СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

4-5741

В.Н. Ефимов

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

К ВОПРОСУ О ФАКТОРИЗАЦИИ ДВУХЧАСТИЧНОЙ t-МАТРИЦЫ МЕТОДОМ БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА

1971

4-5741

В.Н. Ефимов

К ВОПРОСУ О ФАКТОРИЗАЦИИ ДВУХЧАСТИЧНОЙ t-МАТРИЦЫ МЕТОДОМ БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА

Введение

В последние годы появилось большое число работ, посвященных вычислению физических характеристик трехнуклонных систем и основанных на использовании аппроксимации внемассовой двухчастичной t -матрицы конечной суммой слагаемых, факторизованных по импульсам. Такая процедура позволяет свести многомерные интегральные уравнения Фаддеева[1] для системы трех нуклонов к системам одномерных интегральных уравнений, решение которых при современном уровне вычислительной техники является вполне разрешимой задачей.

Было предложено несколько способов факторизации двухчастичной t -матрицы, использующих различные методы приближенного решения интегральных уравнений[2-4]. Однако некоторые предложенные методы факторизации внемассовой двухчастичной t -матрицы, математически строго обоснованные, имеют свои недостатки, ограничивающие область их применения. Так, например, метод факторизации t -матрицы, изложенный в[2] и основанный на использовании метода Бубнова-Галеркина, неприменим для знакопеременных потенциалов, к которым относятся феноменологические нуклонные потенциалы с отталкивательным кором. Другой метод, использующий разложение Гильберта-Шмидта для решения интегральных уравнений[3], может быть применен только для таких потенциалов, для которых известно точное аналитическое решение двухнуклонной задачи. Более гибким является способ факторизации t -матрицы с помощью метода Бейтмана[4], который свободен от вышеперечисленных ограничений и в принципе применим к широкому классу потенциалов с мягким или твердым отталкивательным кором.

В настоящей работе вкратце изложен способ факторизации t -матрицы с помощью метода Бубнова-Галеркина для знакопостоянных потенциалов и рассмотрен вопрос о сходимости этого метода. В качестве конкретных примеров рассмотрен ряд простейших двухпараметрических потенциалов. Показано, что в этом случае метод Бубнова-Галеркина аналогичен методу Бейтмана. Показано также, что метод Бубнова-Галеркина простым способом может быть обобщен на случай знакопеременных потенциалов, содержащих наряду с притяжением мягкий отталкивательный кор.

Рассмотрено также применение метода Бубнова-Галеркина для факторизации t -матрицы, соответствующей бесконечно большому отталкивательному потенциалу (твердому кору).

§1. Факторизация t-матрицы методом Бубнова-Галеркина для простейших знакопостоянных потенциалов

1. Ниже будет рассмотрено применение метода Бубнова-Галеркина[5] для факторизации t -матрицы в случае знакопостоянных потенциалов. При этом ради простоты рассмотрение будет ограничено только s -компонентой t -матрицы, так как, во-первых, именно s -компонента дает наиболее существенный вклад при решении уравнений Фаддеева, во-вторых, обобщение метода для высших компонент тривиально.

Известно, что s -компонента $t(p,k,Z)$ внемассовой t -матрицы при заданном потенциале взаимодействия определяется уравнением Липпмана-Швингера:

$$t(p,k,Z) = V(p,k) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty p'^2 dp' \frac{V(p,p')\,t(p',k,Z)}{p'^2 - Z}, \tag{1}$$

где

$$V(p,k)=\int_0^\infty r^2 dr\, j_0(pr)V(r)\, j_0(kr), \tag{2}$$

$V(r)$ - потенциал взаимодействия, взятый с обратным знаком, $j_0(pr)$ - сферическая функция Бесселя.

В уравнении (1) t -матрица нормирована условием:

$$t(k,k,k^2+i0)=f(k),$$

где $f(k)$ - s -компонента амплитуды рассеяния и используется система единиц $m=\hbar=1$ (m - масса нуклона).

Вместо уравнения (1) для определения t -матрицы можно использовать интегральное уравнение для внемассовой волновой функции $\Psi_k(r,Z)$:

$$\Psi_k(r,Z)=j_0(kr)+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty r'^2 dr' K(r,r',Z)V(r')\Psi_k(r',Z) \tag{3}$$

и следующее соотношение:

$$t(p,k,Z)=\int_0^\infty r^2 dr\, j_0(pr)V(r)\Psi_k(r,Z), \tag{4}$$

где

$$K(r,r',Z)=\int_0^\infty p^2 dp\, \frac{j_0(pr)\, j_0(pr')}{p^2-Z},$$

или

$$K(r,r',Z)=\frac{i\pi}{4rr'\sqrt{Z}}\left[e^{i\sqrt{Z}|r-r'|}-e^{i\sqrt{Z}(r+r')}\right], \tag{5}$$

$$\sqrt{Z} = \begin{cases} s, \ Z = s^2 + i0, \\ i\gamma, \ Z = -\gamma^2. \end{cases} \qquad (6)$$

Введем систему базисных функций $\phi_n(r)$, удовлетворяющих условию ортонормированности с весом потенциала:

$$\int_0^\infty r^2 dr\, V(r)\,\phi_m(r)\,\phi_n(r) = \delta_{mn}. \qquad (7)$$

Для знакопостоянных потенциалов $V(r)$ такую систему функций всегда можно построить[2], если в качестве $\phi_n(r)$ брать полиномы степени n ($n = 0,1,2,\ldots$) и если потенциал $V(r)$ удовлетворяет следующему условию интегрируемости:

$$\int_0^\infty r^2\, dr\, V(r) = M,$$

где M – конечная величина. Заметим, что для случая $\ell \neq 0$ при указанном способе выбора базисных функций следует положить $\phi_n(r) = r^\ell \phi_{\ell n}(r)$, где $\phi_{\ell n}(r)$ – по-прежнему полиномы степени n. Согласно методу Бубнова-Галеркина[5], представим $\Psi_k(r, Z)$ в виде:

$$\Psi_k(r, Z) = \sum_n C_n(k, Z)\,\phi_n(r). \qquad (8)$$

Используя разложение (8) и условие ортонормированности (7), из (3) и (4) получим следующее факторизованное выражение для $t(p,k,Z)$:

$$t(p,k,Z) = \sum_{mn} M_m(p)\,A^{-1}_{mn}(Z)\,M_n(k), \qquad (9)$$

где

$$M_n(p) = \int_0^\infty r^2\, dr\, \phi_n(r)\, V(r)\, j_0(pr)\,,$$

$$A_{mn}(Z) = \delta_{mn} - B_{mn}(Z)\,, \tag{10}$$

$$B_{mn}(Z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty p^2\, dp\, \frac{M_m(p)\, M_n(p)}{p^2 - Z}\,. \tag{11}$$

Следует заметить, что при получении факторизованного выражения (9) для $t(p,k,Z)$ разложение (8) $\Psi_k(r,Z)$ по полиномам используется только в области действия потенциала $V(r)$. Поведение волновой функции вне этой области определяется интегральным уравнением (3), в правой части которого можно использовать разложение (8).

2. Рассмотрим более конкретно класс простейших знакопостоянных потенциалов с двумя параметрами:

$$V(r) = V_0 f(\beta r)\,, \tag{12}$$

где V_0 - глубина потенциала, β - параметр, определяющий протяженность потенциала. Определим базисные функции $\phi_n(r)$ для следующих потенциалов:

1) потенциал Юкавы (Y): $f(\beta r) = \dfrac{e^{-\beta r}}{\beta r}$,

2) экспонента (E): $f(\beta r) = e^{-\beta r}$,

3) потенциал Гаусса (G): $f(\beta r) = e^{-\beta^2 r^2}$,

4) прямоугольная яма (SW): $f(\beta r) = \begin{cases} 1, & r < 1/\beta\,, \\ 0, & r > 1/\beta\,. \end{cases}$

Согласно (7), имеем (вводим безразмерные переменные, полагая $x = \beta r$):

1) $$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{V_0}} \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} \right]^{1/2} L_n^{(1)}(x),$$

2) $$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{V_0}} \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)} \right]^{1/2} L_n^{(2)}(x),$$

3) $$\phi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{V_0}} \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \right]^{1/2} L_n^{(1/2)}(x),$$

4) $$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} (2n+3)^{1/2} \; P_n^{(0,2)}(2x-1),$$

где $L_n^{(a)}(x)$ - полиномы Лаггера, $P_n^{(0,2)}(x)$ - полиномы Якоби, определение и нормировка которых соответствует/6/.

Используя для ортогональных полиномов их выражения через производящие функции или же их явный вид, легко получить в общем виде выражения для $M_n(p)$ (10) и с помощью (5) для $B_{mn}(Z)$ (11). Приведем в качестве примера явный вид $M_n(p)$ и $B_{mn}(Z)$ для потенциала Юкавы:

$$M_n(p) = \frac{\sqrt{V_0}\,(n+1)!}{(n+1)^{1/2}(1+p^2)^{n+1}} \sum_{\nu=1}^{E(\frac{n+2}{2})} (-1)^{1+\nu} \frac{p^{2n+2-2\nu}}{(2\nu-1)!\,(n+2-2\nu)!}, \quad (13)$$

$$B_{mn}(Z) = \frac{V_0}{2^{m+n+1}[(m+1)(n+1)]^{1/2}(1-i\sqrt{Z})^2} \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(m+n-\mu-\nu)!}{(m-\mu)!(n-\nu)!} \left(-\frac{2i\sqrt{Z}}{1-i\sqrt{Z}}\right)^{\mu+\nu},$$

где $E(x)$ – целая часть числа x, а $\sqrt{Z}$ определен согласно (5). Укажем также вид $M_n(p)$ для потенциала Гаусса и прямоугольной ямы:

$$(G): \quad M_n(p) = \sqrt{V_0}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2n+2}[n!\,\Gamma(n+\frac{3}{2})]^{1/2}}\, p^{2n} e^{-p^2/4}, \tag{14}$$

(SW):

$$M_n(p) = \frac{\sqrt{V_0}}{p^3}(2n+3)^{1/2} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^{n-\nu}(n+2+\nu)!}{(\nu+2)\nu!(n-\nu)!\,p^{\nu}} \left[S_\nu(p) - \sin\frac{\pi\nu}{2}\right], \tag{15}$$

где

$$S_\nu(p) = \sum_{\lambda=0}^{\nu+1} \frac{p^{\nu+1-\lambda}}{(\nu+1-\nu)!}\left(\sin p \sin\frac{\pi\lambda}{2} - \cos p \cos\frac{\pi\lambda}{2}\right).$$

3. Легко убедиться, что приближенное выражение (9) t -матрицы в факторизованном виде можно получить непосредственно из интегрального уравнения (1), если фурье-образ потенциала $V(p,k)$ представить в виде

$$V(p,k) = \sum_n M_n(p) M_n(k). \qquad (16)$$

Таким образом, функции $M_n(p)$ (10) осуществляют представление фурье-образа потенциала $V(p,k)$ в виде ряда с факторизованными членами, что следует также из выражения (2) и соотношения

$$\sum_n rr'[V(r)V(r')]^{1/2} \phi_n(r)\phi_n(r') = \delta(r-r'),$$

вытекающего из условия полноты функций $r\sqrt{V(r)}\phi_n(r)$.

С этой точки зрения метод Бубнова-Галеркина можно рассматривать как некоторую разновидность метода Бейтмана /4/ и ввести, как и в /4/, для оценки точности аппроксимации $V(p,k)$ величину χ^2_N :

$$\chi^2_N = \frac{\int_0^\infty dp \int_0^\infty dk\, [V(p,k) - V_N(p,k)]^2}{\int_0^\infty dp \int_0^\infty dk\, V^2(p,k)}, \qquad (17)$$

где

$$V_N(p,k) = \sum_{n=0}^{N} M_n(p) M_n(k), \qquad (18)$$

N - максимальный порядок полиномов, используемых в разложении (8).

В таблице 1 приведены значения χ^2_N для потенциалов Юкавы, Гаусса и прямоугольной ямы, найденные с использованием явного вида (13), (14) и (15) функций $M_n(p)$, причём интегралы в (17) вычисляются аналитически в бесконечных пределах.

Таблица 1

Значения χ^2_N (17) для потенциалов Юкавы (Y), Гаусса (G), прямоугольной ямы (SW) и экспоненты (E) в зависимости от N. Для экспоненты χ^2_N вычислены с базисными функциями (22)

N	Y	G	SW	E
0	$15{,}8 \cdot 10^{-2}$	$12{,}4 \cdot 10^{-2}$	$1{,}71 \cdot 10^{-2}$	$4{,}53 \cdot 10^{-2}$
1	$7{,}23 \cdot 10^{-2}$	$3{,}73 \cdot 10^{-2}$	$0{,}27 \cdot 10^{-2}$	$1{,}04 \cdot 10^{-2}$
2	$4{,}39 \cdot 10^{-2}$	$1{,}80 \cdot 10^{-2}$	$0{,}09 \cdot 10^{-2}$	$0{,}4 \cdot 10^{-2}$
3	$3{,}03 \cdot 10^{-2}$	$1{,}08 \cdot 10^{-2}$		

Следует обратить внимание на очень малые значения χ^2_N для прямоугольной ямы, что, очевидно, связано с хорошей аппроксимацией полиномами функций в конечном интервале изменения независимой переменной.

Характер аппроксимации $V(p,k)$ с помощью функций $M_n(p)$ особенно наглядно виден на примере потенциала Гаусса. В этом случае имеем, согласно (14), (16) и (18):

$$V(p,k) = \frac{V_0\sqrt{\pi}}{2pk}\, e^{-\frac{p^2+k^2}{4}}\, \mathrm{sh}\frac{pk}{2} = \frac{V_0\sqrt{\pi}}{4}\, e^{-\frac{p^2+k^2}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{pk}{2}\right)^{2n}, \tag{19}$$

$$V_N(p,k) = \frac{V_0\sqrt{\pi}}{4}\, e^{-\frac{p^2+k^2}{4}} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{pk}{2}\right)^{2n}, \tag{20}$$

т.е. факторизованное приближение $V_N(p,k)$ представляет собой сумму $N+1$ первых членов знакопостоянного равномерно сходящегося ряда (19). При этом в качестве меры точности аппроксимации можно ввести отношение ϵ_N последнего слагаемого в сумме (20) к первому, которое определит для заданного значения $\epsilon_N^{(0)}$ в плоскости p,k гиперболу

$$pk = 2\left[(2N+1)!\,\epsilon_N^{(0)}\right]^{\frac{1}{2}N},$$

слева от которой $\epsilon_N \leq \epsilon_N^{(0)}$.

В случае других потенциалов границы точности аппроксимации $V(p,k)$ выражением (18) будут также определяться в плоскости p,k кривыми гиперболического типа, так как из свойств ортогональных полиномов $\phi_n(r)$ и из (16) следует:

$$M_n(0) = \delta_{n0} M_0(0), \quad V(p,0) = M_0(p)\, M_0(0). \tag{21}$$

В качестве примера на рис. 1 и 2 приведены графики зависимости от k $V(k,k)$ и $V_N(k,k)$ для нескольких значений N соответственно для потенциала Юкавы и для прямоугольной ямы.

4. Указанный выше способ выбора базисных функций $\phi_n(r)$ (7) не является единственно возможным. Например, для экспоненциального потенциала $V_0 e^{-x}$ $(x=\beta r)$ можно ввести функции $\phi_n(r)$ вида:

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{V_0}} \frac{1-e^{-x}}{x} P_n(e^{-x}), \tag{22}$$

где $P_n(z)$ – полиномы, выражающиеся через полиномы Якоби:

$$P_n(z) = (2n+3)^{1/2} P_n^{(2,0)}(2z-1).$$

В этом случае, как и прежде, система функций $\phi_n(r)$ является полной и для $V(p,k)$ по-прежнему имеет место разложение (16), где $M_n(p)$ имеют, согласно (22) и (10), следующий вид:

$$M_n(p) = \sqrt{V_0} \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} \left[\frac{1}{p^2+(\nu+1)^2} - \frac{1}{p^2+(\nu+2)^2} \right],$$

$$b_{n\nu} = (-1)^{n-\nu} \frac{(2n+3)^{1/2}}{(n+1)(n+2)} \frac{(n+2+\nu)!}{(n-\nu)!\,(\nu!)^2}. \tag{23}$$

Следует заметить, что в данном случае соотношения (21) не выполняются. Используя явный вид (23) функций $M_n(p)$ можно, как и прежде, аналитически вычислить χ_N^2. Полученные значения χ_N^2 для $N=0,1,2$ приведены в последнем столбце таблицы 1. Видно, что эти значения оказались близкими к значениям χ_N^2 для прямоугольной ямы. Аналогичную процедуру улучшения выбора базисных функций с точки зрения аппроксимации $V(p,k)$ можно проделать также и для потенциала Юкавы.

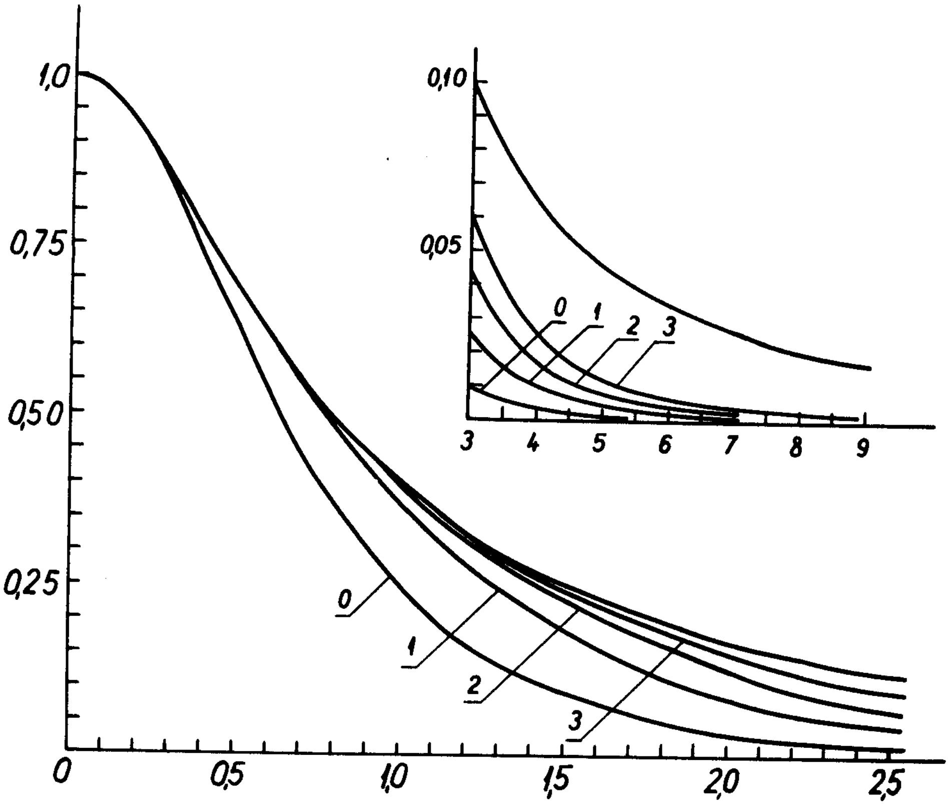

Рис. 1. Зависимость от k факторизованного приближения $V_N(k,k)$ фурье-образа $V(k,k)$ потенциала Юкавы. По оси абсцисс отложены значения k/β, по оси ординат $\frac{V(k,k)}{V(0,0)}$. Индексы на кривых соответствуют значениям N в разложении (18), кривая без индекса – точное значение фурье-образа $V(k,k)$ (2).

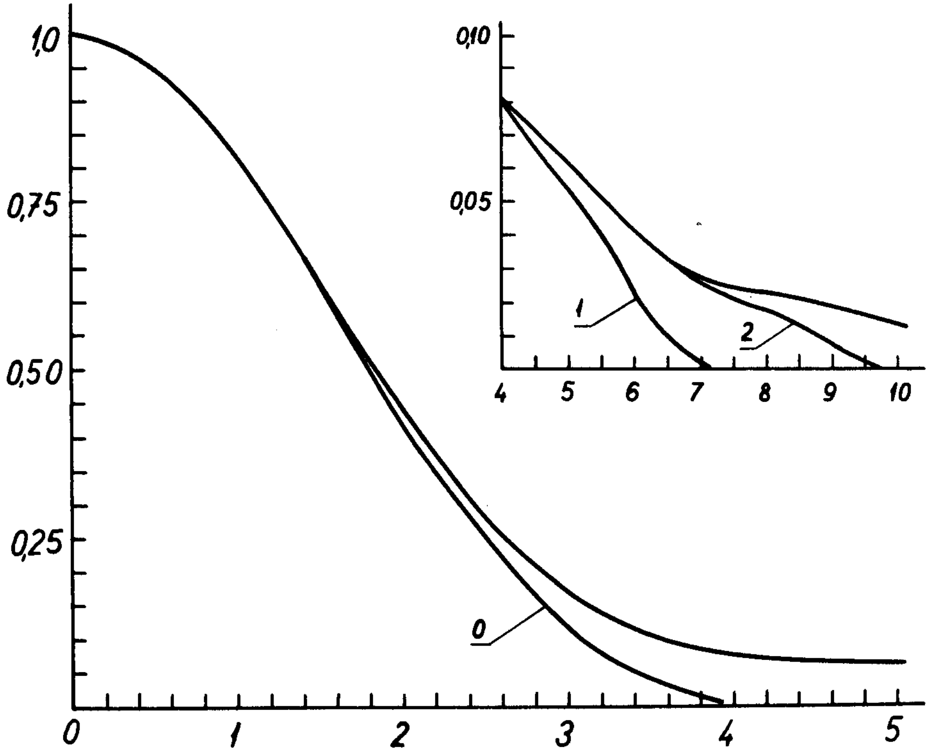

Рис. 2. Зависимость от k факторизованного приближения $V_N(k,k)$ фурье-образа $V(k,k)$ потенциала в виде прямоугольной ямы (см. подпись к рис. 1).

5. Рассмотрим вопрос о сходимости процесса факторизации t -матрицы с помощью метода Бубнова-Галеркина. Фактически этот метод используется для приближенного решения интегрального уравнения (3). Приближенное решение $\Psi_k^{(N)}(r,Z)$ этого уравнения, построенное по методу Бубнова-Галеркина, согласно[5], сходится к точному решению $\Psi_k(r,Z)$ в среднем, если потенциал $V(r)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) при $r \to 0$ $V(r) \approx r^{-a}$, где $a<2$; 2) при $r \to \infty$ $V(r) \approx e^{-\mu r}$, где $\mu > 0$, или $V(r) = 0$ при $r > r_0$, где r_0 - радиус действия потенциала. В этом случае, согласно определению скалярного произведения (7), имеем:

$$\int_0^\infty r^2\, dr\, V(r)\, |\Psi_k(r,Z) - \Psi_k^{(N)}(r,Z)|^2 \to 0 \qquad \text{при} \quad N \to \infty .$$

Тогда из соотношения (4) следует:

$$|t(p,k,Z) - t^{(N)}(p,k,Z)|^2 \leq \epsilon_N ,$$

где

$$\epsilon_N^2 = \int_0^\infty r^2\, dr\, V(r)\, j_0^2(pr) \int_0^\infty r^2 dr\, V(r)\, |\Psi_k(r,Z) - \Psi_k^{(N)}(r,Z)|^2 ,$$

т.е. для t -матрицы имеет место абсолютная сходимость.

§2. Факторизация t -матрицы для знакопеременных потенциалов и для бесконечно большого отталкивательного потенциала (твердый кор)

1. Для удовлетворительной интерпретации нуклон-нуклонных фаз рассеяния в широкой области энергий часто используются феноменологические потенциалы вида

$$V(r) = -V_1(r) + V_2(r), \tag{24}$$

представляющие собой суперпозицию двух потенциалов типа (12): притягивающего с большим радиусом действия и отталкивательного с малым радиусом действия/7/. Для таких знакопеременных потенциалов нельзя построить систему базисных функций типа (7), однако эти функции можно определить в отдельности для каждого из потенциалов, входящих в суперпозицию (24). Тогда, согласно (16), фурье-образ $V(p,k)$ потенциала (24) будет иметь вид:

$$V(p,k) = \sum_{\nu n_\nu} \epsilon_\nu M^{(\nu)}_{n_\nu}(p) M^{(\nu)}_{n_\nu}(k), \tag{25}$$

где $\epsilon_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1,2$.

Подставляя выражение (25) непосредственно в интегральное уравнение (1), получим факторизованное выражение для t -матрицы:

$$t(p,k,Z) = \sum_{\mu m_\mu \nu n_\nu} \epsilon_\mu M^{(\mu)}_{m_\mu}(p) A^{-1}_{\mu m_\mu;\nu n_\nu}(Z) M^{(\nu)}_{n_\nu}(k),$$

где

$$A_{\mu m_\mu;\nu n_\nu}(Z) = \delta_{\mu\nu}\delta_{m_\mu n_\nu} - \epsilon_\nu B_{\mu m_\mu;\nu n_\nu}(Z),$$

$$B_{\mu m_\mu;\nu n_\nu}(Z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty p^2 dp \frac{M^{(\mu)}_{m_\mu}(p) M^{(\nu)}_{n_\nu}(p)}{p^2 - Z}.$$

2. Выражение (16) фурье-образа знакопостоянного потенциала через функции $M_n(p)$ может быть использовано для получения приближенного факторизованного выражения для t -матрицы, соответствующей бесконечно большому отталкивающему потенциалу (твердому кору):

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r < r_c \\ 0, & r > r_c \end{cases} . \tag{26}$$

Для такого потенциала известен точный вид t -матрицы /8/:

$$t_c(p,k,Z) = \frac{1}{2}(2Z - p^2 - k^2) f(p,k) -$$

$$- \frac{1}{2pk}(p \cos pr_c \sin kr_c + k \cos kr_c \sin pr_c) + \frac{i\sqrt{Z}}{pk} \sin pr_c \sin kr_c , \tag{27}$$

где

$$f(p,k) = \frac{1}{2pk}\left[\frac{\sin(p-k)r_c}{p-k} - \frac{\sin(p+k)r_c}{p+k}\right],$$

т.е. $f(p,k)$ представляет собой фурье-образ потенциала прямоугольной формы с радиусом r_c и глубиной $V_0 = 1$. Заменяя $f(p,k)$ приближенным выражением (18), можно получить для (27) следующее факторизованное приближение:

$$t_c^{(N)}(p,k,Z) = \sum_{n=0}^{N+1} \{ L_n(p, Z) M_n(k) + M_n(p) L_n(k,Z) \} , \tag{28}$$

где

$$L_n(p,Z) = r_c^2 (Z - p^2) M_n(p) ,$$

$$0 \le n \le N ,$$

$$M_n(p) = \left(\frac{r_c}{2}\right)^{1/2} \bar{M}_n(pr_c) ,$$

$$L_{N+1}(p,Z) = \left(\frac{r_o}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{i r_o \sqrt{\bar{Z}} \sin p r_o}{p r_o} - \cos p r_o\right),$$

$$M_{N+1}(p) = \left(\frac{r_o}{2}\right)^{1/2} \frac{\sin p r_o}{p r_o},$$

$\bar{M}_n(x)$ определяется выражением (15) при $V_0 = 1$.

На массовой поверхности $p = k$, $Z = k^2 + i0$ факторизованное выражение для t-матрицы (28) в любом приближении совпадает с точной амплитудой рассеяния на потенциале (26):

$$t_o^{(N)}(k, k, k^2 + i0) = f_o(k) = -\frac{1}{k} \sin k r_o e^{-ik r_o}.$$

Из характера аппроксимации $V(p,k)$ конечной суммой (18) и из рис. 2 следует, что при $N = 1$ выражение (28) будет воспроизводить точную t-матрицу (27) с точностью не хуже нескольких процентов в области значений p и k, удовлетворяющих условию $(pk r_o^2)^{1/2} \leq 4$.

Литература

1. Л.Д. Фаддеев. Труды математического института АН СССР, 69, 1963.
2. V.N. Efimov. Comptes Rendus du Congres International de Physique Nucleare, v.II, p.258, Paris, 1964.

   В.Н. Ефимов. Препринт ОИЯИ, Р-2546, Дубна, 1966.
3. Л.Д. Фаддеев. Доклад на V Международной конференции по физике электронных и атомных столкновений. "Наука", Ленинград, 1967.

   A.G. Sitenko, V.F. Kharchenko, N.M. Petrov. Phys.Letters, 28B, 308 (1968).

   А.Г. Ситенко, В.Ф. Харченко. Препринт ИТФ-69-72, Киев, 1969.
4. В.Б. Беляев, Е. Вжеционко. Препринт ОИЯИ, Р4-4144, Дубна, 1968.

   Б. Ахмадходжаев, В.Б. Беляев, Е. Вжеционко. Письма в ЖЭТФ, 9, 692 (1969).

   В.Б. Беляев, А.Л. Зубарев. Препринт ОИЯИ, Р1-5345, Дубна, 1970.
5. С.Т. Михлин. Вариационные методы в математической физике. ГИТТЛ, Москва, 1957.

6. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, Москва, 1962.
7. R.A. Malfliet, J.A. Tjon. Nucl.Phys., A127, 161 (1969).
G. Darewych, A.E.C. Green. Phys.Rev., 164, 1324 (1967).
8. J.M.J. Van Leeuwen, A.S. Reiner. Physica, 27, 99 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
9 апреля 1971 года.