения, при  $E_\pi = 68, 100$  МэВ эти сечения примерно равны, при больших энергиях неупругое сечение несколько превышает упругое.

Оценка сечений двухчастичного развала  $\pi + He^3 \rightarrow \pi + p + d$  позволяет определить величину вклада бинарной части непрерывного спектра трехнуклонного гамильтониана в упругое рассеяние  $\pi$ - $He^3$  по сравнению с вкладом от основного состояния  $He^3$ .

В § 2 проводилась оценка применимости адиабатического приближения. С этой целью вводился параметр адиабатичности  $\tau = \bar{E} t$ , где

$t$  - время пролета пиона через ядерную систему,  $\bar{E}$  - средняя энергия возбуждения ядерной системы, определяемая выражением

$$\bar{E} = \frac{\int [E_p - (\epsilon_{He^3} - \epsilon_d)] G_{inel}(p) d\vec{p}}{\int G_{inel}(p) d\vec{p}}$$

$p$  - импульс относительного движения  $pd$ -системы. Во всей рассматриваемой области энергии параметр  $\tau$  оказался достаточно малым ( $\sim 0,25$ ), что является указанием на применимость адиабатического приближения.

В заключении приведены основные результаты, полученные в диссертации.

В приложении I представлены сведения из теории линейных операторов, необходимые для изложения материала диссертации.

В приложении II приводятся пион-нуклонные потенциалы, используемые в расчетах.

В приложении III пион-ядерный потенциал проектируется на состояния системы с данным полным изоспином.

#### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В ДИССЕРТАЦИИ

1. На основе многомерных обобщений сепарабельных представлений для парного взаимодействия предложен метод конечномерной аппроксимации многочастичных операторов.
2. При рассмотрении связанных состояний нескольких тел этот метод применялся к операторам полного взаимодействия; таким образом решалась задача трех тел. Демонстрировалась быстрая сходимость предложенной процедуры.
3. На основе приближенных четырехчастичных уравнений, полученных применением метода конечномерной аппроксимации к гамильтониану связанной подсистемы, рассчитывались длины и фазы упругого  $\pi$ - $He^3(N^3)$ -рассеяния при полной отрицательной энергии. Полученные результаты для длин  $\pi^\pm He^3$ -рассеяния хорошо согласуются с экспериментальными результатами, которые извлекаются из сдвигов и ширин уровней соответствующих  $\pi^-$ -мезоатомов.
4. На основе указанных четырехчастичных уравнений с дополнительным условием об адиабатическом характере движения нуклонов в ядре проводились совместные исследования упругого  $\pi$ - $He^3$  и двухчастичного развала  $\pi + He^3 \rightarrow \pi + p + d$  при энергиях налетающего пиона  $0 \leq E \leq 400$  МэВ. Вводился параметр адиабатичности и оценивалась возможность применения адиабатического приближения при низких и средних энергиях.

Результаты диссертации опубликованы в работах:

1. V.B.Belyaev, J.Wrzecionko, M.I.Sakvarelidze, A.T.Eliava. Separable expansion of potential in multidimensional space. Three-body problem. Journal of Comp. Phys., 1976, v. 20, p. 495-501; Preprint JINR, E4-8819, Dubna, 1975.
2. V.B.Belyaev, J.Wrzecionko, M.I.Sakvarelidze. Calculation of the low energy pion- $\text{He}^3$  scattering. Phys. Lett., 1979, v. B83, p. 19-21; Lecture Notes in Physics, 1978, v. 82, p. 412-414; Preprint JINR, E4-11505, Dubna, 1978.
3. В.Б.Беляев, Е.Вжеционко, М.И.Сакварелидзе. Неупругое рассеяние пионов на  $\text{He}^3$  при низких энергиях. В сборнике: Международный симпозиум по проблеме нескольких тел в ядерной физике, Дубна, 1979; ОИЯИ, Д4-80-271, Дубна, 1980, с.34.
4. В.Б.Беляев, Е.Вжеционко, М.И.Сакварелидзе. Реакция  $\pi + \text{He}^3 \rightarrow \pi + p + d$  в модели фиксированных центров. В сборнике: Микроскопические расчеты легких ядер, Калининский государственный университет, 1981, с. 4-14.
5. В.Б.Беляев, Е.Вжеционко, М.И.Сакварелидзе. Расщепление ядра  $\text{He}^3$  в реакции  $\pi + \text{He}^3 \rightarrow \pi + p + d$  при низких и средних энергиях пионов. Препринт ОИЯИ, P4-81-855, Дубна, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел  
12 февраля 1982 года