ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

4 - 7877

НИЯЗГУЛОВ Станислав Адибович

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Специальность 055 - физика атомного ядра
и космических лучей

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Дубна 1974

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Б.Н.ЗАХАРЬЕВ.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
Е.П.ЖИДКОВ,

кандидат физико-математических наук
С.Н.СОКОЛОВ.

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Лаборатория нейтронной физики Объединенного института ядерных исследований

Автореферат разослан " " ____ 1974 года.

Защита диссертации состоится " " ____ 1974 года на заседании Ученого совета Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, г.Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета Р.А.АСАНОВ

4 - 7877

НИЯЗГУЛОВ Станислав Адибович

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Специальность 055 - физика атомного ядра и космических лучей

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

В основе нерелятивистской квантовой механики, являющейся в настоящее время главным инструментом для изучения ядерных систем, лежит уравнение Шредингера – уравнение в частных производных. Его решение лишь в исключительных случаях может быть получено в аналитическом виде. Обычно переменные в уравнении даже не разделяются.

Поскольку точно решить уравнение в частных производных, как правило, не удается, нужны приближенные методы, позволяющие извлекать из экспериментальных данных возможно больше сведений о ядрах. В качестве одного из таких методов часто используется замена точной волновой функции $\Psi$ приближенной $\Psi^N$, представляемой в виде разложения по части базисного набора известных функций $\{\Phi_n\}$:

$$\Psi \to \Psi^N = \sum_{n=1}^{N} F_n^N \Phi_n \tag{I}$$

(причем требуется, чтобы $\Psi^N \to \Psi$ при $n \to \infty$).

Для $N$ – коэффициентов $F_n^N$ – разложения (I) получается конечная система сравнительно простых уравнений. Указанный подход является универсальным. С его помощью можно описать связанные состояния /8/, упругое /I4/ и неупругое /IO/ рассеяния, реакции с перераспределением частиц /II/, реакции развала системы /I2/.

Подобные методы лежат в основе так называемой единой теории ядерных реакций. В этой теории очень важной является проблема выбора базиса, поскольку он определяет как тип уравнений, которые нужно решать, так и область применимости метода. Эта проблема возникает в связи с тем, что базисы, с помощью которых получаются простые уравнения, таковы, что часто неясно, как задавать граничные условия рассеяния. Если базис выбран так, что эти условия задаются просто, то для $F_n^N$ получаются сложные уравнения. В диссертации решается для ряда случаев проблема задания граничных условий при использовании разложения по дискретному базису (с простыми уравнениями для $F_n^N$).

Другой проблемой, которую необходимо рассмотреть при приближенном решении задачи, является оценка погрешности. Если неизвестна величина ошибки, то трудно делать какие-либо выводы, в частности, судить о динамике изучаемой системы по параметрам рассеяния, что является одной из основных целей ядерной физики. До сих пор таких оценок в общем случае дать не удавалось. Хорошо было бы даже установить только знак ошибки, так как тогда приближенное значение искомых величин будет строгой односторонней границей для точного. В диссертации приводится способ получения таких односторонних границ и рассматриваются возникающие при этом проблемы.

Вопрос об оценке приближения (и тем самым о границах) является частью общей проблемы об установлении соответствия между динамическими параметрами системы (гамильтонианом) и данными рассеяния. Наиболее последовательным подходом, устанавливающим такое соответствие, является обратная задача теории рассеяния /13/.

Однако специфика точной обратной задачи такова, что для восстановления потенциала взаимодействия необходимо знание параметров рассеяния как непрерывных функций от энергии $E$ в области изменения $E$ от нуля до бесконечности. Поэтому точно решить обратную задачу теории рассеяния невозможно. В диссерта-



ции получены приближенные методы обратной задачи, позволяющие находить динамические характеристики систем по данным рассеяния на ограниченном интервале энергий. Причем в рамках приближения существует взаимно однозначное соответствие между получаемым потенциалом и исходными параметрами рассеяния. До сих пор обратная задача теории рассеяния решалась только для двухчастичных процессов. В диссертации сделан шаг к решению обратной задачи для большого числа частиц, участвующих в рассеянии. Кроме того, в ней рассматриваются взаимодействия, носящие многочастичный характер.

Диссертация состоит из двух частей. Первая часть посвящена проблемам приближенного решения прямой задачи теории рассеяния. Вопросы, относящиеся к обратной задаче, рассматриваются во второй части.

## Часть I

Общим для всех разделов диссертации является использование разложения волновой функции $\Psi$ по некоторому дискретному базису квадратично-интегрируемых функций с последующей редукцией разложения ($\infty \to N$). Дискретный базис выбирается с целью упрощения уравнений на коэффициенты $F_n^N$ разложения (I).

Однако вопрос о правомерности разложения $\Psi$ по такого рода базисам часто не тривиален. Для процессов рассеяния функция $\Psi$ отлична от нуля в неограниченной области и не является квадратично-интегрируемой по всем переменным. А в пространстве всех гладких функций, к которому принадлежит $\Psi$, базис содержит функции, непрерывным образом зависящие от энергии (это пространство несепарабельно).

В одном частном случае Ротенбергу /I4/ удалось обойти эту трудность и использовать для разложения волновой функции при описании упругого рассеяния дискретный базис собственных функций задачи Штурма-Лиувилля. Но описать с помощью такого базиса неупругое рассеяние и учесть виртуальные возбуждения фрагментов, относящиеся к непрерывному спектру до сих пор не удавалось, в основном из-за трудности удовлетворения граничных условий рассеяния при разложении по дискретному спектру.

Действительно, асимптотика волновой функции $\Psi$ для процессов упругого и неупругого рассеяния может быть записана в виде

$$\Psi \sim \sin k\rho \cdot \varphi_0(R) + \sum_j q_j e^{ik_j\rho} \cdot \varphi_j(R) , \qquad (2)$$

где $\varphi_0(R)$ и $\varphi_j(R)$ - волновые функции внутреннего движения фрагментов (физические волновые функции). Под $R$ понимается совокупность координат внутреннего движения. В соответствии с (2) было бы естественным и во внутренней области разлагать $\Psi$ по функциям $\varphi_j(R)$. Но набор $\varphi_j(R)$ не является полным, поскольку в нем отсутствуют состояния, соответствующие непрерывному спектру возбуждений. Если этот непрерывный спектр учесть, то для коэффициентов разложения $F_n^N$ получатся интегродифференциальные уравнения. В целях упрощения уравнений принимается разложение по чисто дискретному базису функций $\{\Phi_n\}$, не являющихся собственными функциями внутреннего движения фрагментов.



Наборы $\{\Phi_n(R)\}$ и $\{\varphi_j(R)\}$ не совпадают, и в связи с этим возникает проблема удовлетворения граничным условиям (2) при разложении $\Psi$ по базису $\{\Phi_n\}$. Она разрешена в § I следующим образом.

Показано, что матрица преобразования $\| a_{nj} \|$, переводящая $\{\Phi_n\}$ в $\{\varphi_j\}$, может быть использована, чтобы из асимптотического поведения решений системы дифференциальных уравнений для коэффициентов $F_n^N$ разложения $\Psi$ по $\{\Phi_n\}$ составить комбинацию, удовлетворяющую условиям (2). Поскольку такая матрица $\| a_{nj} \|$ всегда может быть найдена, если известен набор $\{\Phi_n\}$ и функции $\varphi_j$, проблема задания граничных условий оказывается решенной.

При этом возникает определенная неточность в описании функций внутреннего движения, имеющая тот же характер, что и основное приближение метода, заключающееся в редукции размерности базиса $\{\Phi_n\}$ $(\infty \to N)$. Но существует возможность неограниченного уточнения как решения всей задачи, так и волновых функций мишени путем увеличения $N$.

Для реакций с перераспределением вся волновая функция $\Psi$ в принципе не может быть представлена в виде разложения (с коэффициентами, зависящими от одной переменной) по какому-либо дискретному базису из $L_2$. Но оказывается, что для нахождения параметров рассеяния существенна лишь часть $\Psi$ в ограниченной области конфигурационного пространства, внутри которой $\Psi$ может быть аппроксимирована с помощью базиса квадратично-интегрируемых функций. Действительно, амплитуда рассеяния $q$

связана с $\Psi$ выражением

$$q = \int \Phi_0 V \Psi d\tau, \qquad (3)$$

где $\Phi_0$ - падающая волна, а $V$ - потенциалы взаимодействия, вызывающие рассеяние. Интегрирование в (3) ведется по всему конфигурационному пространству. Область, где отлично от нуля произведение $\Phi_0 \cdot V$ ограничена, хотя в отдельности $\Phi_0$ и $V$ отличны от нуля в неограниченных областях.

Функция $\Psi$ будет давать вклад в $q$ лишь в той области, где $\Phi_0 V$ отлично от нуля, поскольку во всей остальной части конфигурационного пространства подынтегральное выражение в (3) равно нулю. Возникает возможность аналогичного интегрального представления не только для амплитуды рассеянной, но и для амплитуды $A$ падающей волны, которая будет иметь вид:

$$A = \int \Phi^+ V \Psi d\tau - S, \qquad (4)$$

где $\Phi^+$ - расходящаяся волна, $V$ - потенциалы взаимодействия,

$$S = [\Phi^+ \nabla \Psi]_{\rho=0} \qquad (5)$$

- величина, зависящая от поведения волновой функции $\Psi$ в области действия потенциала вблизи нуля.

Поскольку произведение $\Phi^+ V$ быстро спадает на асимптотике, где $V$ отлично от нуля, и равно нулю во всей остальной области конфигурационного пространства для определения А во многих интересных случаях, по-прежнему, оказывается существенным



поведение $\Psi$ лишь в ограниченной области конфигурационного пространства. Внутри этой области $\Psi$ представляется в виде разложения (I). Теперь в качестве базичных функций можно выбрать какой-либо из наборов, используемых при описании структуры связанных состояний сложных ядер в теории атомного ядра.

В § 2 диссертации для конкретного случая сферических ядер в приближении хаотических фаз указан способ описания рассеяния в рамках методов вторичного квантования. Граничные условия задачи рассеяния в этом случае удовлетворяются с помощью (4), причем для того канала, в котором есть падающая волна, A приравнивается единице, а для всех остальных каналов вместо A ставится нуль. Соотношения (4) можно использовать как уравнения для коэффициентов разложения $\Psi$ по базису $\{\Phi_n\}$ в дополнение к системе, полученной из уравнения Шредингера стандартным образом. Найденные коэффициенты разложения $\Psi$ используются для определения амплитуды $q$ по формуле (3). Решение, полученное при этом, допускает возможность неограниченного уточнения при увеличении числа $N$ базисных функций.

В § 3 рассматриваются проблемы, возникающие при оценке ошибок приближения редукции ($\infty \to N$). Приведено доказательство того, что значения параметров рассеяния (а именно, матрицы реакции $K$), полученные при приближенном решении, лежат строго с одной стороны от точных. Главное внимание при этом обращается на особенности поведения параметров при уточнении решения задачи. Для решения проблемы устранения неопределенности в фазовых сдвигах используется изложенная в § 4 теорема

Левинсона. С ее помощью удалось установить критерии справедливости односторонних границ на параметры рассеяния.

## Часть II

До сих пор для определения вида взаимодействия применяются методы подбора параметров потенциала таким образом, чтобы результат, полученный при решении уравнений, был как можно ближе к экспериментальным данным. Однако существует более прямой путь восстановления взаимодействия по данным рассеяния, который носит название обратной задачи. Вторая часть диссертации целиком посвящена методам решения приближенной обратной задачи.

Рассматривается случай сил конечного радиуса действия, т.е. предполагается, что потенциал $V(r)=0$ при $r \geq a$ где $a$ - некоторая постоянная. Обратную задачу в этом предположении решал Мельников /I5/. Он показал, что для определения потенциала достаточно знать дискретное число спектральных данных, а именно, значения некоторой функции $A(k)$, определяемой через функцию Иоста, в дискретном числе энергетических точек. Но для нахождения функции Иоста даже в одной точке необходимо знать значение фазы как функции от энергии $E$ на всем интервале $E$ от $0$ до $\infty$. Однако, используя $R$ -матричную теорию, удалось ограничиться для определения потенциала дискретным числом данных, определяемых непосредственно из эксперимента, а именно, положениями резонансов $E_\lambda$ и их ширинами $\gamma_\lambda$, которые полностью характеризуют $R$-матрицу и связанную с ней $S$ -матрицу рассеяния. Были подобраны такие граничные условия для



вспомогательного нерегулярного решения уравнения, что спектральную функцию, с помощью которой строится обратная задача, удалось записать в явном виде через $\gamma_\lambda^2$

$$\rho(E) = \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 \,\theta\,(E-E_\lambda)\,, \qquad (6)$$

где $\Theta(\varepsilon)$ - функция Хэвисайда:

$$\Theta(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \varepsilon \geq 0 \\ 0 & \text{при} \quad \varepsilon < 0\,. \end{cases} \qquad (7)$$

Для такой спектральной функции оказалось возможным предложить аналог формализма Гельфанда-Левитана, используемый обычно в обратной задаче.

Указанным методом была решена обратная задача для конечно-разностного аналога уравнения Шредингера, обычно используемого в прямой задаче теории рассеяния. Следует заметить, что, если для конечно-разностного уравнения использовать классический аппарат обратной задачи, развитый Гельфандом и Левитаном, то для нахождения потенциала в дискретном числе координатных точек придется использовать данные рассеяния, как непрерывные функции от энергии, даже если потенциал имеет ограниченный радиус действия /I6/. Однако эту трудность можно обойти, если применить формализм обратной задачи, основанный на $R$ -матричной теории. Способ решения обратной задачи в этом формализме разработан в § I второй части диссертации. При этом оказалось, что для нахождения потенциала ограниченного радиуса действия $a$ в $N$ точках ( $N=\frac{a}{\Delta}$, где $\Delta$ -шаг в конечно-разностном уравнении Шредингера) достаточно знать $2N$ параметров $E_\lambda$ и $\gamma_\lambda$.

$(\lambda = 1, \ldots N)$, которые могут быть найдены по положениям полюсов $R$ -матрицы.

$$R(E) = \sum_{\lambda}^{N} \frac{\gamma_\lambda^2}{E - E_\lambda} \tag{8}$$

и по $N$- значениям $S$ - матрицы в любых $N$ энергетических точках $E \neq E_\lambda$.

Причем, между значениями потенциала в $N$-точках и $S$ -матрицей существует в рамках того же приближения строгое взаимнооднозначное соответствие, т.е. найденная по восстановленному потенциалу $S$ - матрица является функцией от энергии и принимает при $E = E_\lambda$ те значения, по которым определялись параметры $\gamma_\lambda^2$ для восстановления потенциала.

В § 2 этой части дан еще один метод решения обратной задачи, основанный на другом, часто используемом в прямой задаче, приближении редукции разложения волновой функции. Метод иногда называют проекционным, поскольку вместо уравнения Шредингера в нем используется проекция этого уравнения на $N$ -мерное подпространство бесконечномерного пространства базисных функций. В качестве базисных функций выбраны решения свободного уравнения Шредингера $W_\mu(r)$ с граничными условиями

$$W_\mu(0) = 0 \; ; \quad \frac{d}{dr} W_\mu(r) \Big/ W_\mu(r) \Big|_{r=a} = B/a . \tag{9}$$

В этом случае для нахождения потенциала необходимы также $2N$ величин $E_\lambda^N$ и $\gamma_\lambda^{N2}$, определяемые с помощью $R$ - матрицы.



Проекционный метод применяется для решения обратной задачи рассеяния частицы потенциалом, не обладающим сферической симметрией, причем обратная задача выглядит для этого случая значительно проще, чем в формулировке Фаддеева /17/.

Потенциал в проекционном методе определялся в виде разложения по базисным функциям $W_\mu(r)$:

$$V^N(r) = \sum_{\mu}^{N} C_\mu^N \, W_\mu(r) , \tag{10}$$

где коэффициенты $C_\mu^N$ восстанавливались по найденным матричным элементам от потенциалов.

Простота излагаемых приближенных методов позволила в § 3 выйти за рамки обычно рассматриваемой обратной задачи двух тел и даже за рамки предположения о парном характере сил взаимодействия.

Построение обратной задачи теории рассеяния для трехчастичных процессов с учетом трехчастичных сил проводится в этом параграфе на двух простых моделях. В первой предполагается, что две частицы из трех связаны бесконечно-глубокой потенциальной ямой, а третья частица взаимодействует с ними посредством трехчастичных сил. Во второй модели предполагается, что происходит процесс трехчастичного столкновения, причем парные взаимодействия отсуствуют. На обеих моделях выяснено, какая может потребоваться (в принципе) информация для восстановления трехчастичных сил. В первом случае может оказаться полезной информация о закрытых каналах, во втором - о процессах трехчастичных столкновений.

В заключение коротко резюмируем результаты, полученные в диссертации.

Показано, как удовлетворить граничным условиям рассеяния, если волновая функция системы $\Psi$ представляется в виде разложения по произвольному, чисто дискретному базису квадратично-интегрируемых функций. Полученный подход позволяет описать не только упругое рассеяние /I4/, но и всевозможные неупругие процессы и учесть виртуальные возбуждения непрерывного спектра мишени.

Предложен метод описания ядерных реакций с помощью формализма квазичастиц, используемого обычно для изучения структуры ядер. Он позволяет учитывать парные корреляции сверхпроводящего типа и коллективные эффекты.

Дан простой вариант доказательства теоремы Левинсона, позволяющий лучше понять ее физический смысл. Получен критерий справедливости односторонних границ на матрицу реакции $K$, полезный для практического применения границ /7/.

Выведены основные уравнения $R$ - матричной теории для конечно-разностного аналога уравнения Шредингера, обычно используемого в расчетах, что позволило в случае потенциала конечного радиуса действия "$a$" описать рассеяние с помощью $2N$-параметров (где $N$-число шагов на интервале $0 \le r \le a$ ).

Построен метод приближенного решения обратной задачи теории рассеяния, основанный на формализме $R$ - матричной теории в конечно-разностном приближении, отличающийся тем, что в его рамках существует однозначное соответствие между полученными



значениями потенциала и исходными параметрами рассеяния.

Дан метод решения обратной задачи, основанный на проектировании на конечномерное пространство функций. Указанный метод применен к случаю рассеяния потенциалом, не обладающим сферической симметрией.

Сформулирована модельная обратная задача для процессов рассеяния в системе с числом частиц больше двух.

Указано на возможность решения обратной задачи с учетом многочастичных сил для случая отсутствия парных взаимодействий.

Основной материал диссертации изложен в работах /I-5,7/.

Л И Т Е Р А Т У Р А:

1. Жигунов В.П., Захарьев Б.Н., Ниязгулов С.А., Фенин Ю.И., Препринт ОИЯИ Р4-6834 Дубна, 1972.
2. Захарьев Б.Н., Ниязгулов С.А., Рыбарска В., Фенин Ю.И. Препринт ИТФ, ИТФ-71-76р (1971).
3. Береги П., Захарьев Б.Н., Ниязгулов С.А. ЭЧАЯ 4, 2, 512 (1973).
4. Жигунов В.П., Захарьев Б.Н., Ниязгулов С.А., Сузько А.А. Препринт ОИЯИ Р4-7349 Дубна, 1973. Труды международной конференции по ядерной физике. Мюнхен, 1973 г.
5. Захарьев Б.Н., Ниязгулов С.А., Сузько А.А. Сообщение ОИЯИ Р4-7403 Дубна, 1973. Труды международной конференции по ядерной физике, Мюнхен, 1973 г.
6. Захарьев Б.Н., Ниязгулов С.А., Сузько А.А. Р4-7768, Сообщение ОИЯИ, Дубна, 1974.
7. Захарьев Б.Н., Лхагва О., Ниязгулов С.А., Фенин Ю.И. Nuovo Cim. 6A, N.2, 151 (1971).
8. Бор О., Моттельсон Б. Структура атомного ядра, Мир, М., (1971).
9. Feshbach H. Ann. Phys. 19, 287 (1962).
10. Друкарев Г.Ф. Теория столкновений электронов с атомами.
11. Жигунов В.П., Захарьев Б.Н. ЭЧАЯ 2, 2, 499 (1971).
12. Жигунов В.П., Захарьев Б.Н. Методы сильной связи каналов в теории рассеяния. Атомиздат, М., (1974).
13. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Изв.АН СССР, сер.мат. 15,309 (1957).
Агранович З.С., Марченко В.А. Обратная задача теории рассеяния. Москва, 1963.



14. Rotenberg M. Ann. Phys. 19, 292 (1962).
15. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р-265, Дубна, 1958.
16. Case K.M., Kao M., Journ. Math. Phys. 14, N.5, 594 (1972).
17. Фаддеев Л.Д. Препринт ИТФ ИТФ-71-106Е, Киев (1971).

Рукопись поступила в издательский отдел
18 апреля 1974 года