ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

4 - 4109

Г.Н.Потетюнко

НОМОГРАММЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ ТИПА I + II = 1 + 2 ПРИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭНЕРГИЯХ

4 - 4109

Г.Н.Потетюнко

НОМОГРАММЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ ТИПА I + II = 1 + 2 ПРИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭНЕРГИЯХ

§1. Вводные замечания

Предлагаются номограммы для решения задач кинематики ядерных реакций бинарного типа $I + II = 1 + 2$ при нерелятивистских энергиях. Использованы следующие обозначения:

I – падающая частица,

II – частица мишени,

1 – легкий продукт реакции,

2 – ядро отдачи,

E_I – энергия пучка в лабораторной системе координат,

E_1 и E_2 – энергии частиц 1 и 2 в л.с.к.

E'_1 и E'_2 – то же в системе центра масс,

Θ_1, Θ_2 и $\theta_{лаб}$ – углы вылета частиц 1 и 2 в л.с.к.,

$\theta_{цм}$ – угол вылета в с.ц.м.,

$\sigma_{лаб}$ – дифференциальное эффективное сечение в л.с.к.,

$\sigma_{цм}$ – то же в с.ц.м.,

Q – энерговыделение реакции,

m_I, m_{II}, m_1, m_2 – массы частиц $I, II, 1$ и 2,

$$M = m_I + m_{II} = m_1 + m_2 .$$

На номограммах решаются следующие кинетические задачи:

1-ая задача – пересчёт углов вылета из л.с.к. в с.ц.м.;

2-ая задача – определение угла Θ_2 по известному Θ_1 (или наоборот);

3-я задача – пересчёт дифференциальных эффективных сечений из л.с.к. в с.ц.м.;

4-ая задача – определение энергии E_1 по известным Θ_1 и Q;

5-ая задача – определение Q реакции при известных E_1 и Θ_1.

В заключение приводится номограмма для определения высоты потенциального барьера.

Основные формулы для нерелятивистского случая имеют следующий вид/1/:

$$\mathrm{ctg}\,\Theta_1 = \frac{\rho_1 + \cos\theta_{ЦМ}}{\sin\theta_{ЦМ}} \tag{1}$$

$$\mathrm{ctg}\,\Theta_2 = \frac{\rho_2 - \cos\theta_{ЦМ}}{\sin\theta_{ЦМ}} \tag{2}$$

$$\cos\theta_{ЦМ} = -\rho_1 \sin^2\Theta_1 \pm \cos\Theta_1 \sqrt{1-\rho_1^2\sin^2\Theta_1} \tag{3}$$

$$\mathrm{ctg}\,\Theta_2 = \frac{-(\quad+\rho_1\rho_2)\cos\Theta_1 \pm (\rho_1+\rho_2)\sqrt{1-\rho_1^2\sin^2\Theta_1}}{(1-\rho_1^2)\sin\Theta_1} \tag{4}$$

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{A_1 E_I}{E_I - E_{It}}} \tag{5}$$

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{A_2 E_I}{E_I - E_{It}}} \tag{6}$$

$$A_1 = \frac{m_I m_1}{m_{II} m_2} \qquad A_2 = \frac{m_I m_2}{m_{II} m_1} \qquad E_{It} = -Q\frac{M}{m_{II}}$$

$$\frac{\rho_1}{m_1} = \frac{\rho_2}{m_2}$$

$$E_1 - p_1\sqrt{E_1} + q_1 = 0 \tag{7}$$

$$p_1 = 2\frac{\sqrt{m_I m_1}}{M}\sqrt{E_I}\cos\Theta_1 \tag{8}$$

$$q_1 = -\frac{1}{M}\left[m_2 Q + (m_2 - m_I)E_I\right] \tag{9}$$

$$\sqrt{E_1} = \frac{\sqrt{m_I m_1 E_I}}{M}\cos\Theta_1 \pm \frac{\sqrt{m_I m_1 E_I\cos^2\Theta_1 + M\left[m_2 Q + (m_2 - m_I)E_I\right]}}{M} \tag{10}$$

$$Q = \frac{1}{m_2}\left[M E_1 - 2\sqrt{m_I m_1 E_I E_1}\cos\Theta_1 + (m_2 - m_I)E_I\right] \qquad (11)$$

$$E'_1 = \frac{m_2 m_{II}}{M}(E_I - E_{It}) \qquad (12а)$$

$$E'_2 = \frac{m_1 m_{II}}{M}(E_I - E_{It}) \qquad (12б)$$

$$\frac{\sigma_{цм}}{\sigma_{лаб}} = \frac{\sqrt{1-\rho^2\sin^2\theta_{лаб}}}{\left(\sqrt{1-\rho^2\sin^2\theta_{лаб}} \pm \rho\cos\theta_{лаб}\right)^2}\,. \qquad (13)$$

Для решения первых трех задач необходимо предварительно на вспомогательных номограммах определить параметры ρ_1 и ρ_2, представляющие собою отношение переносной скорости (т.е. скорости системы центра масс относительно л.с.к.) к скорости частицы (1 или 2) в с.ц.м. Номограммы построены для случая $\rho_1 \leq 1$. При этом для решения первой и третьей задач необходимо знать только один параметр – ρ_1 или ρ_2 (в зависимости от того, каким продуктом реакции мы интересуемся), а для решения второй задачи необходимо знать оба параметра – ρ_1 и ρ_2. Порядок решения на номограммах первой задачи ясен из схемы пользования (см. приложение). Опишем порядок решения второй задачи.

а) Определяем параметры ρ_1 и ρ_2.

б) По известным ρ_1 и Θ_1 на номограмме определяем $\theta_{цм}$.

в) Вычисляем угол $\tilde{\theta}_{цм} = \pi - \theta_{цм}$.

г) По известным $\tilde{\theta}_{цм}$ и ρ_2 на номограмме определяем $\theta_{лаб}$; полученное значение есть Θ_2.

При $\rho_2 > 1$ угол Θ_2 вычисляется по формуле (2).

Для решения третьей задачи служит номограмма, помещенная на развороте настоящего препринта. Метод пользования номограммой ясен из схемы пользования. Отметим некоторые особенности этой номограммы.

Шкала $\sigma_{лаб}$ построена в пределах от 1 до 10 произвольных единиц. Шкала $\sigma_{цм}$ дана в тех же единицах, что и шкала $\sigma_{лаб}$. Участок шкалы $\sigma_{лаб}$ от 1 до 3,162 помещен с левой, а от 3,162 до 10 – с правой стороны носителя. Соответственно этому шкала $\sigma_{цм}$ также разбита на два участка – левый и правый, при этом левой стороне шкалы $\sigma_{лаб}$ соответствует левая же сторона шкалы $\sigma_{цм}$, а правой – правая.

Порядок решения четвертой задачи следующий:

а) на вспомогательных номограммах определяем p_1 и q_1 ;

б) зная p_1 и q_1, на основной номограмме определяем E_1 .

Пятая задача решается следующим образом:

а) на вспомогательной номограмме определяем p_1 ;

б) зная p_1 и E_1 , на основной номограмме определяем q_1 ;

в) зная q_1 , на второй вспомогательной номограмме (или путем непосредственных вычислений) определяем Q .

Вспомогательные номограммы для определения p_1 приводятся (см. приложение). Одна из них построена для случая $E_I \leq 25$ Мэв и $0{,}01 \leq \sqrt{m_I m_1}/M \leq 0{,}1$, а другая – для случая 25 Мэв $\leq E_I \leq$ $\leq$ 200 Мэв и $0{,}00? < \sqrt{m_I m_1}/M \leq 0{,}07$.

Если при работе с первой вспомогательной номограммой величина $\sqrt{m_I m_1}/M$ окажется меньше, чем 0,01, то поступаем следующим образом: увеличиваем $\sqrt{m_I m_1}/M$ в 10 раз и находим p_1 для увеличенного значения $\sqrt{m_I m_1}/M$, после чего полученное значение p_1 уменьшаем в 10 раз. При $\sqrt{m_I m_1}/M > 0{,}1$ поступаем наоборот. Совершенно аналогично поступаем и при работе со второй вспомогательной номограммой.

Вспомогательная номограмма для уравнения (9) для каждой конкретной реакции должна строиться отдельно. Сама номограмма весьма проста и строится очень быстро. Опишем порядок ее построения.

Предположим, что нам заданы Q и пределы изменения $E_I - E_{I\,min}$ и $E_{I\,max}$.

а) Вычисляем q_1 для $E_I = E_{I\,min}$ и $E_I = E_{I\,max}$.

б) На листе миллиметровой бумаги выбираем оси декартовой системы координат. По вертикальной оси будем откладывать q_1 , а по горизонтальной – E_I .

в) На горизонтальной оси в произвольном масштабе строим шкалу E_I .

г) На вертикальной оси в произвольном масштабе строим шкалу q_1 .

д) Наносим две точки, соответствующие значениям q_1, вычисленным для $E_I = E_{I\,min}$ и $E_I = E_{I\,max}$ и проводим через них прямую линию. Номограмма готова.

Если Q неизвестно, то наносим несколько прямых, соответствующих нескольким значениям Q вблизи ожидаемого.

Предлагаемые номограммы могут быть использованы не только для решения перечисленных выше кинематических задач, но и для анализа влияния погрешностей эксперимента на погрешности определения ответных величин. Проиллюстрируем это на примере номограммы, предназначенной для пересчёта сечений из л.с.к. в с.ц.м.

На погрешность определения $\Delta\sigma_{цм}$ оказывают влияние, в частности, следующие факторы:

а) погрешность $\Delta\sigma_{лаб}$ определения сечения в л.с.к.;

б) погрешность ΔE_I в определении энергии пучка, которая, в свою очередь, складывается из двух величин - погрешности, определяемой статистическим разбросом частиц пучка по энергиям, и погрешности, возникающей при измерении энергии пучка;

в) погрешность $\Delta\theta_{лаб}$, определяемая неточностью в определении угла вылета, и погрешностью, определяемой величиной телесного угла, "вырезаемого" детектором.

Погрешность $\Delta\sigma'_{цм}(\Delta\sigma_{лаб})$, определяемая величиной $\Delta\sigma_{лаб}$, находится на номограмме так же, как и $\sigma_{цм}$, с той лишь разницей, что на шкале $\sigma_{лаб}$ отсчитывается $\Delta\sigma_{лаб}$, и на шкале $\sigma_{цм} - \Delta\sigma_{цм}$. Для анализа влияния погрешности $\Delta\sigma_{лаб}$ на $\Delta\sigma'_{цм}$ поступим следующим образом: через точку, в которой сливаются все кривые сетчатой номограммы, проведем мысленно горизонтальную прямую. Для точек сетчатой номограммы, лежащей на этой прямой, $\Delta\sigma'_{цм}/\Delta\sigma_{лаб} = 1$, т.е. $\Delta\sigma'_{цм} = \Delta\sigma_{лаб}$. В частности, при $\rho \ll 1$ для любых ρ и $\theta_{лаб}$ с хорошей точностью выполняется равенство $\Delta\sigma'_{цм} \approx \Delta\sigma_{лаб}$. Для точек сетчатой номограммы, лежащих ниже указанной выше прямой, отношение $\Delta\sigma'_{цм}/\Delta\sigma_{лаб}$ меньше единицы и уменьшается по мере удаления от прямой, а для точек, лежащих выше этой прямой, отношение $\Delta\sigma'_{цм}/\Delta\sigma_{лаб}$ больше единицы и увеличивается по мере удаления от горизонтальной прямой. Особенно больших значений отношение $\Delta\sigma'_{цм}/\Delta\sigma_{лаб}$ достигает при ρ, близких к единице, и $\theta_{лаб}$, лежащих в задней полусфере.

Погрешность ΔE_1 входит в номограмму через $\Delta\rho$. Величина $\Delta\rho$ в каждом конкретном случае должна находиться отдельно. При $\rho \ll 1$ погрешность $\Delta\rho$ обычно очень мала и ею можно пренебречь. Другими словами, при $\rho \ll 1$ величиной $\Delta\sigma''_{цм}(\Delta E_1)$, определяемой погрешностью ΔE_1, в большинстве случаев можно пренебречь. Больше того, можно указать допустимые значения ΔE_1, т.е. такие, которые почти не сказываются на погрешности $\Delta\sigma''_{цм}$. В некоторых случаях (например, при $|Q|/E_1 \ll 1$) допустимые значения ΔE_1 могут принимать весьма большие значения.

В тех случаях, когда кривые на сетчатой номограмме идут почти горизонтально (например, при $\rho \approx 0.3 \div 0.5$ и $\theta_{лаб} \approx 78^{\circ} \div 80^{\circ}$) даже очень большие погрешности $\Delta\rho$ почти никак не сказываются на величине погрешности $\Delta\sigma''_{цм}$, а при ρ, близких к единице, и $\theta_{лаб}$, лежащих в задней полусфере, даже незначительные погрешности $\Delta\rho$ приводят к очень большим погрешностям $\Delta\sigma''_{цм}$.

Погрешность $\Delta\sigma'''_{цм}(\Delta\theta_{лаб})$, зависящая от погрешности $\Delta\theta_{лаб}$, определяется величиной вертикального отрезка на сетчатой номограмме, равного при заданном ρ расстоянию между соответствующими кривыми $\theta_{лаб}$. На номограмме ясно видно, что при $\rho \ll 1$ погрешностью $\Delta\sigma'''_{цм}$ можно пренебречь и допустимые значения $\Delta\theta_{лаб}$ в этом случае могут принимать весьма большие значения. При ρ, близких к единице, и $\theta_{лаб}$, лежащих в задней полусфере, даже незначительные погрешности $\Delta\theta_{лаб}$ приводят к очень большим погрешностям $\Delta\sigma'''_{цм}$.

§2. Уравнения элементов номограмм

В настоящем параграфе приводятся уравнения элементов и отмечаются некоторые особенности основных кинематических номограмм. Вспомогательные номограммы (т.е. номограммы для определения ρ и ρ_1) не рассматриваются. (Заметим мимоходом, что сделанное в предыдущем параграфе разделение номограмм на основные и вспомогательные в значительной мере условно и служит, главным образом, для удобства изложения).

Напомним один факт из номографии. Рассматриваемые ниже уравнения являются частыми случаями более общего уравнения следующего вида:

$$f_1(\alpha_1)f_3(\alpha_3)+f_2(\alpha_2)g_3(\alpha_3)+h_3(\alpha_3)=0. \qquad (14)$$

Здесь $f_i(\alpha_i)$ $(i=1,2,3)$, $g_3(\alpha_3)$ и $h_3(\alpha_3)$ – произвольные непрерывные функции своих аргументов. В номографии уравнение (14) называется уравнением формы Коши/2,3,4/. Уравнения элементов номограммы формы Коши приведены в табл. 1.

Таблица 1

Координаты	Шкала α_1	Шкала α_2	Шкала α_3
X	0	d	$\dfrac{d}{1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\dfrac{f_3}{g_3}}$
Y	$\mu_1 f_1$	$h+\mu_2 f_2$	$\dfrac{h-\mu_2\dfrac{h_3}{g_3}}{1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\dfrac{f_3}{g_3}}$

Из таблицы 1 видно, что носителем шкалы α_1 служит прямая $X=0$, носителем шкалы α_2 – прямая $X=d$, а носитель шкалы α_3 – кривая линия. Схема номограммы приведена на рис. 1. Параметры μ_1, μ_2, d и h имеют простой геометрический смысл: величины μ_1 и μ_2 – это масштабные множители шкал α_1 и α_2; величина d есть расстояние между носителями шкал α_1 и α_2; параметр h позволяет сдвигать шкалу α_2 вдоль своего носителя. Методика подбора численных значений параметров при номографировании конкретного уравнения подробно описана в книге Б.А.Невского/3/ и иллюстрируется ниже на конкретном примере.

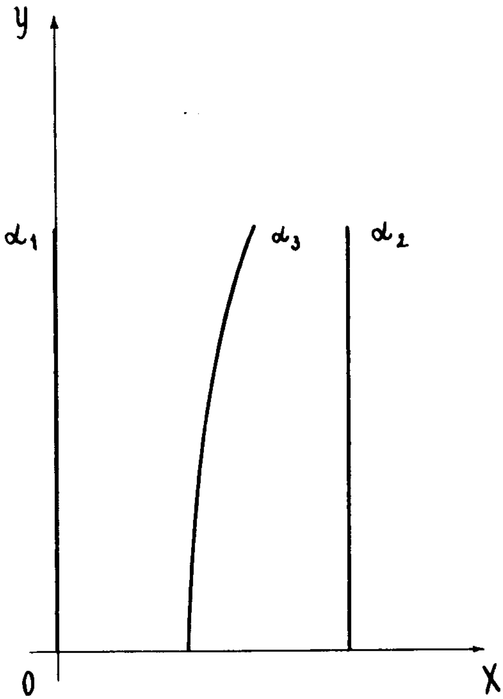


Рис.1.

Отметим еще одну характерную особенность номограмм формы Коши. Исключая из уравнений третьего столбца табл. 1 параметр α_3, получаем уравнение носителя шкалы α_3:

$$F(X, Y) = 0, \tag{15}$$

а деля нижнее уравнение на верхнее, получаем уравнение пучка прямых, зависящих от α_3:

$$Y = \frac{X}{d}\left(h - \mu_2 \frac{h_3}{g_3}\right). \tag{16}$$

На любой прямой пучок прямых (16) образует некоторую шкалу a_3. Таким образом, криволинейная шкала a_3 представляет собою совокупность носителя шкалы – кривой (15) и пучка прямых (16), зависящих от a_3. Другими словами, криволинейная шкала a_3 образуется проецированием на криволинейный носитель (15) некоторой прямолинейной шкалы a_3. Центр проецирования находится в начале координат. В качестве носителя проецируемой шкалы a_3 может служить любая прямая, в частности – прямая $X = d$, т.е. носитель шкалы a_2. В этом случае уравнение проецируемой шкалы a_3 имеет следующий вид:

$$Y = h - \mu_2 \frac{h_3}{g_3} .$$

На практике в ряде случаев проецируемая шкала a_3 совпадает со шкалой a_2. Если это обстоятельство имеет место, и если центр проецирования и носитель занимают достаточно удобное взаимное положение, то построение шкалы a_3 существенно упрощается: достаточно просчитать сравнительно небольшое число точек шкалы a_3, необходимых для вычерчивания самого носителя (например, при размерах номограммы 250 х х 180 мм и достаточно большом радиусе кривизны носителя можно просчитать 15 -: 20 точек), сама же шкала a_3 наносится на носитель путем проецирования шкалы a_2; посчитанные точки шкалы a_3 могут служить для контроля правильности проецирования. Проецирование очень удобно осуществлять при помощи прямой, нанесенной на какой-либо прозрачный легко прокалываемый (но достаточно упругий) материал (например, на картографический пластик, фотопленку и др.) и закрепленной при помощи иглы в центре проецирования (так что прямая свободно вращается вокруг центра проецирования).

а) Номографирование уравнений (1) и (2).

Оба уравнения (1) и (2) – можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{ctg} \theta_{\text{лаб}} = \frac{\rho + \cos \theta_{\text{цм}}}{\sin \theta_{\text{цм}}} . \tag{17}$$

Уравнение (17) по своему виду полностью совпадает с уравнением (1) и отличается от него лишь тем, что отсутствует индекс у ρ и обозначение Θ_1 заменено на $\theta_{\text{лаб}}$; уравнение (2) приводится к виду уравнения (17) заменой $\theta_{\text{цм}}$ на $\pi - \theta_{\text{цм}}$.

Первая задача сводится к решению уравнения (1) относительно $\theta_{\text{цм}}$, она решается одним наложением линейки. Вторая задача решается в два этапа: сначала из уравнения (1) находится $\theta_{\text{цм}}$, после чего, зная $\theta_{\text{цм}}$, из уравнения (2) определяем Θ_2 .

Для получения уравнений элементов номограммы приводим уравнение (17) к виду формы Коши (14):

$$\rho \cdot 1 + (-\operatorname{ctg}\theta_{\text{лаб}})\sin\theta_{\text{цм}} + \cos\theta_{\text{цм}} = 0 . \tag{18}$$

Уравнения элементов номограммы формы (18) приведены в табл. 2.

Таблица 2

Координаты	Шкала ρ	Шкала $\theta_{\text{лаб}}$	Шкала $\theta_{\text{цм}}$
X	0	d	$\dfrac{d}{1 + \dfrac{\mu_2}{\mu_1}\dfrac{1}{\sin\theta_{\text{цм}}}}$
Y	$\mu_1 \cdot \rho$	$h - \mu_2 \operatorname{ctg}\theta_{\text{лаб}}$	$\dfrac{h - \mu_2 \operatorname{ctg}\theta_{\text{цм}}}{1 + \dfrac{\mu_2}{\mu_1}\dfrac{1}{\sin\theta_{\text{цм}}}}$

Носителем шкалы $\theta_{\text{цм}}$ служит кривая второго порядка

$$\left[\frac{h^2}{\mu_2^2} + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} - 1\right] X^2 + \frac{d^2}{\mu_1^2} Y^2 + 2\frac{dh}{\mu_1\mu_2} XY - 2d\left(\frac{h^2}{\mu_2^2} - 1\right) X -$$

$$-2\frac{d^2h}{\mu_1\mu_2}Y+\left(\frac{h^2}{\mu_2^2}-1\right)d^2=0, \qquad (19)$$

вид которой зависит от значений величин μ_1, μ_2 и h /5,6/. Проецируемая прямолинейная шкала $\theta_{цм}$, расположенная на носителе $X = d$, имеет следующий вид:

$$Y = h - \mu_2 \operatorname{ctg}\theta_{цм},$$

т.е. полностью совпадает со шкалой $\theta_{лаб}$. Таким образом, шкала $\theta_{цм}$ образуется проецированием на кривую (19) из точки $\rho = 0$ шкалы $\theta_{лаб}$. Этот факт из других соображений был ранее отмечен Р.И.Новобрановой /7/ и при построении рабочих номограмм широко нами использовался.

б) Номографирование уравнения (13)

Логарифмируя, приводим уравнение (13) к виду так называемой второй канонической формы

$$f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) = f_3(\alpha_3),$$

которая является частным случаем формы Коши (14)

$$\lg\sigma_{цм} - \lg\sigma_{лаб} = \lg A,$$

где

$$A = \frac{\sqrt{1-\rho^2\sin^2\theta_{лаб}}}{\left(\sqrt{1-\rho^2\sin^2\theta_{лаб}}+\rho\cos\theta_{лаб}\right)^2}.$$

Поскольку номограмма строится для случая $\rho \le 1$, то в знаменателе берем только знак плюс. Уравнения элементов номограммы приведены в табл. 3.

Таблица 3

Координаты	Шкала $\sigma_{лаб}$	Шкала $\sigma_{цм}$	Шкала A
X	0	$\dfrac{d}{1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}$	d
Y	$\mu_1\lg\sigma_{лаб}$	$\dfrac{h}{1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}+\dfrac{\mu_2}{1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}\lg\sigma_{цм}$	$h+\mu_2\lg A$

в) Номографирование уравнения (7)

Приводим уравнение (7) к виду формы Коши :

$$(-p_1)\sqrt{E_1} + q_1 \cdot 1 + E_1 = 0 . \qquad (20)$$

Уравнения элементов номограммы формы (20) приведены в табл. 4.

Таблица 4

Координаты	Шкала p_1	Шкала q_1	Шкала E_1
X	0	d	$\dfrac{d}{1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\sqrt{E_1}}$
Y	$-\mu_1 p_1$	$h+\mu_2 q_1$	$\dfrac{h-\mu_2 E_1}{1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\sqrt{E_1}}$

Носителем шкалы E_1 служит ветвь гиперболы

$$Y = \frac{h}{d}X - \frac{\mu_1^2}{\mu_2 d}\,\frac{(d-X)^2}{X} , \qquad (21)$$

которой соответствуют положительные значения $\sqrt{E_1}$ (согласно законам сохранения импульса величин $\sqrt{E_1}$ пропорциональна скорости частиц 1; следовательно, отрицательные значения $\sqrt{E_1}$ физического смысла не имеют). Если проектируемую шкалу E_1 расположить на прямой $X = d$, то ее уравнение примет вид:

$$Y = h - \mu_2 E_1 .$$

Эта шкала совпадает со шкалой q_1 и отличается от нее только знаком пометок. Таким образом, шкала E_1 образуется проецированием на гиперболу (21) отрицательной части шкалы q_1.

В заключение проиллюстрируем на конкретном примере порядок компоновки и расчёта номограммы формы Коши.

1) Выбираем следующие пределы изменения переменных p_1 и q_1:

$$-1 \leq p_1 \leq 1 \qquad\qquad -110 \leq q_1 \leq -85 \ .$$

2) Задаемся высотой номограммы, равной 250 мм.

3) Вычисляем модули шкал p_1 и q_1:

$$\mu_1 = \frac{250}{p_{1\,max} - p_{1\,min}} = 125 \text{ мм}; \qquad \mu_2 = \frac{250}{q_{1\,max} - q_{1\,min}} = 10 \text{ мм}.$$

Модуль шкалы p_1 получился равным 125 мм, что неудобно для ее построения. Полагаем $\mu_1 = 100$ мм. Это позволяет, не изменяя длины шкалы, расширить пределы изменения p_1 от $-1{,}25$ до $+1{,}25$.

4) Потребуем, чтобы середины шкал p_1 и q_1 находились на одном уровне:

$$\mu_1 \cdot 0 = h - \mu_2 \frac{110 + 85}{2} \ .$$

Отсюда определяем h:

$$h = 975 \text{ мм}.$$

5) Вычисляем $E_{1\,min}$ и $E_{1\,max}$:

$$E_{1\,min} = 74.3 \text{ Мэв} \qquad\qquad E_{1\,max} = 124 \text{ Мэв}.$$

6) Полагаем расстояние между шкалами p_1 и q_1 $d = 150$ мм и вычисляем координаты носителя шкалы E_1 для ряда значений E (см. табл. 5).

Таблица 5

E_1 Мэв	X мм	Y мм	E_1 Мэв	X мм	Y мм
74	80.6	126.3	100	75.0	-12.5
75	80.4	120.6	105	74.1	-37.0
80	79.2	92.4	110	73.2	-61.0
85	78.0	65.0	115	72.4	-84.5
90	77.0	38.5	120	71.7	-107.0
95	76.0	12.7	125	70.8	-129.8

7) Строим шкалы p_1 и q_1; по посчитанным координатам вычерчиваем носитель шкалы E_1 и путем проецирования на него шкалы q_1 строим шкалу E_1. Для этого предварительно шкалу q_1 строим в пределах от –74 до –125.

8) После окончания всех построений убираем лишние части шкалы q_1, оставляя только ту ее часть, которая лежит в заданных предварительно пределах от – 110 до – 85; снимаем с номограммы кальку и фотографируем ее. Все построения удобно вести на миллиметровой бумаге.

Пользуясь случаем, автор выражает самую искреннюю признательность Г.Н.Флерову и В.Е. Волкову за предоставленную возможность выполнить данную работу в Лаборатории ядерных реакций Объединенного института ядерных исследований, за постоянный интерес к работе и содействие при издании настоящего препринта.

Литература

1. *А.М.Балдин, В.И.Гольданский, И.Л.Розенталь. Кинематика ядерных реакций; Физматгиз, М., 1959.*
2. *Н.А.Глаголев. Курс номографии. Изд. "Высшая школа", М., 1961.*
3. *Б.А.Невский. Справочная книга по номографии. Гостехтеориздат, М.-Л., 1951.*
4. *Г.С.Хованский. Методы номографирования. Изд. ВЦ АН СССР, М., 1964.*
5. *Г.Н.Потетюнко. Атомная энергия", 16, 349, 1964.*
6. *Г.Н.Потетюнко. "Номограмма для системы двух уравнений типа Коши с общей криволинейной шкалой". В кн. "Номографический сборник №4". Изд. ВЦ АН СССР, М., 1967.*
7. *Р.И.Новобранова. "Труды Новочеркасского политехнического института", 173, 1967, стр. 97-106.*

Рукопись поступила в издательский отдел
18 октября 1968 года.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

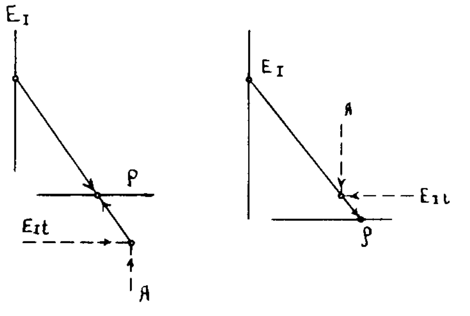
НОМОГРАММЫ
для определения
параметра ρ

$$\rho = \sqrt{\frac{A \cdot E_I}{E_I + E_{It}}}$$

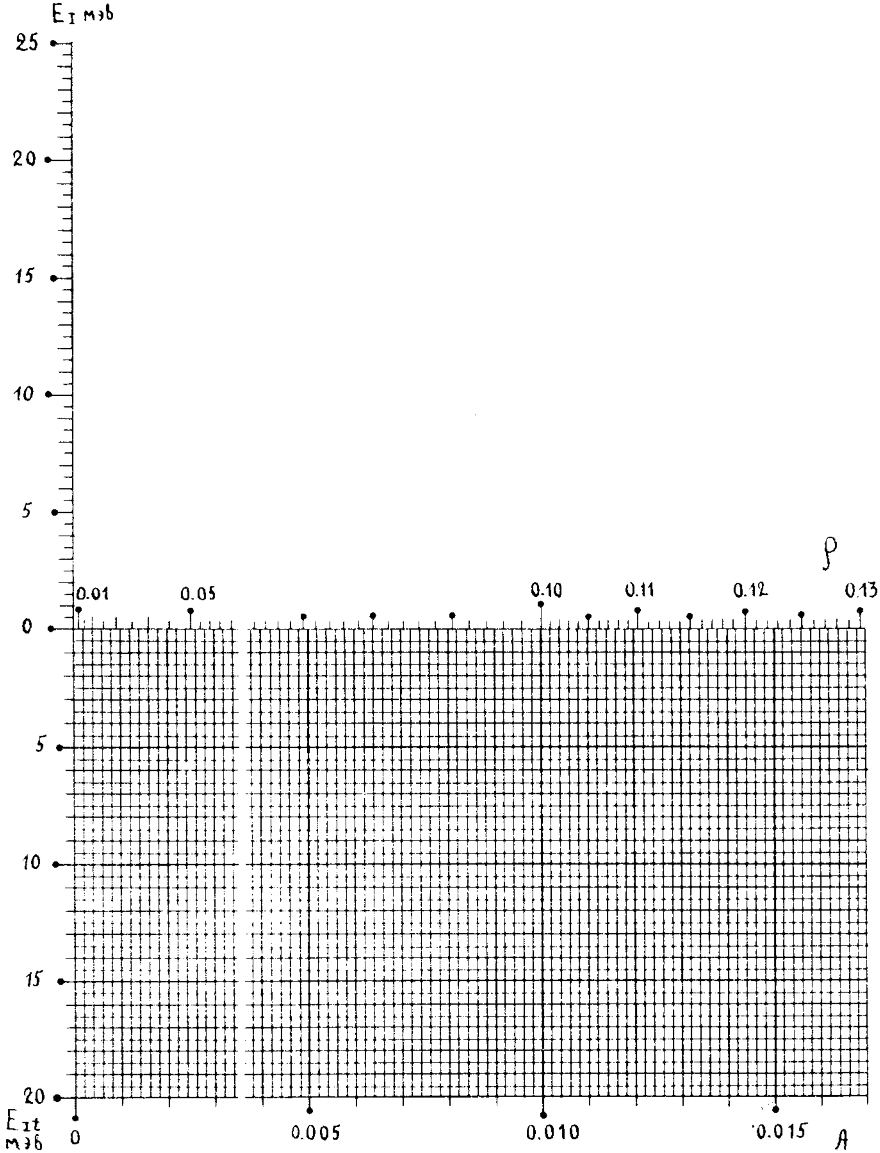
$$A_1 = \frac{m_I \, m_1}{m_{II} \, m_2} \; ; \quad A_2 = \frac{m_I \, m_2}{m_{II} \, m_1}$$

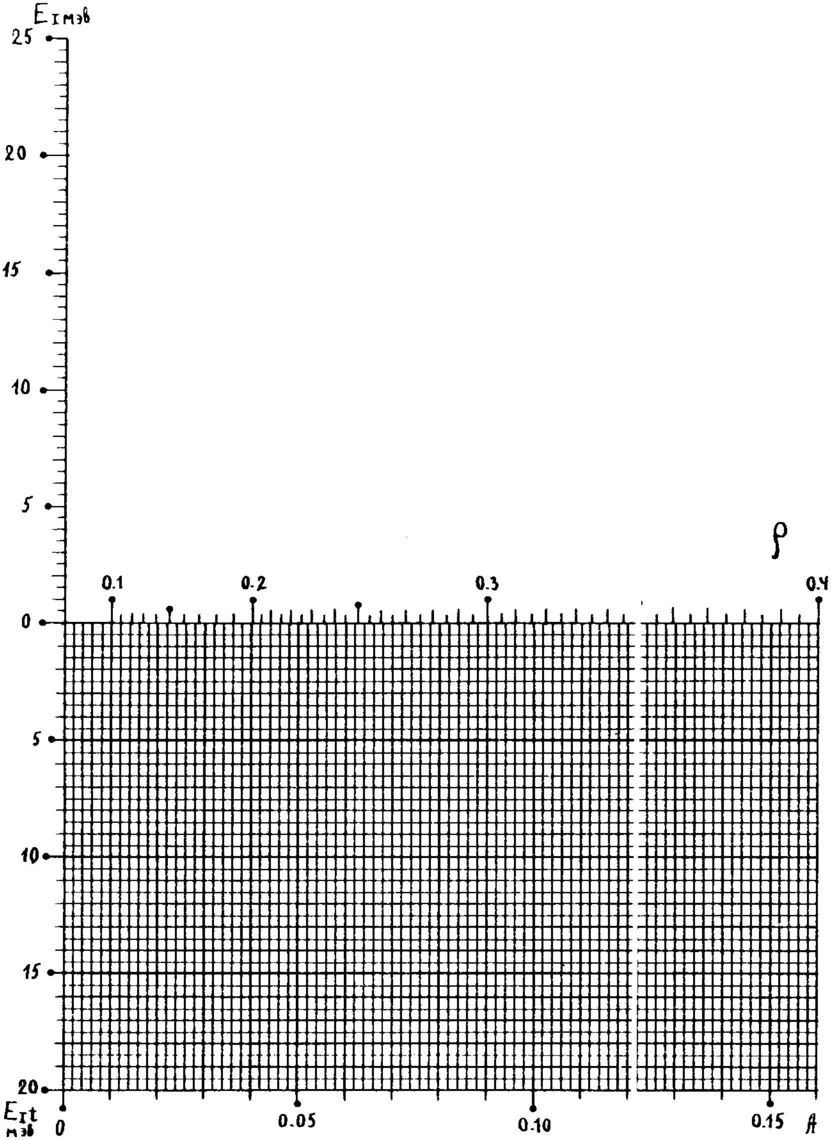
$$E_{It} = Q \cdot B \; ; \quad B = 1 + \frac{m_I}{m_{II}}$$

схемы пользования

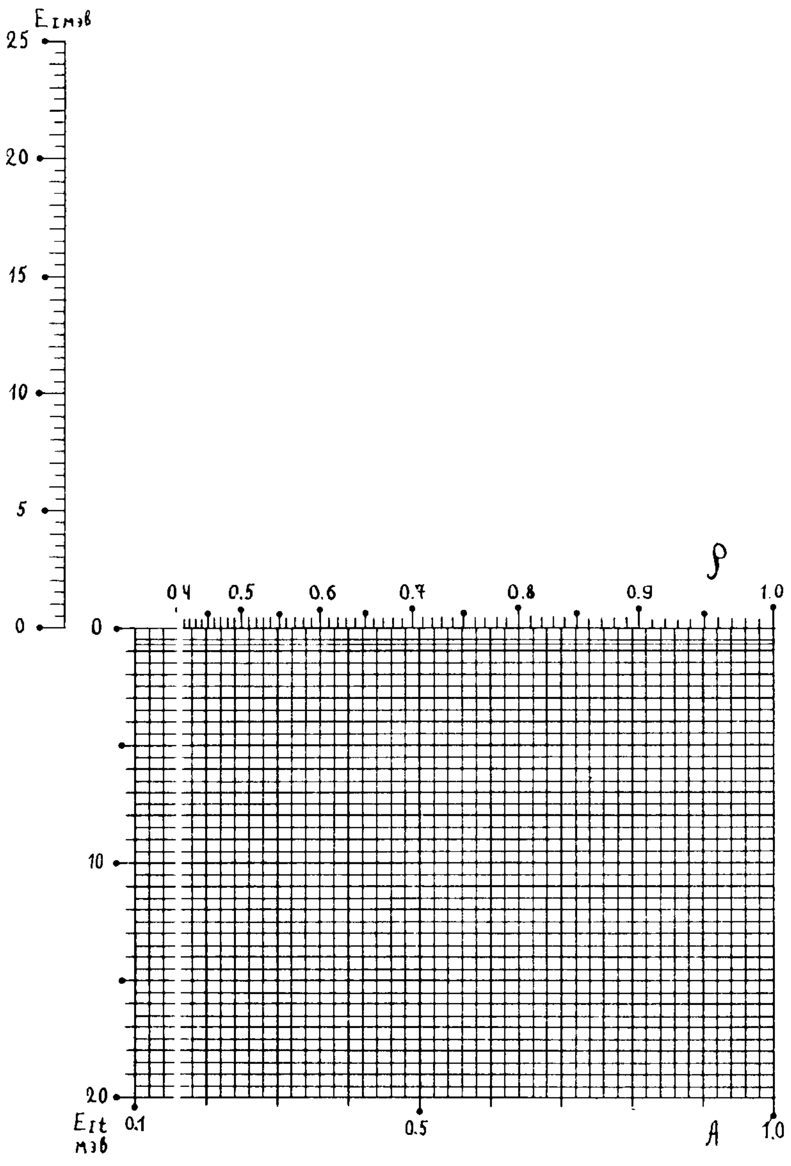


$E_{It} > 0$ $\qquad\qquad$ $E_{It} < 0$

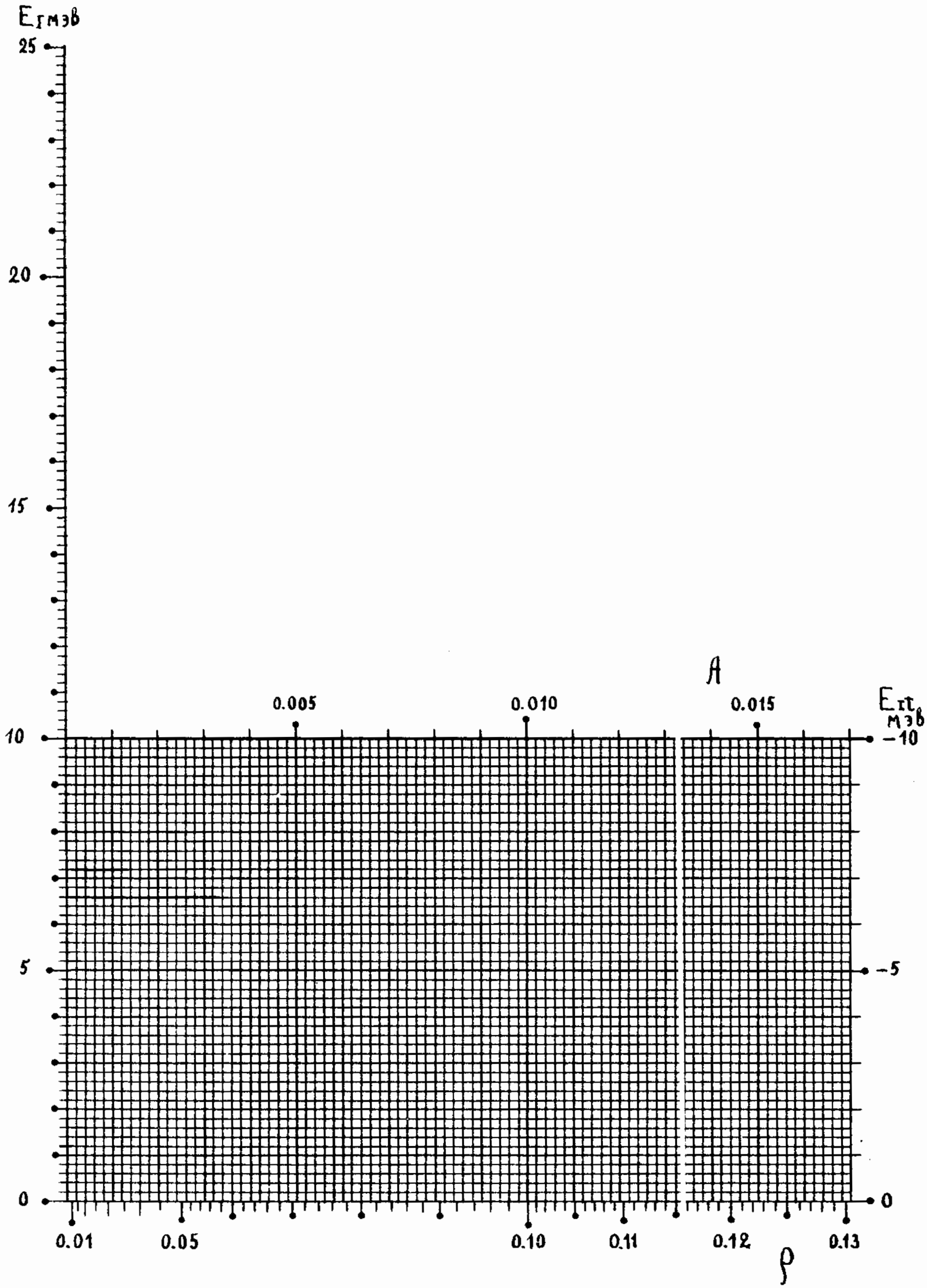

E_I мэв
25
20
15
10
5
0
ρ
0.01
0.05
0.10
0.11
0.12
0.13
5
10
15
20
E_It мэв
0
0.005
0.010
0.015
A



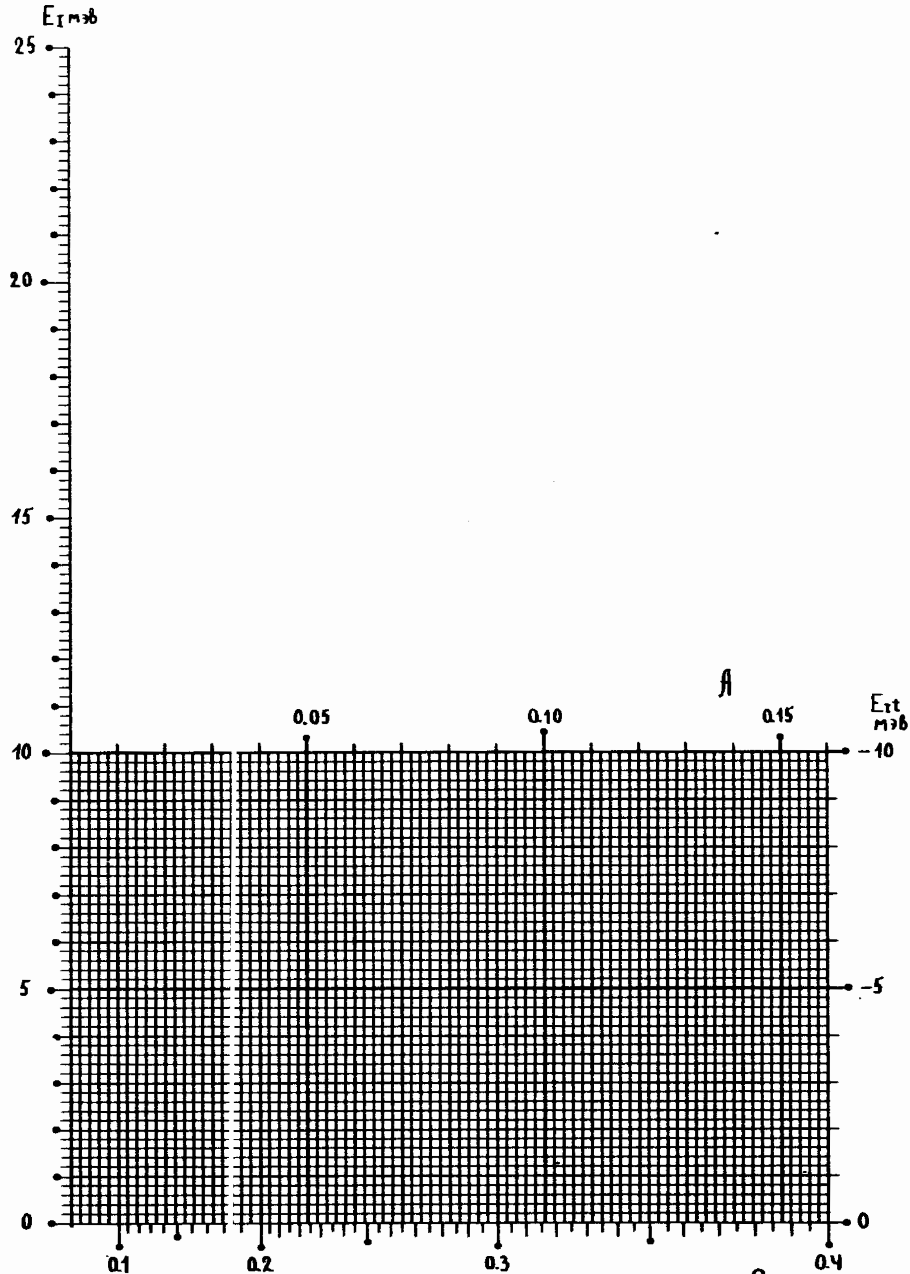
E I мэв
25
20
15
10
5
0
ρ
0.1
0.2
0.3
0.4
5
10
15
20
E It мэв
0
0.05
0.10
0.15
A



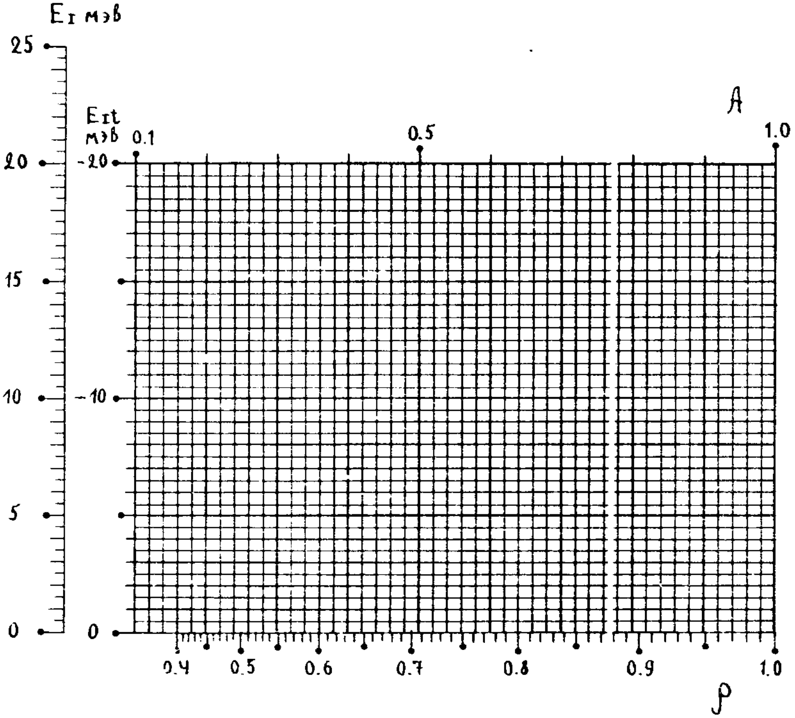
EIмэв
25
20
15
10
5
0
ρ
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
0
10
20
EIt
мэв
0.1
0.5
A
1.0



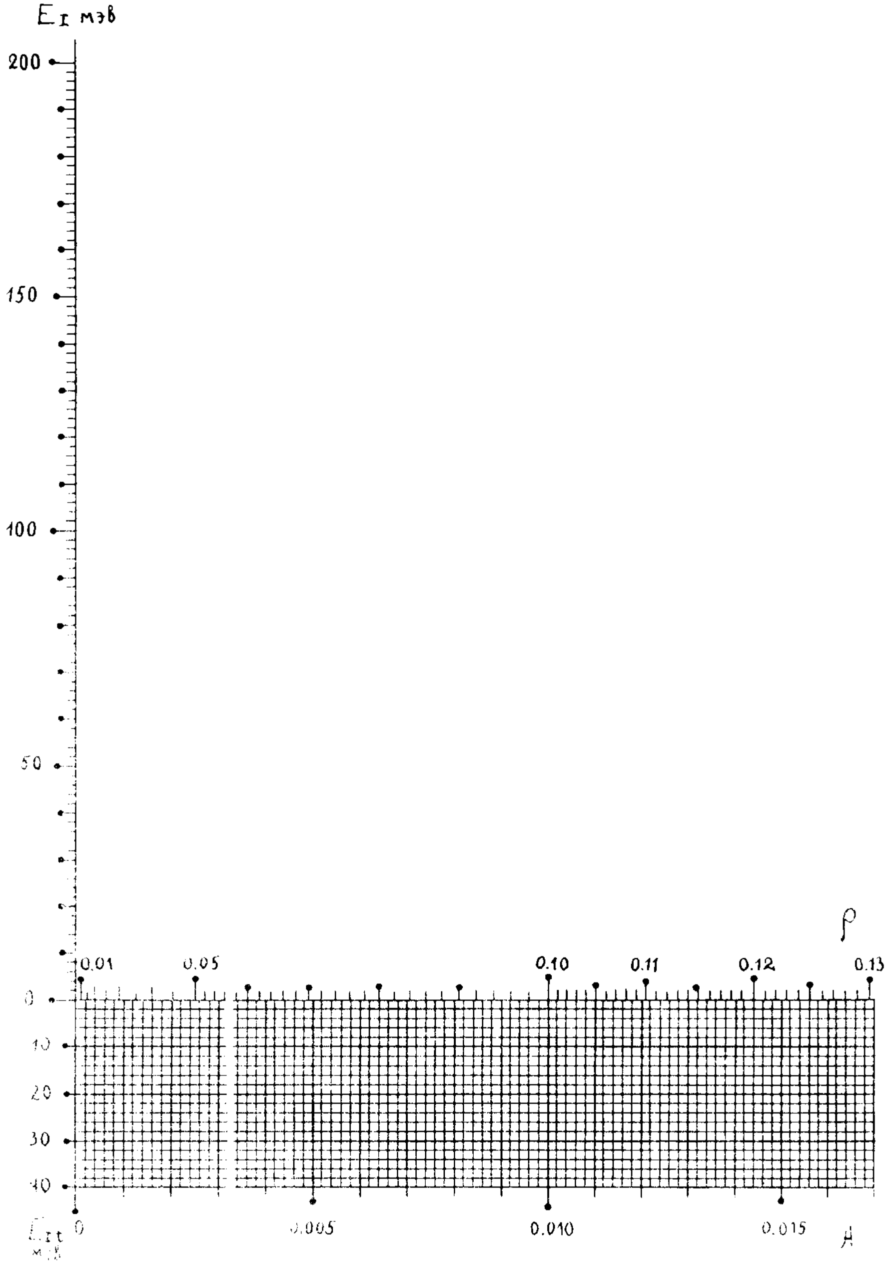
Eɪ мэв
25
20
15
10
5
0
A
0.005
0.010
0.015
Eɪt мэв
−10
−5
0
0.01
0.05
0.10
0.11
0.12
0.13
ρ



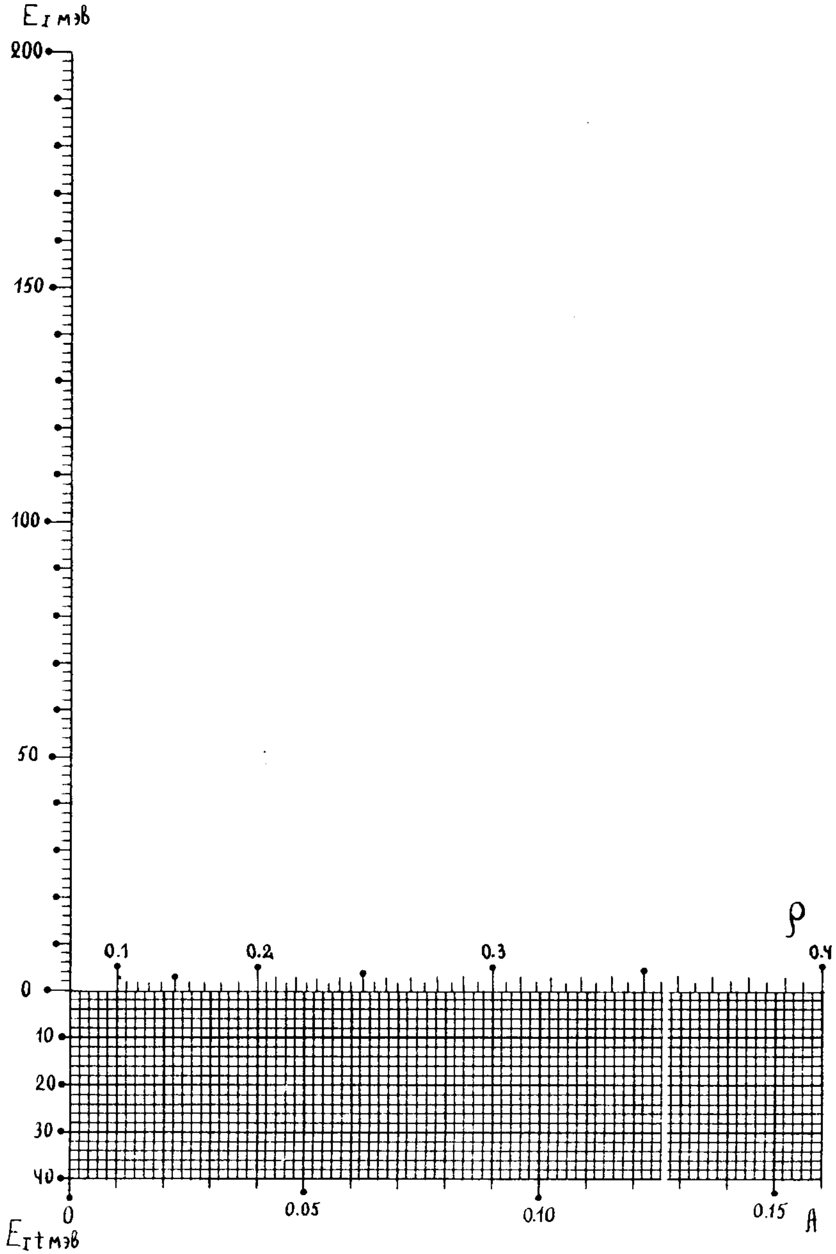
Eɪ мэв
25
20
15
10
5
0
A
0.05
0.10
0.15
Eɪt мэв
-10
-5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
ρ

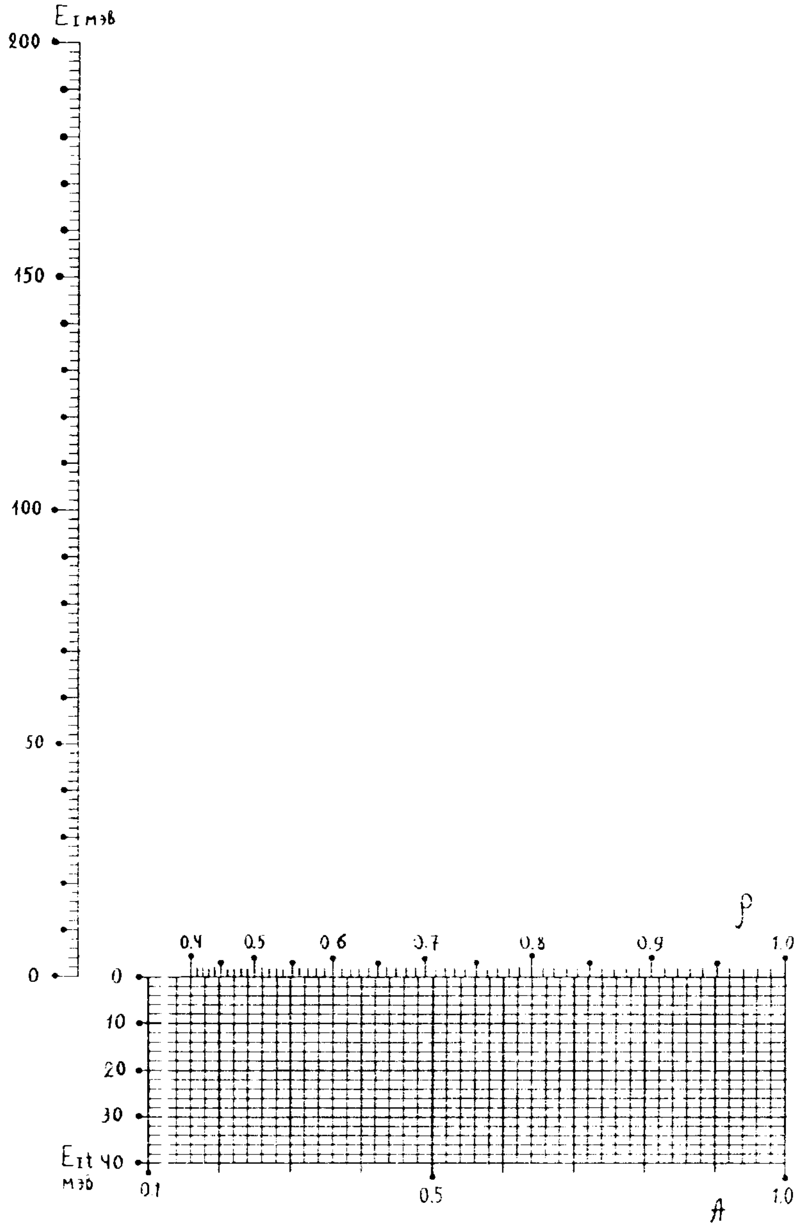


Eɪ мэв
25
20
15
10
5
0
Eɪt
мэв
-20
-10
0
0.1
0.5
1.0
A
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ρ

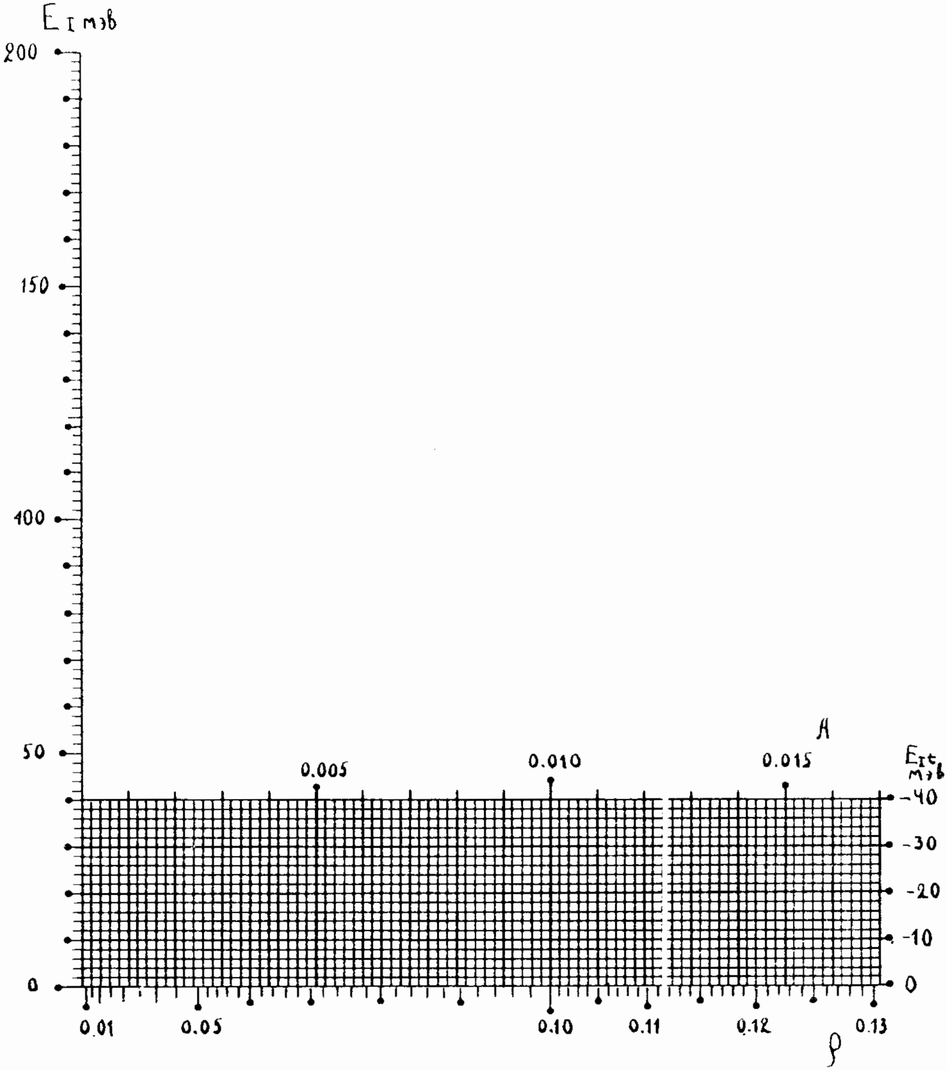


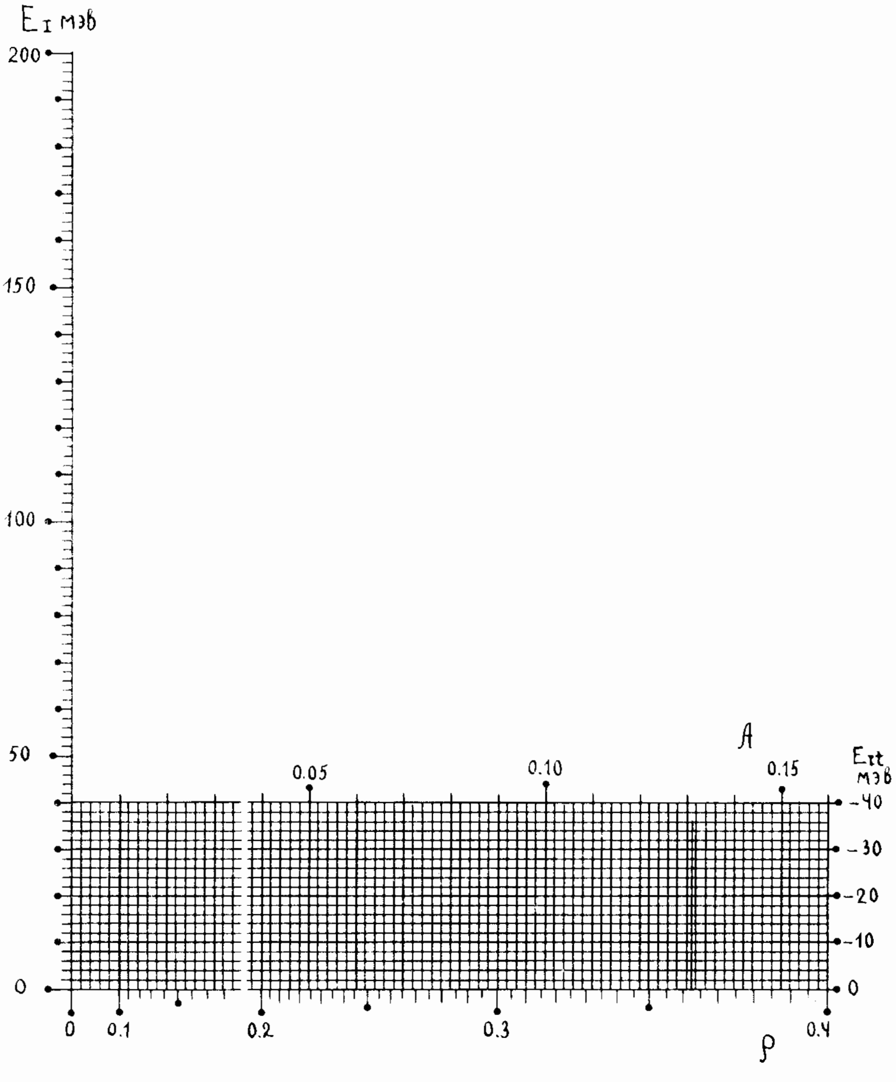
E_I мэв
200
150
100
50
0
10
20
30
40
ρ
0.01
0.05
0.10
0.11
0.12
0.13
E_I t мэв
0
0.005
0.010
0.015
μ


Eɪ мэв
200
150
100
50
0
10
20
30
40
0.1
0.2
0.3
0.4
ρ
0
0.05
0.10
0.15
A
Eɪt мэв

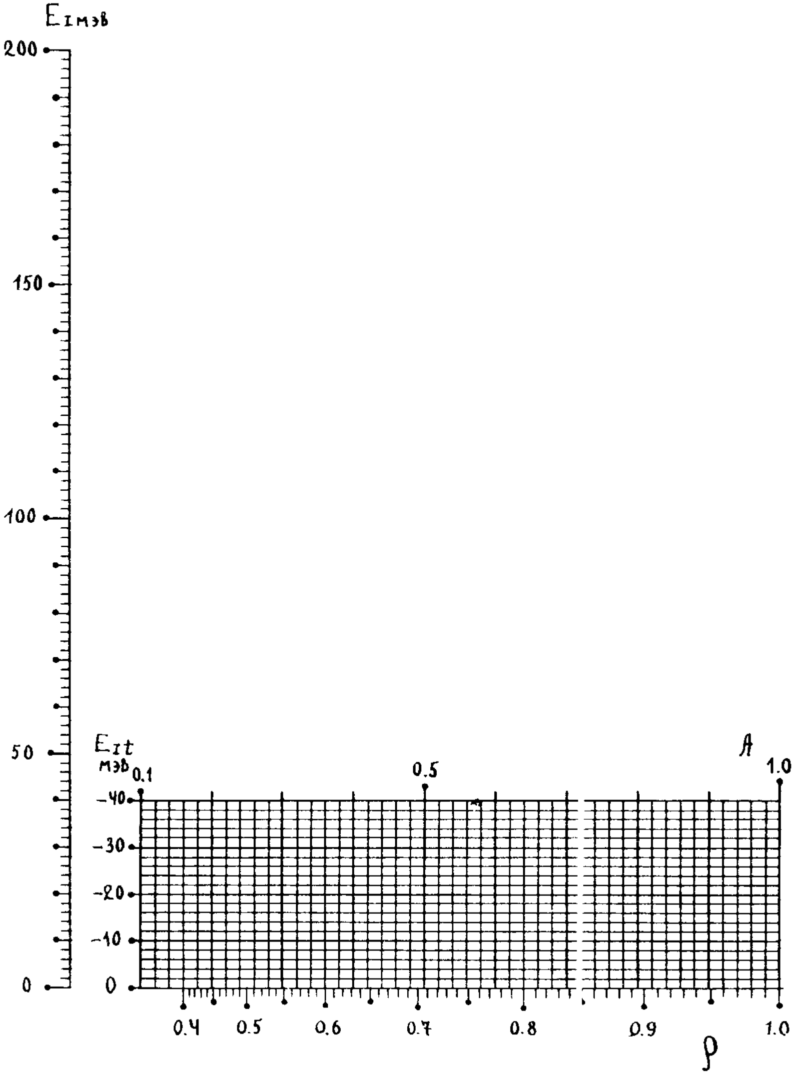


Eɪ мэв
200
150
100
50
0
ρ
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
0
10
20
30
Eɪt 40
мэв
0.1
0.5
1.0
A

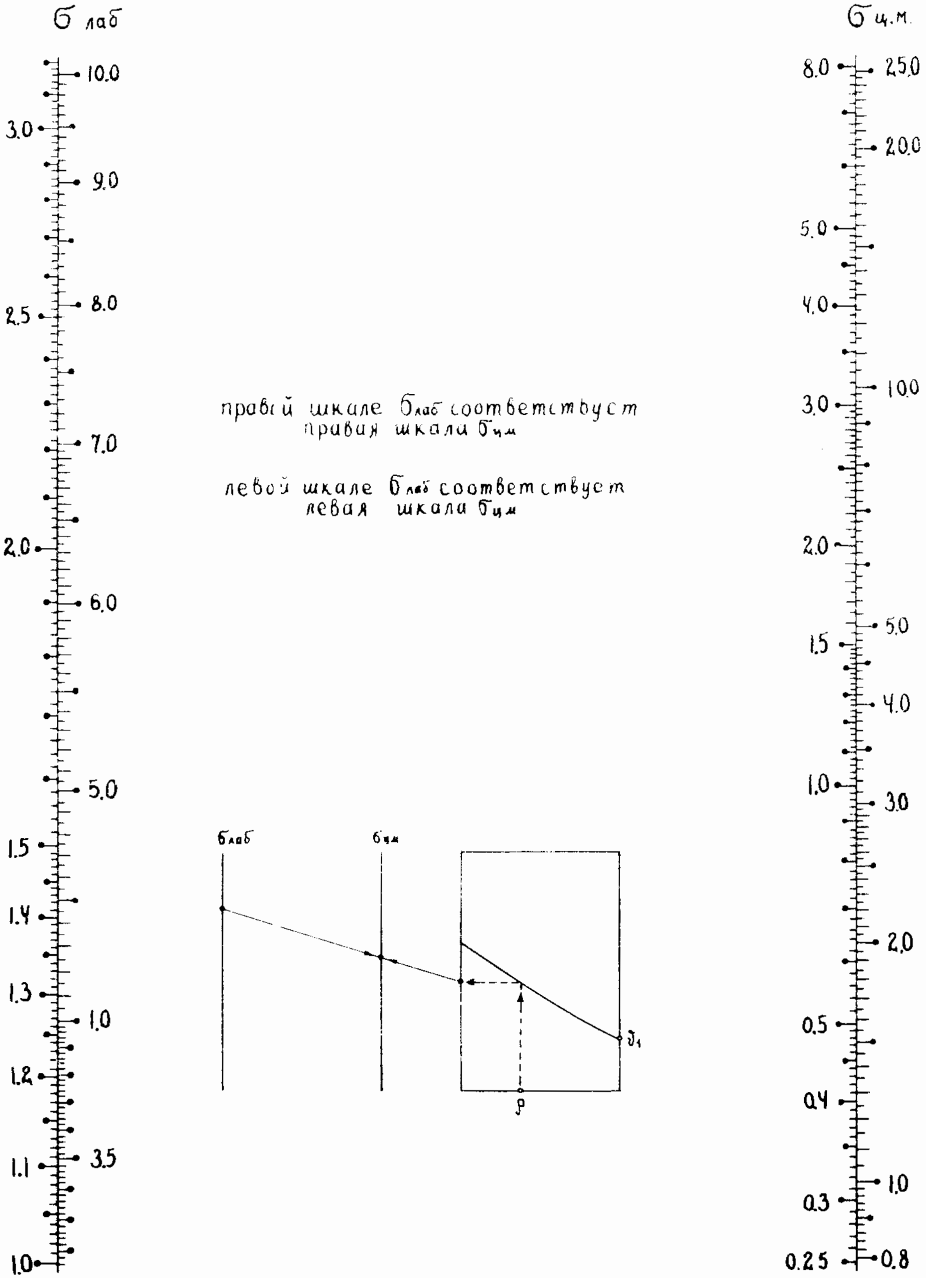

E I мэв
200
150
100
50
0
0.005
0.010
0.015
A
E It мэв
-40
-30
-20
-10
0
0.01
0.05
0.10
0.11
0.12
0.13
ρ



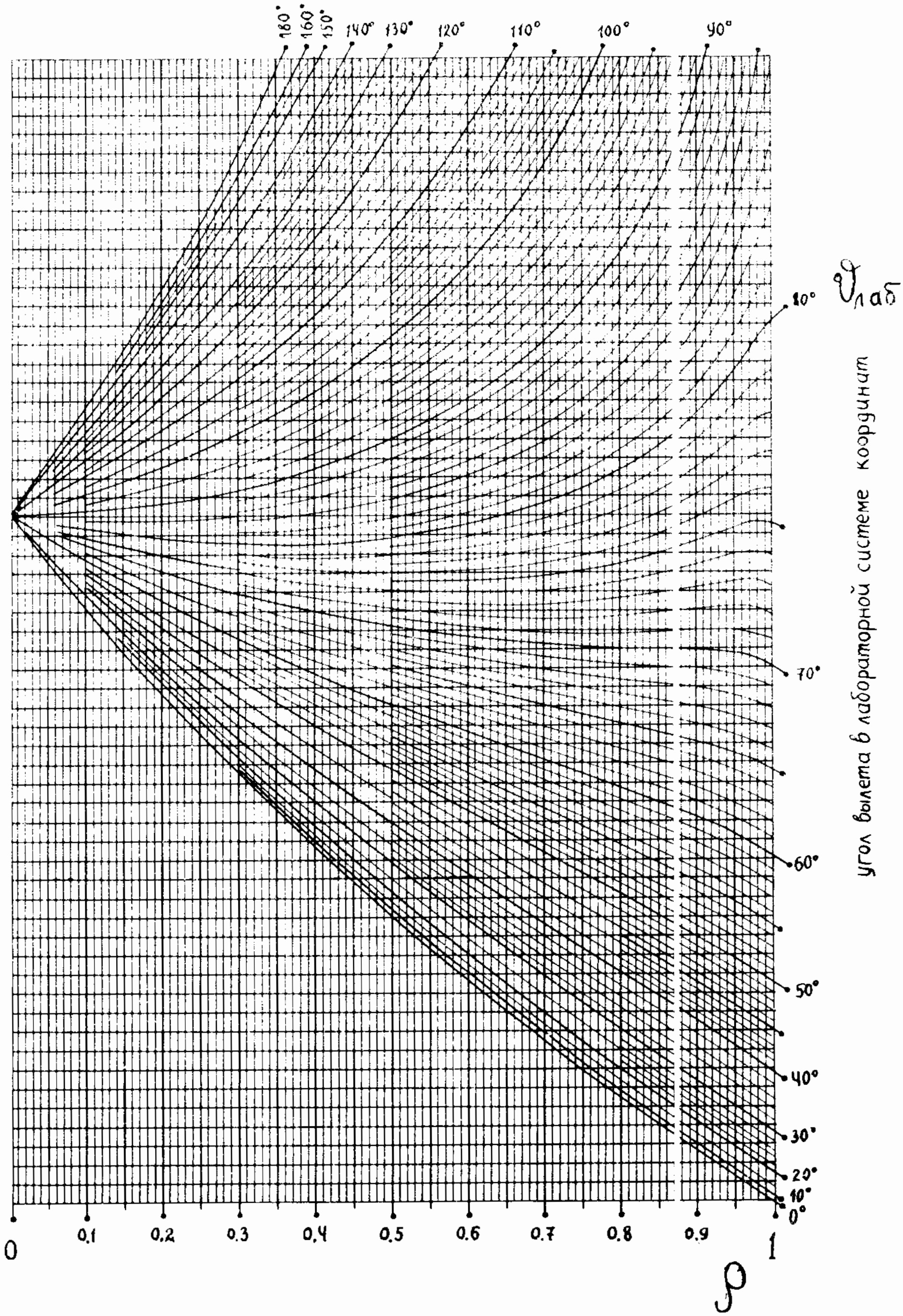
Eɪ мэв
200
150
100
50
0
A
0.05
0.10
0.15
Eɪt мэв
-40
-30
-20
-10
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
ρ



E I Мэв
200
150
100
50
0
E I t
Мэв
0.1
0.5
A
1.0
-40
-30
-20
-10
0
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ρ



σ лаб
σ ц.м.
правой шкале σлаб соответствует
правая шкала σцм
левой шкале σлаб соответствует
левая шкала σцм
σлаб
σцм
ϑ₁
P



180°
160°
150°
140°
130°
120°
110°
100°
90°
80°
70°
60°
50°
40°
30°
20°
10°
0°
$\vartheta_{лаб}$
угол вылета в лабораторной системе координат
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
ρ

НОМОГРАММЫ

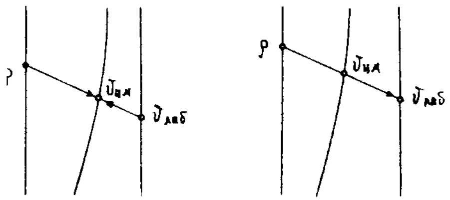
для определения

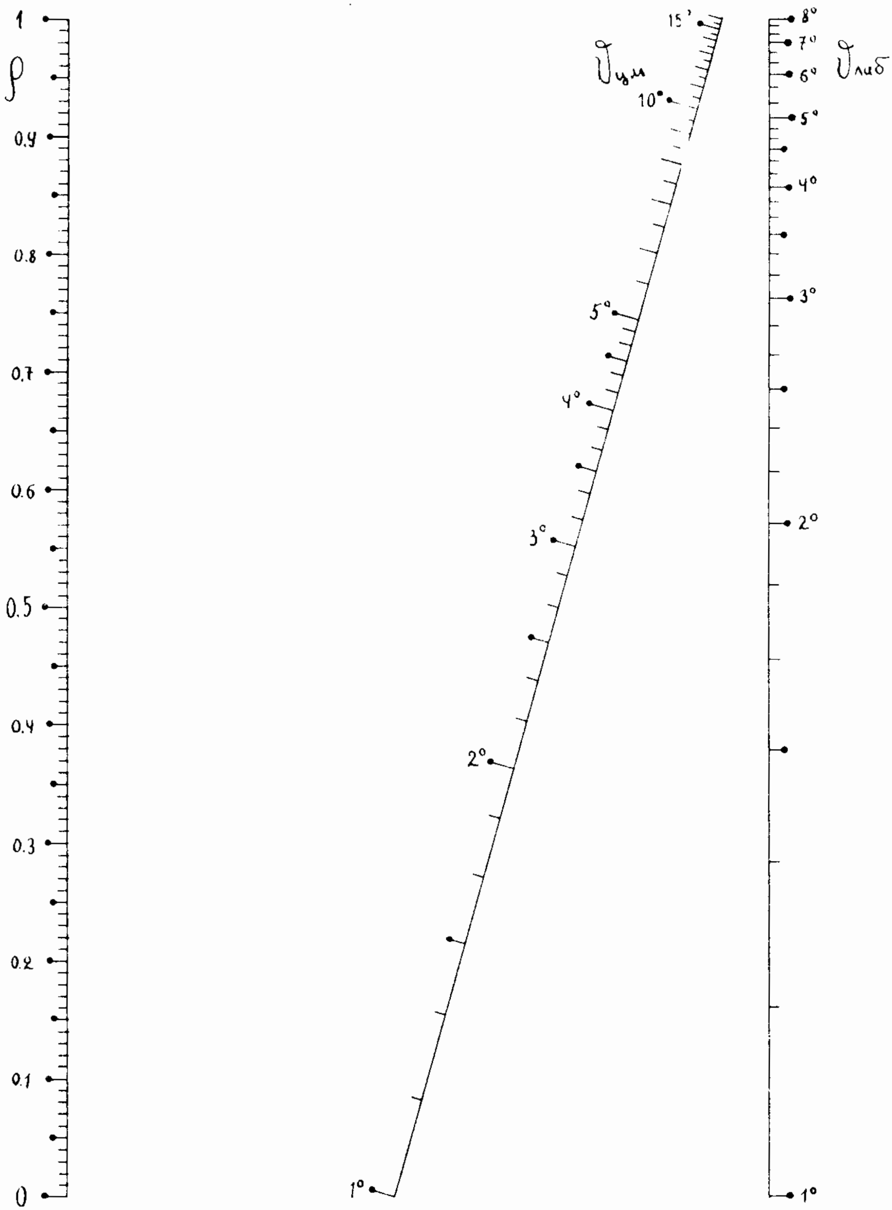
$\vartheta_{цм}$ по известным ρ и $\vartheta_{лаб}$

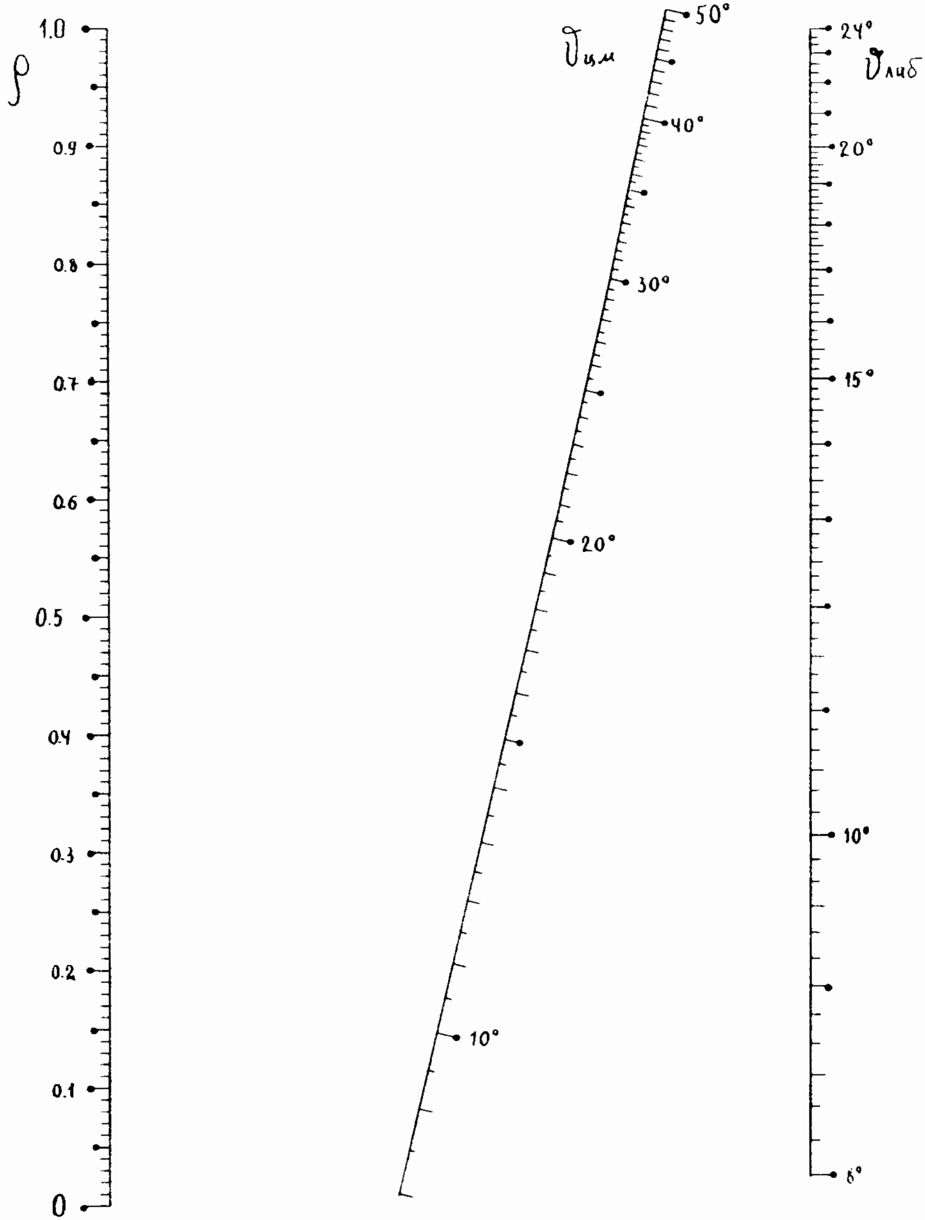
и $\vartheta_{лаб}$ по известным ρ и $\vartheta_{цм}$

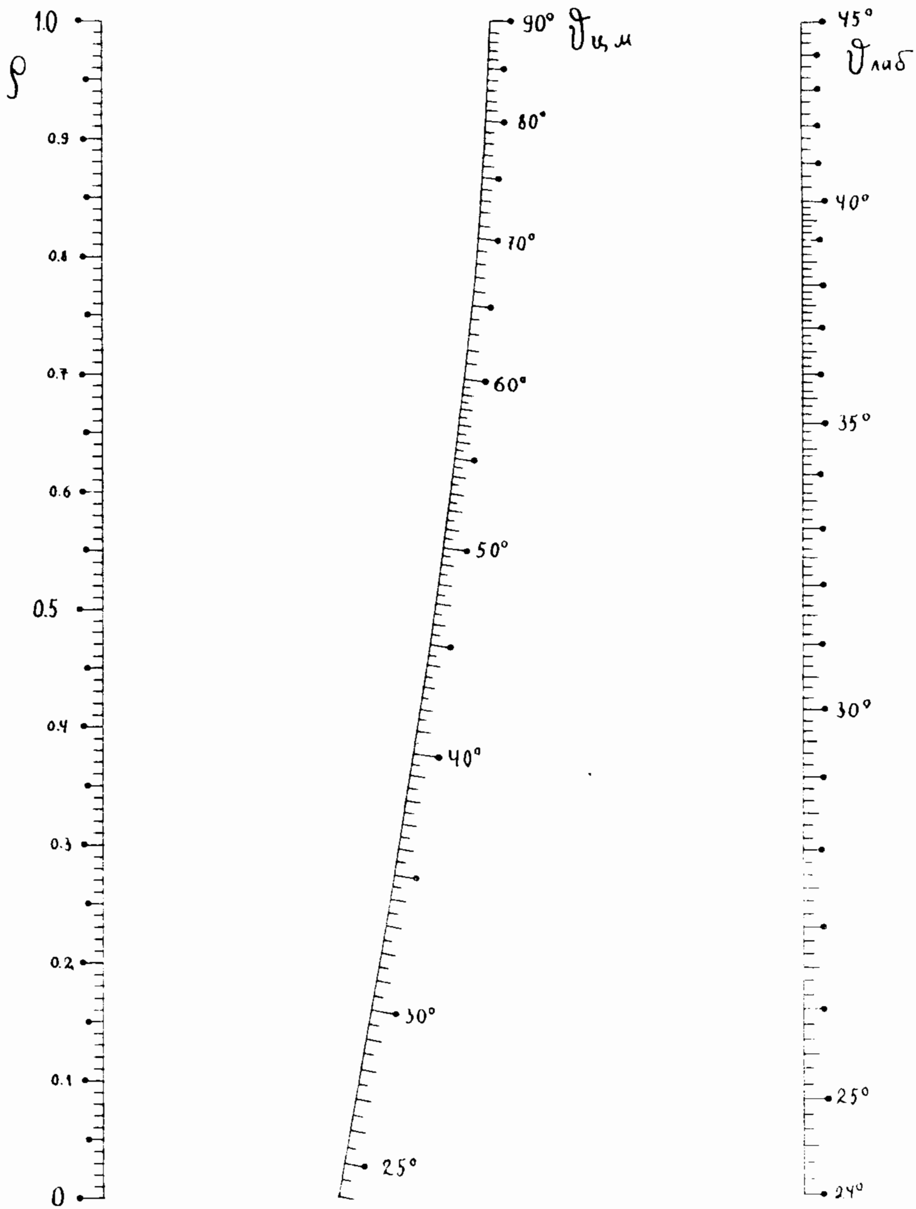
$$\mathrm{ctg}\,\vartheta_{лаб} = \frac{\rho + \cos\vartheta_{цм}}{\sin\vartheta_{цм}}$$

схемы пользования

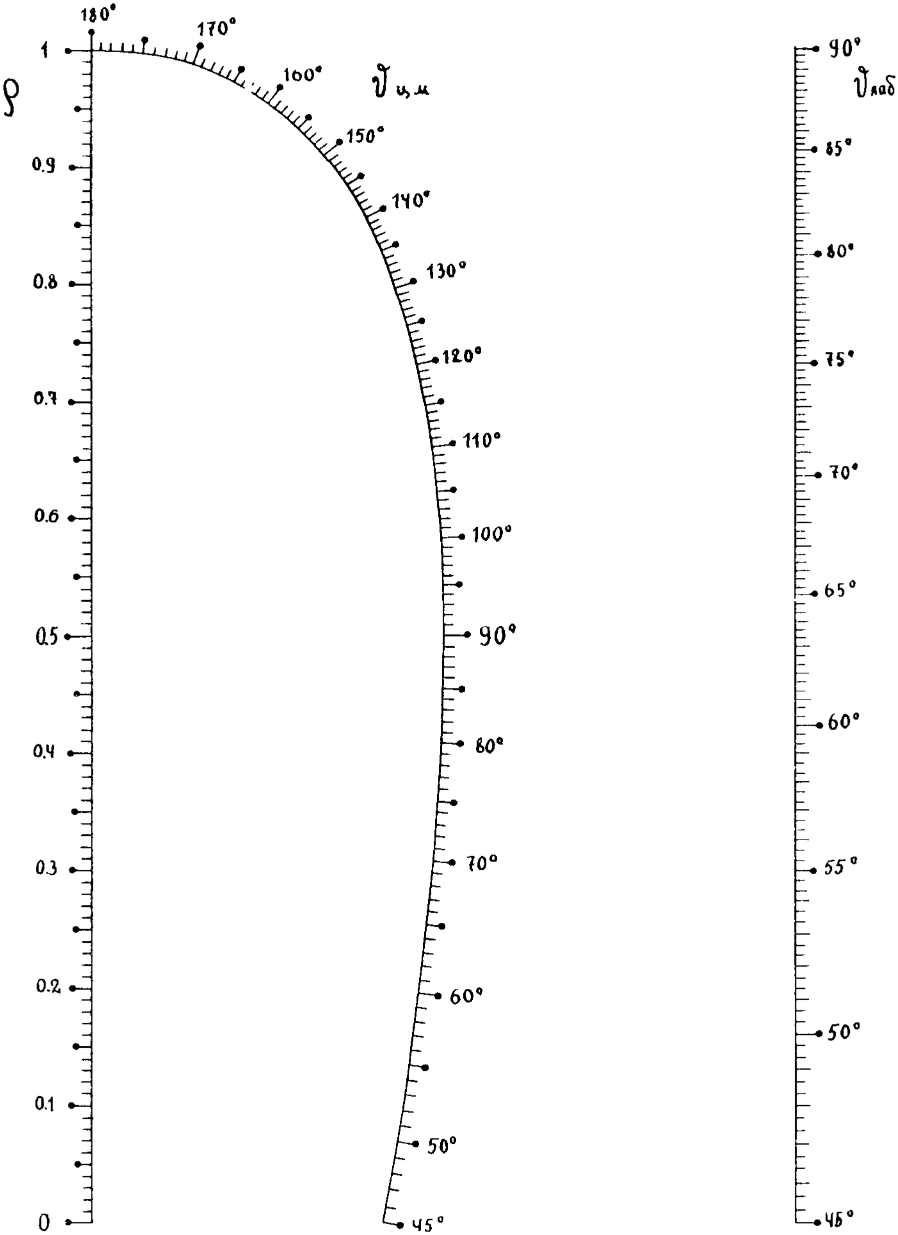


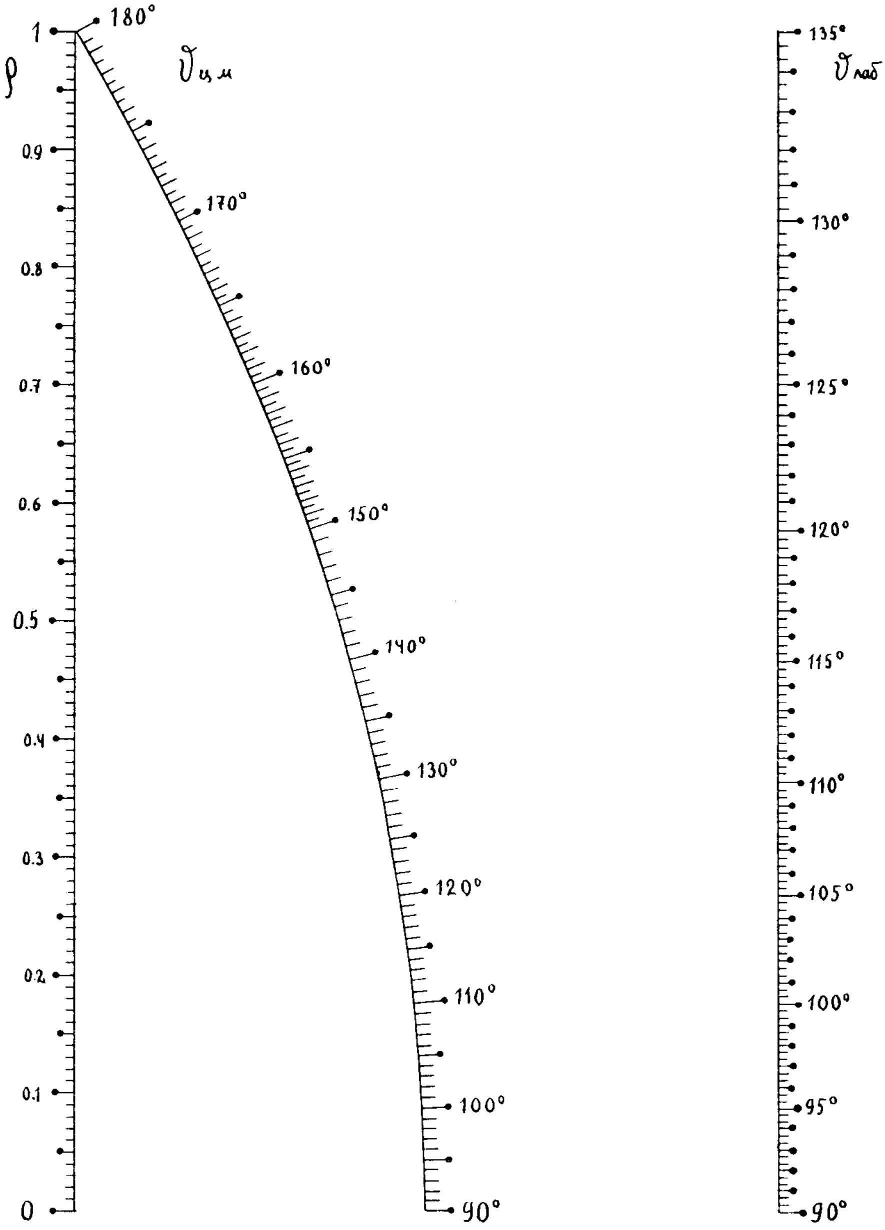

ρ
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
15°
10°
5°
4°
3°
2°
1°
8°
7°
6°
5°
4°
3°
2°
1°

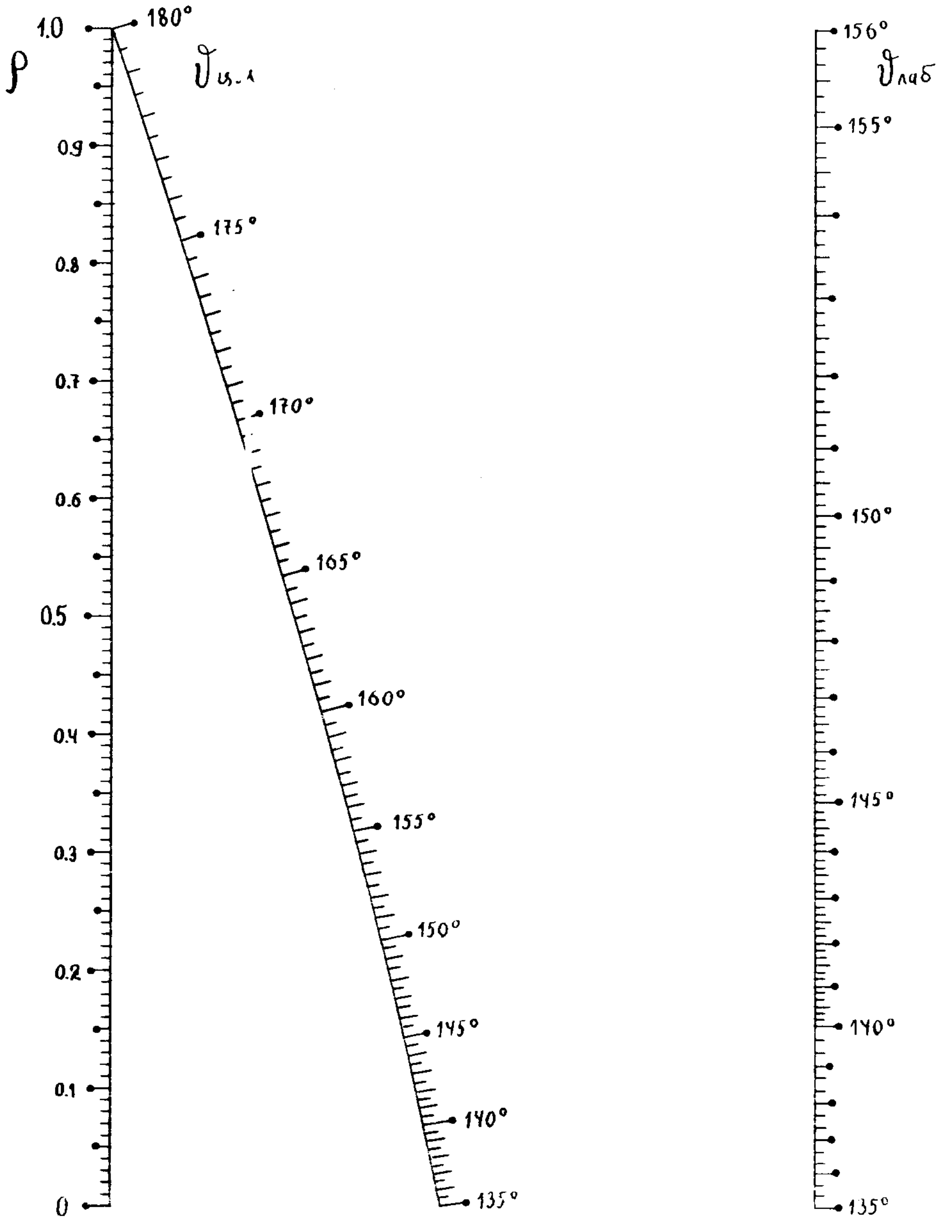

ρ
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
ϑцм
50°
40°
30°
20°
10°
ϑлиб
24°
20°
15°
10°
6°

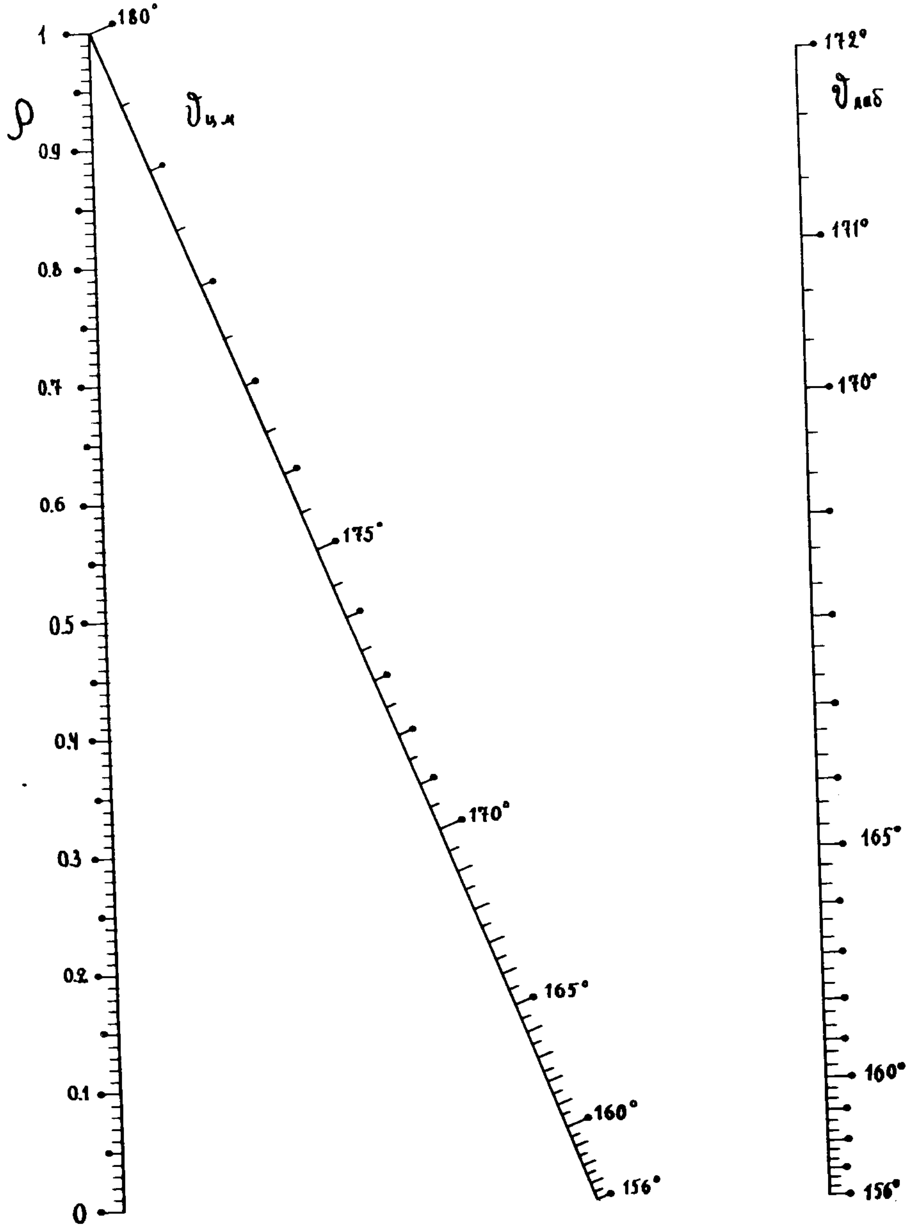


1.0
ρ
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
90°
ϑц,м
80°
70°
60°
50°
40°
30°
25°
45°
ϑлаб
40°
35°
30°
25°
24°


ρ
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
ϑ ц.м
45°
50°
60°
70°
80°
90°
100°
110°
120°
130°
140°
150°
160°
170°
180°
ϑ лаб
45°
50°
55°
60°
65°
70°
75°
80°
85°
90°


ρ
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
ϑ ц м
180°
170°
160°
150°
140°
130°
120°
110°
100°
90°
ϑ лаб
135°
130°
125°
120°
115°
110°
105°
100°
95°
90°


1.0
ρ
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
180°
ϑц.м
175°
170°
165°
160°
155°
150°
145°
140°
135°
156°
ϑлаб
155°
150°
145°
140°
135°



ρ
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
ϑ_цм
180°
175°
170°
165°
160°
156°
ϑ_лвб
172°
171°
170°
165°
160°
156°

НОМОГРАММЫ

для определения

энергии E_1 вылетающей частицы 1
при известном Q реакции

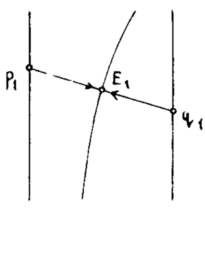
и Q реакции при известной энергии E_1

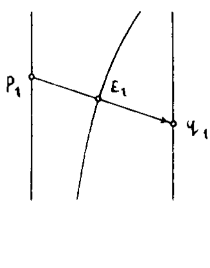
$$E_1 - p_1\sqrt{E_1} + q_1 = 0$$

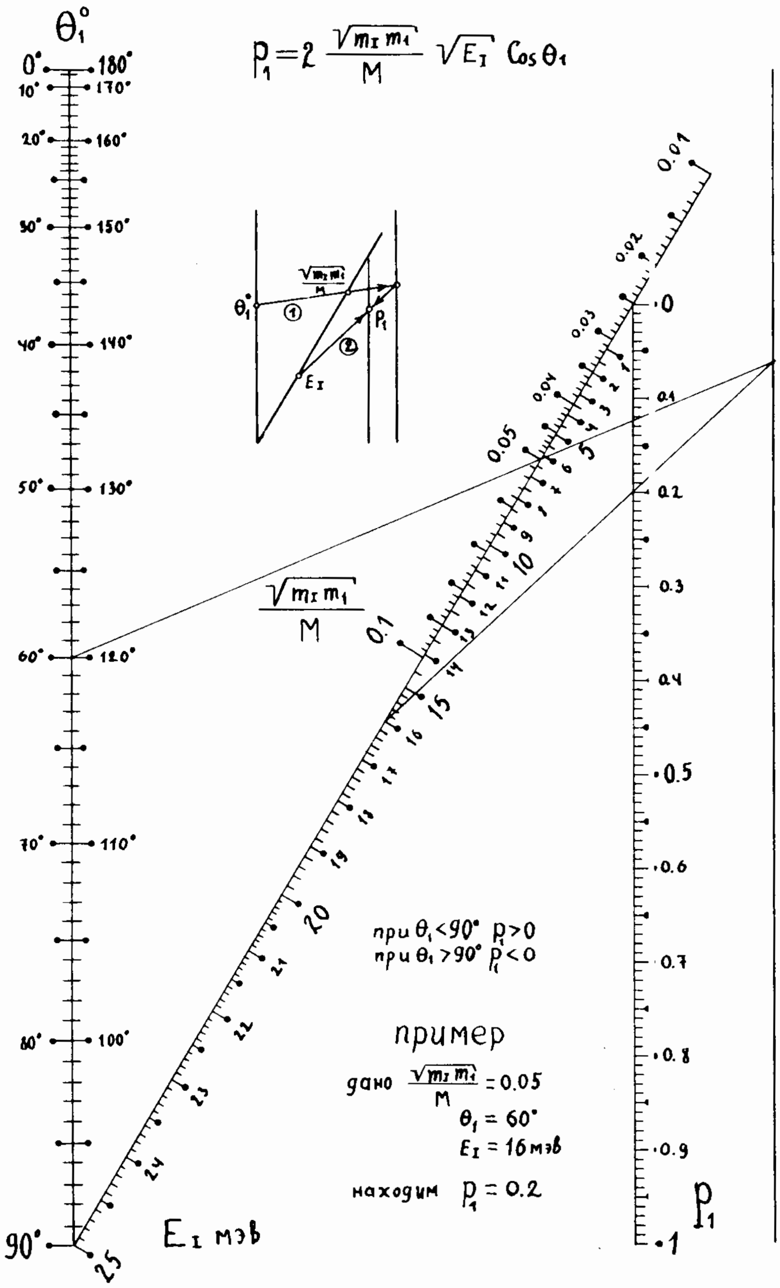
$$p_1 = 2\,\frac{\sqrt{m_I m_1}}{M}\sqrt{E_I}\,\cos\vartheta_1$$

$$q_1 = -\frac{1}{M}\left[m_2 Q + (m_2 - m_I)\,E_I\right]$$

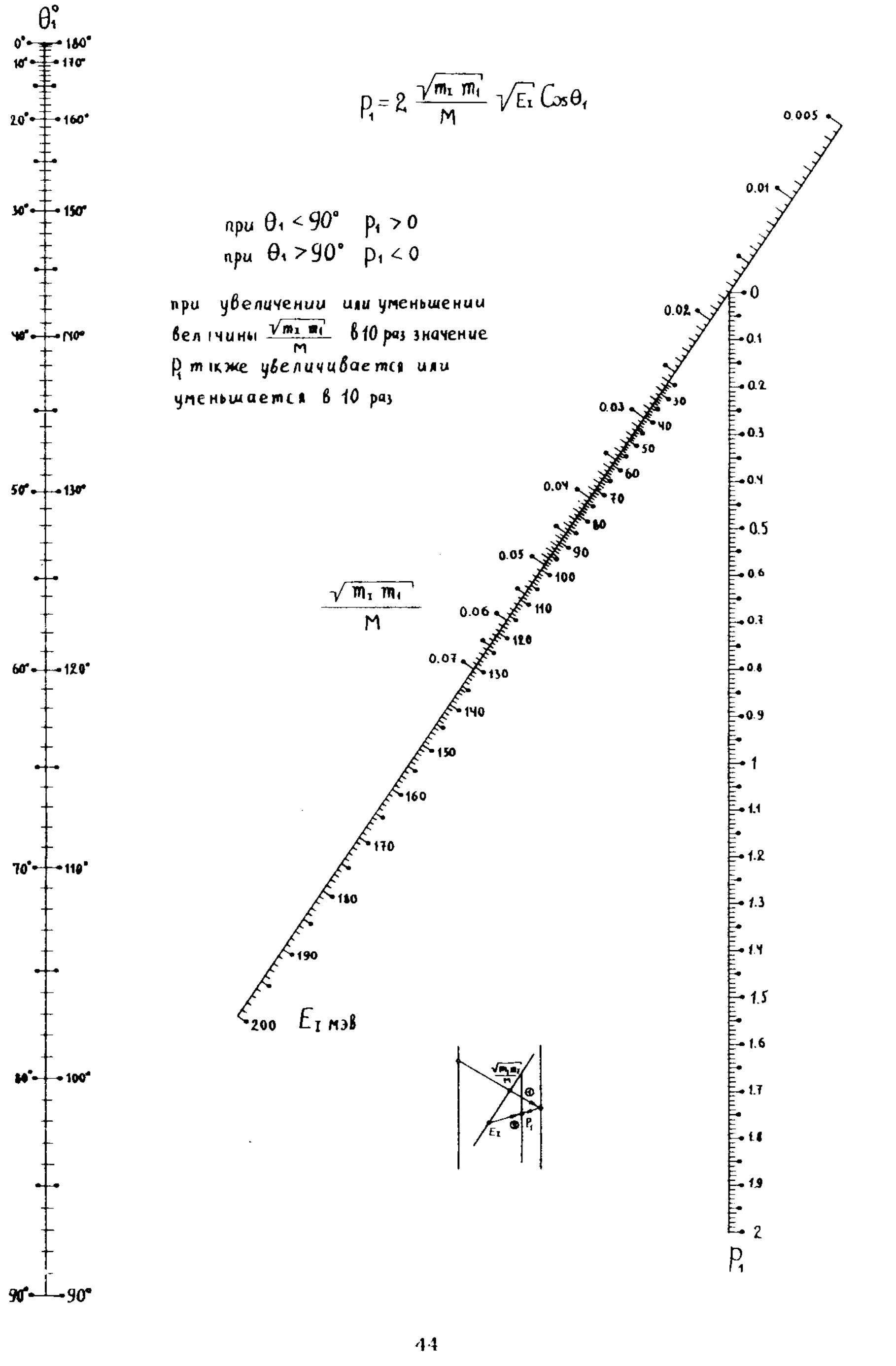
схемы пользования

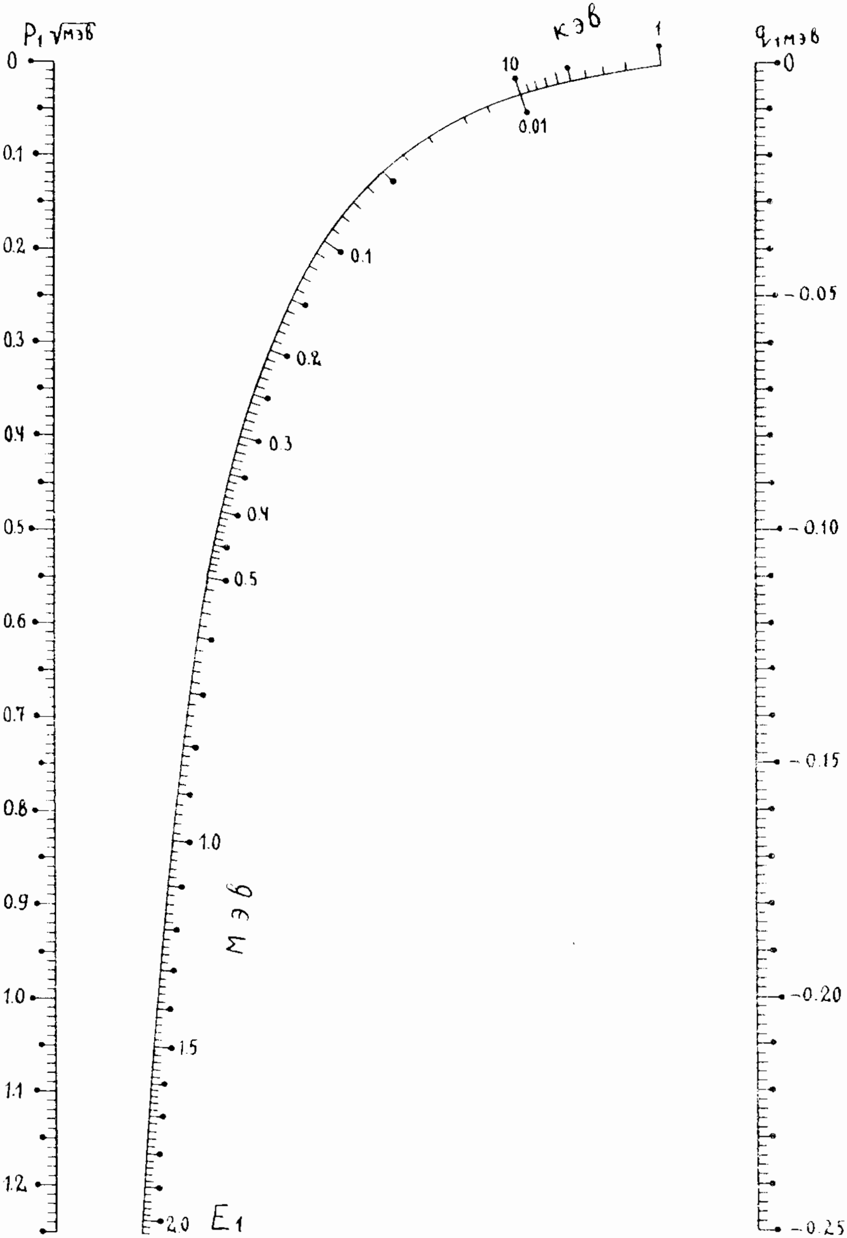




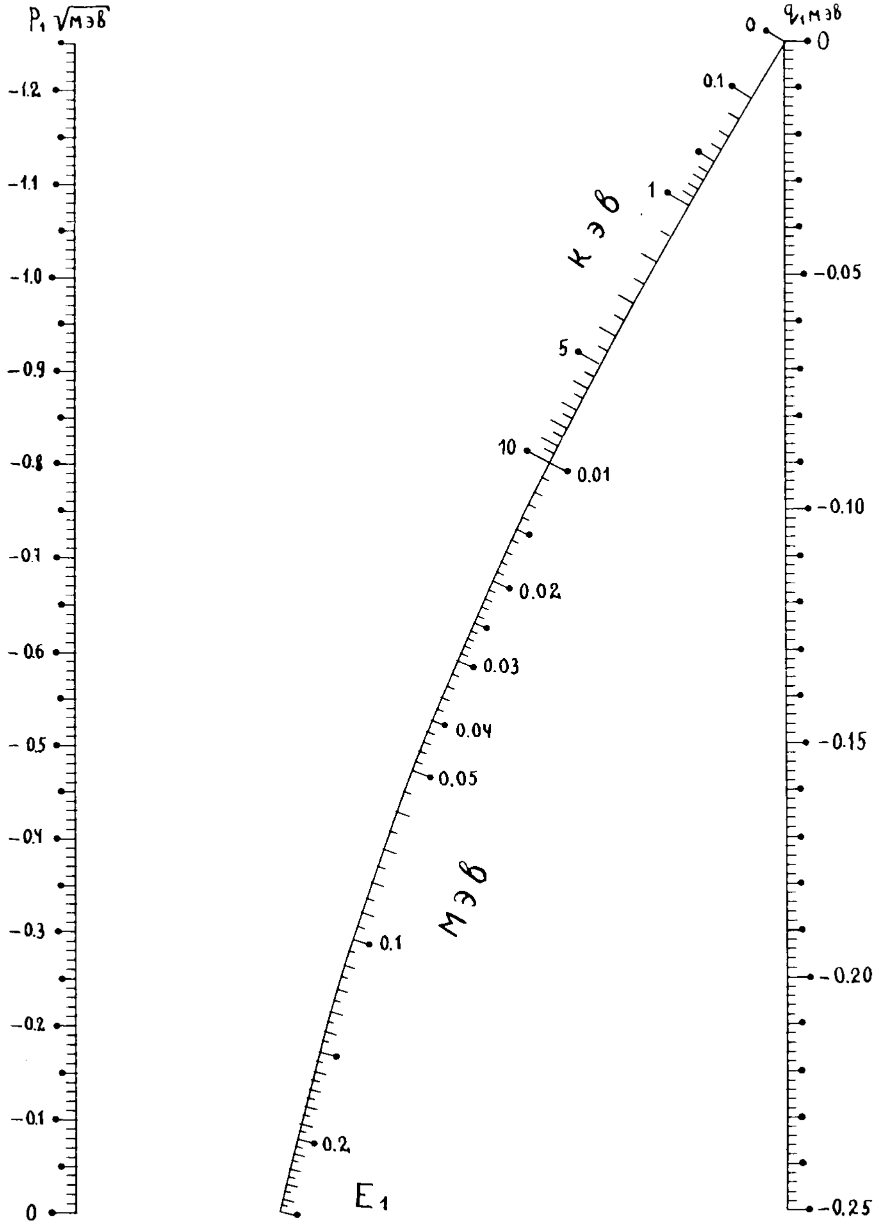


$p_1 = 2\,\frac{\sqrt{m_I m_1}}{M}\,\sqrt{E_I}\,\cos\theta_1$
θ_1°
E_I мэв
p_1
$\frac{\sqrt{m_I m_1}}{M}$
при $\theta_1 < 90^\circ$ $p_1 > 0$
при $\theta_1 > 90^\circ$ $p_1 < 0$
пример
дано $\frac{\sqrt{m_I m_1}}{M} = 0.05$
$\theta_1 = 60^\circ$
$E_I = 16$ мэв
находим $p_1 = 0.2$

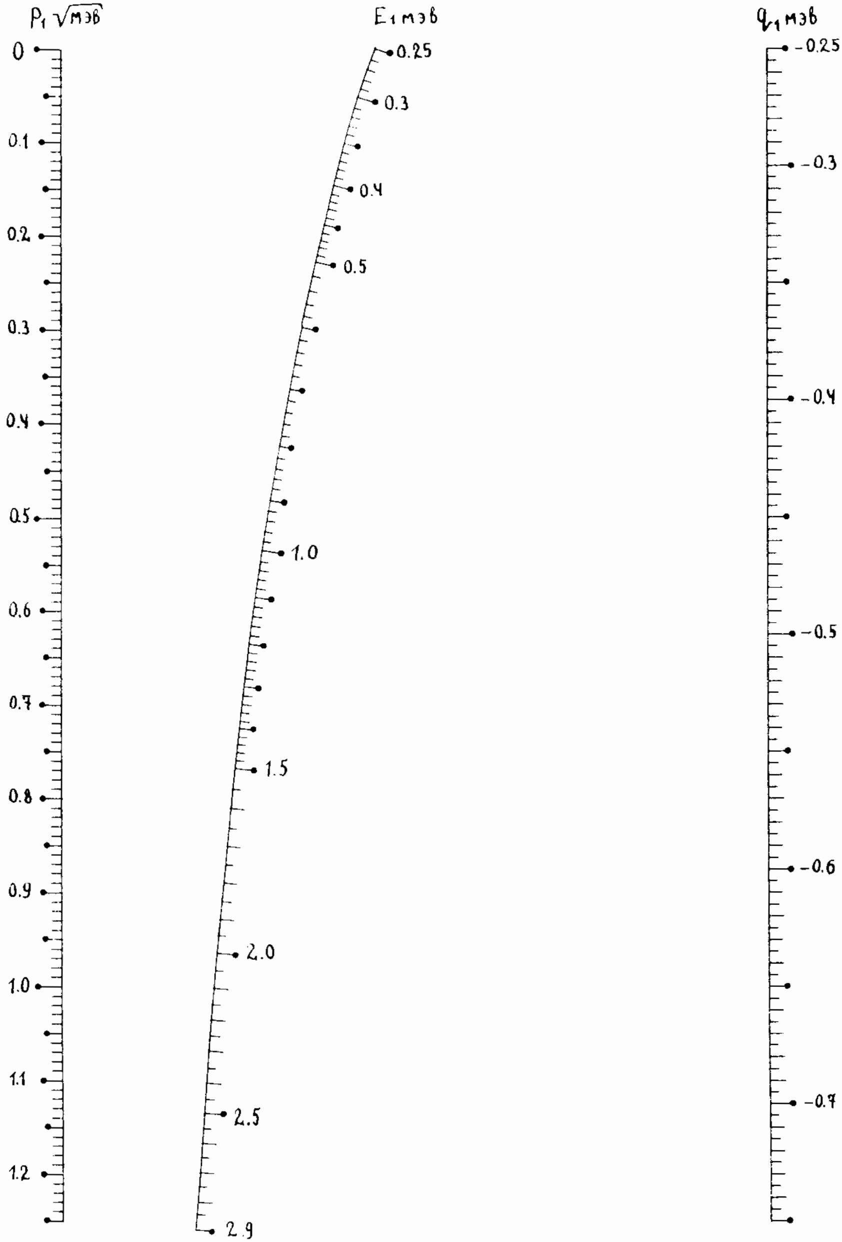

$P_1 = 2\,\frac{\sqrt{m_I\, m_1}}{M}\,\sqrt{E_I}\,\cos\theta_1$
при $\theta_1 < 90°$ $P_1 > 0$
при $\theta_1 > 90°$ $P_1 < 0$
при увеличении или уменьшении величины $\frac{\sqrt{m_I\, m_1}}{M}$ в 10 раз значение P_1 также увеличивается или уменьшается в 10 раз
$\theta_1°$
$\frac{\sqrt{m_I\, m_1}}{M}$
E_I мэв
P_1

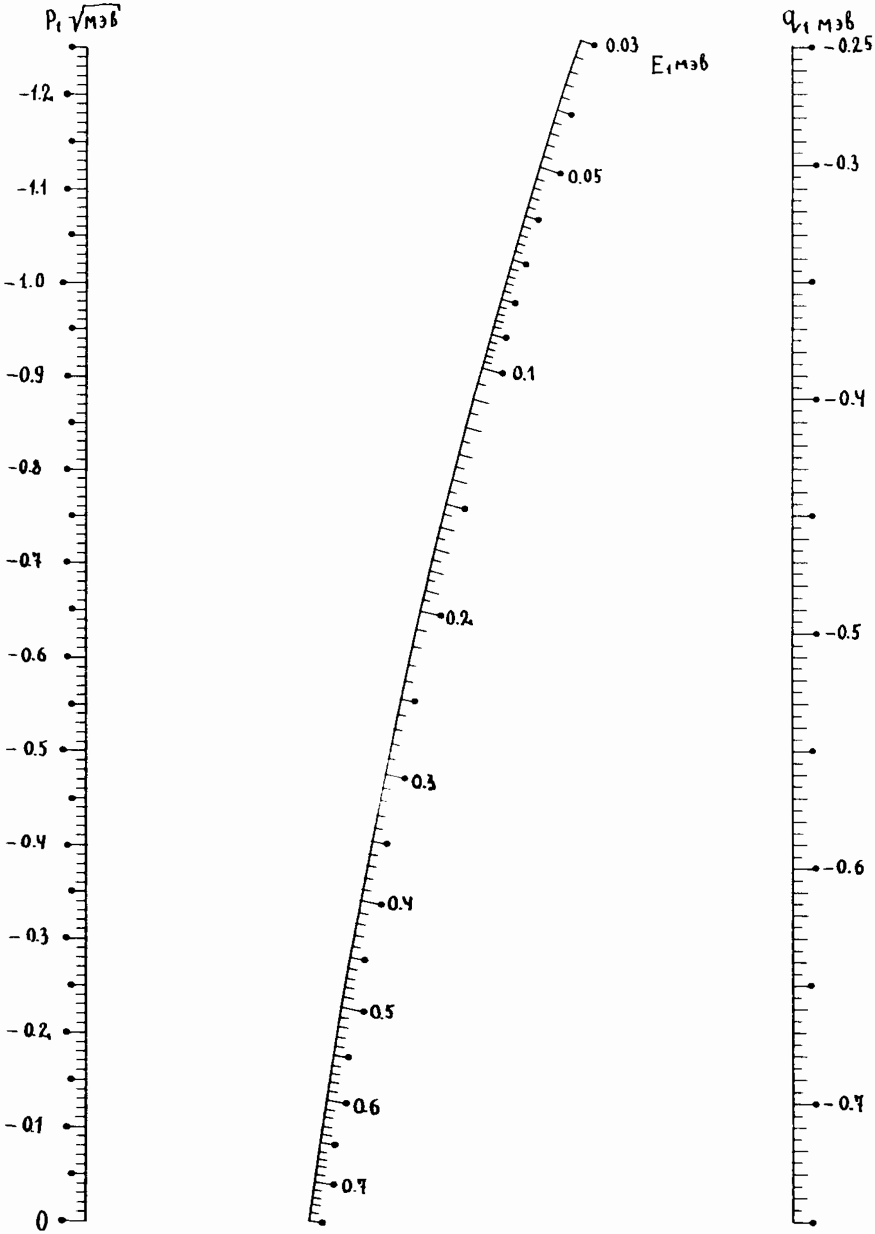


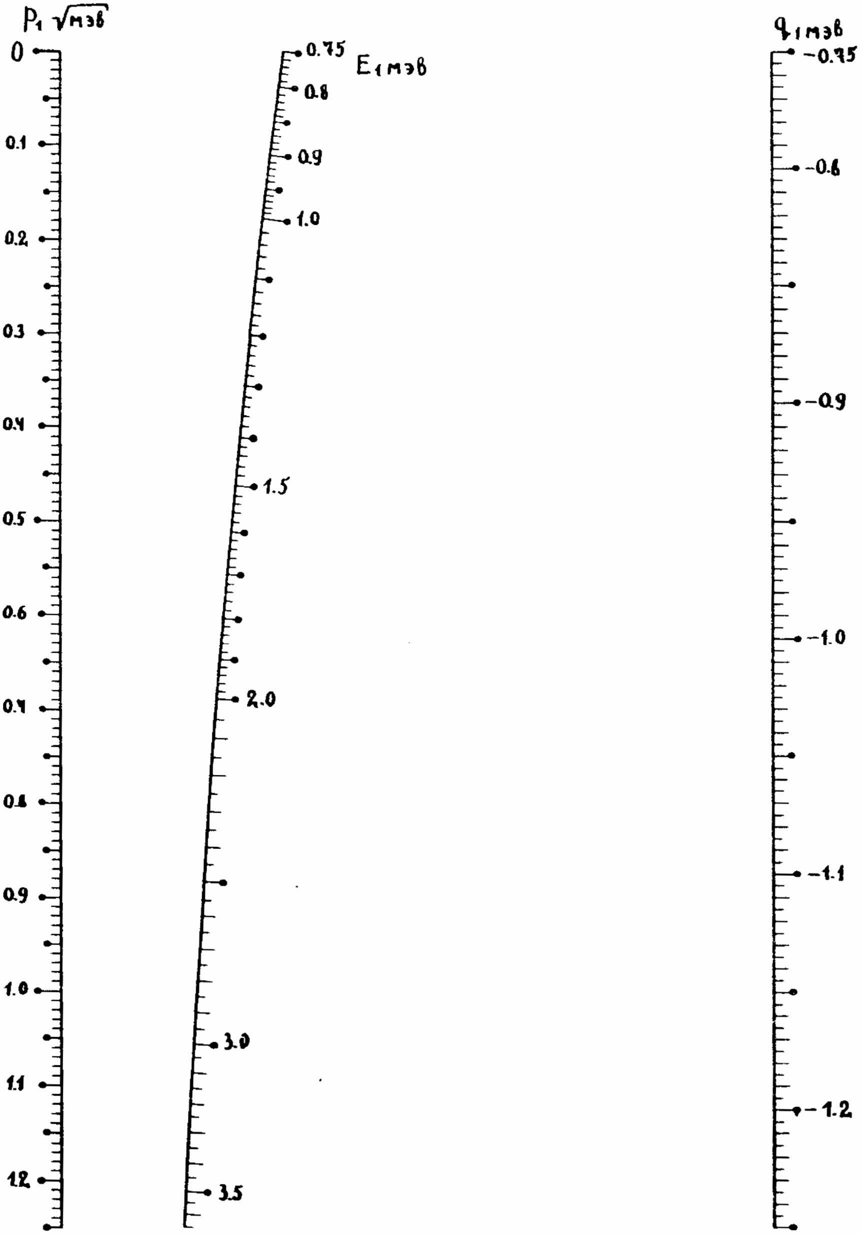
P1 √мэв
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
кэв
1
10
0.01
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
1.0
Мэв
1.5
2.0
E1
q1 мэв
0
-0.05
-0.10
-0.15
-0.20
-0.25



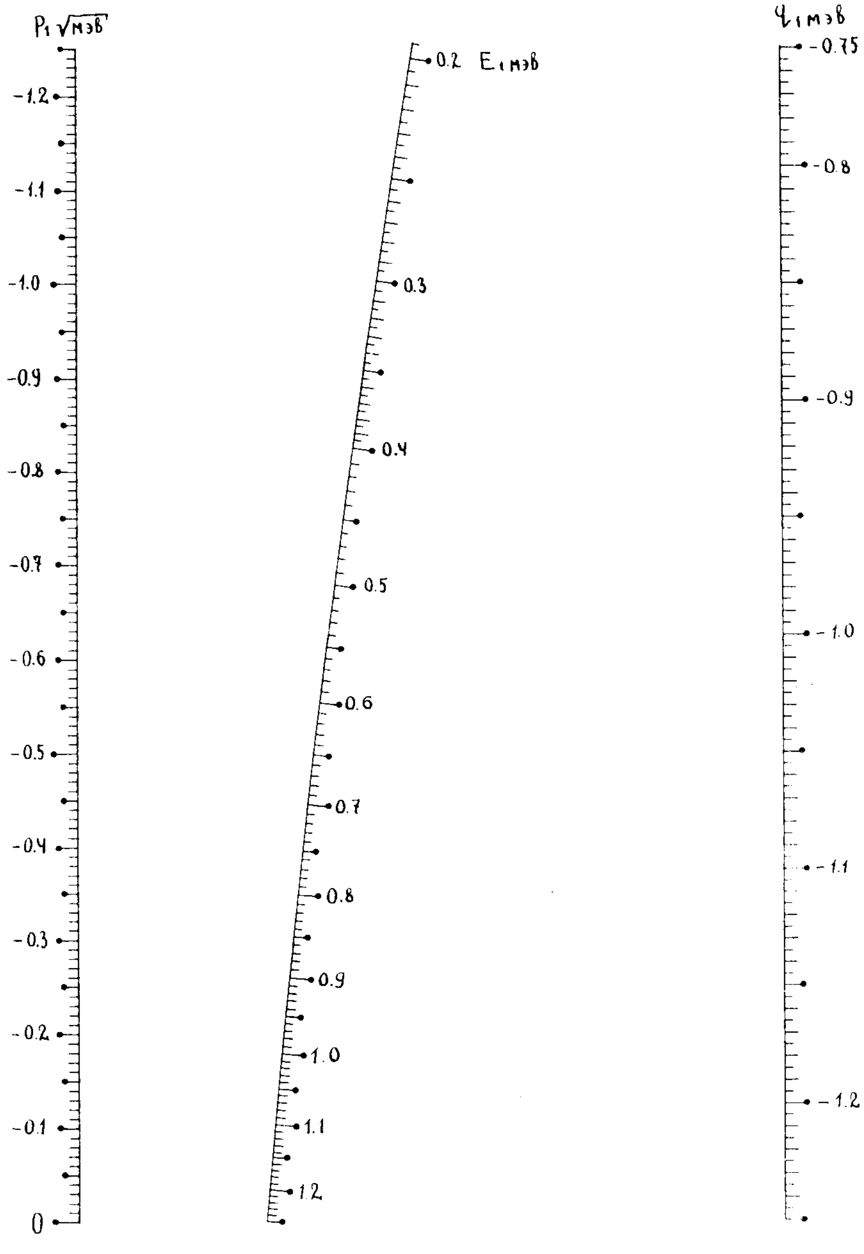
$P_1\ \sqrt{\text{мэв}}$
-1.2
-1.1
-1.0
-0.9
-0.8
-0.7
-0.6
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
q_1 мэв
0
-0.05
-0.10
-0.15
-0.20
-0.25
кэв
0
0.1
1
5
10
мэв
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.1
0.2
E_1

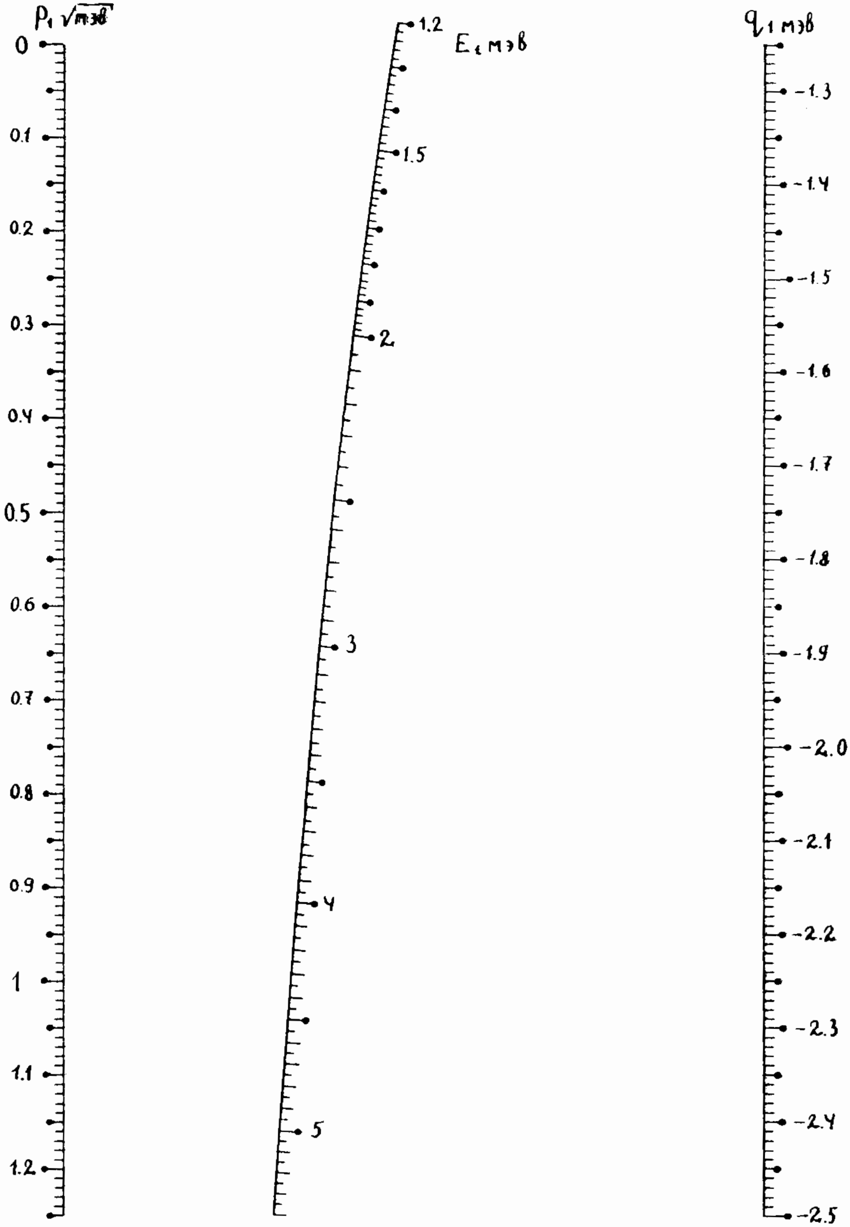

P1 √Мэв
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
E1 Мэв
0.25
0.3
0.4
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
2.9
q1 Мэв
-0.25
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7


P_1 $\sqrt{\text{мэв}}$
-1.2
-1.1
-1.0
-0.9
-0.8
-0.7
-0.6
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.03
E_1 мэв
0.05
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
q_1 мэв
-0.25
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7

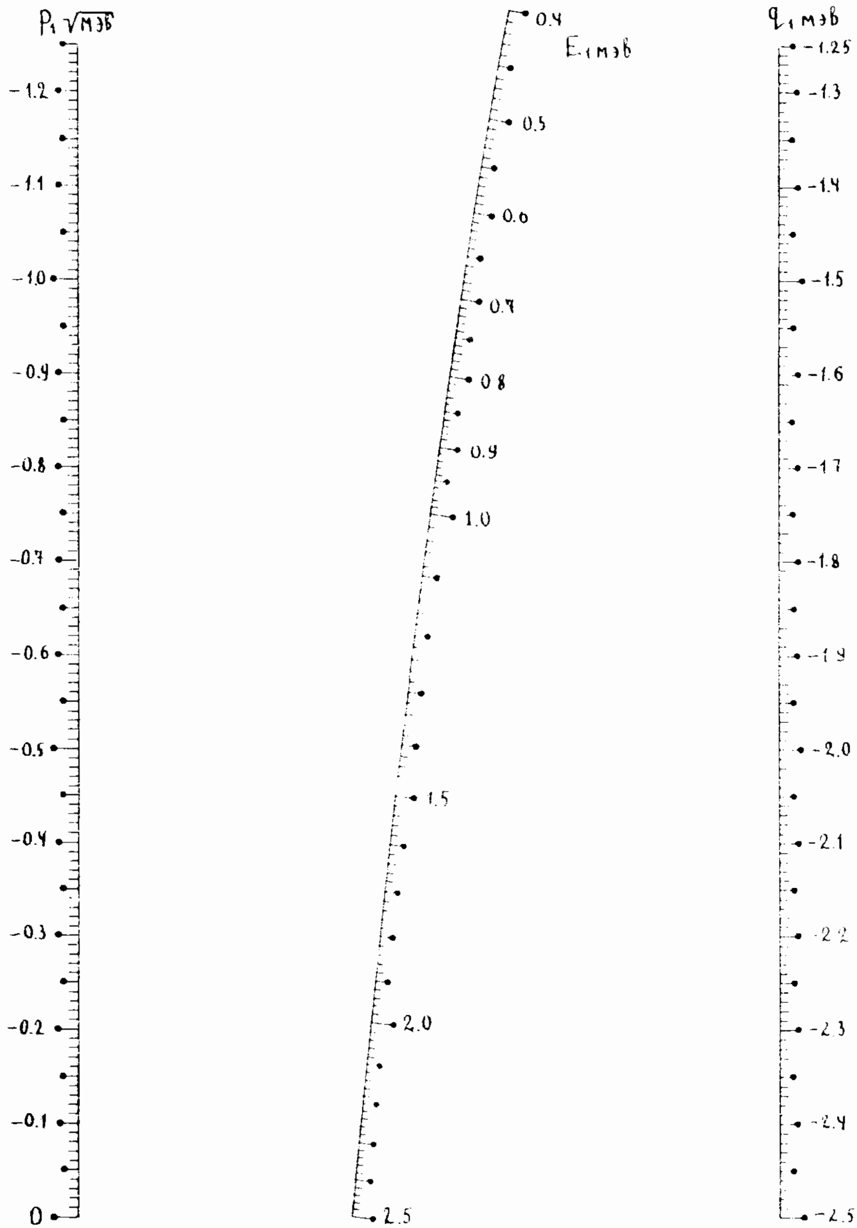


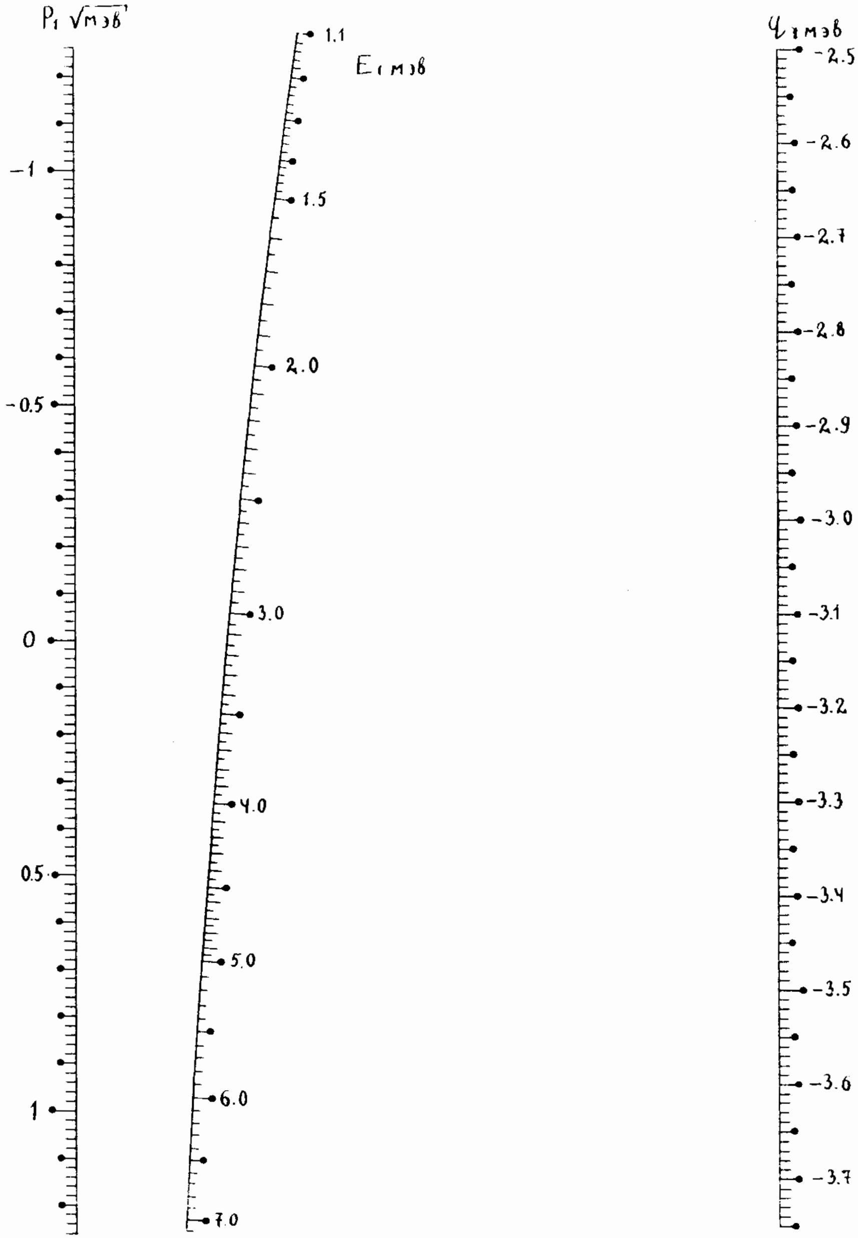
p, $\sqrt{\text{мэв}}$
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
E, мэв
0.75
0.8
0.9
1.0
1.5
2.0
3.0
3.5
q, мэв
−0.75
−0.8
−0.9
−1.0
−1.1
−1.2


P, √Мэв
-1.2
-1.1
-1.0
-0.9
-0.8
-0.7
-0.6
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.2 E, Мэв
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
q, Мэв
-0.75
-0.8
-0.9
-1.0
-1.1
-1.2

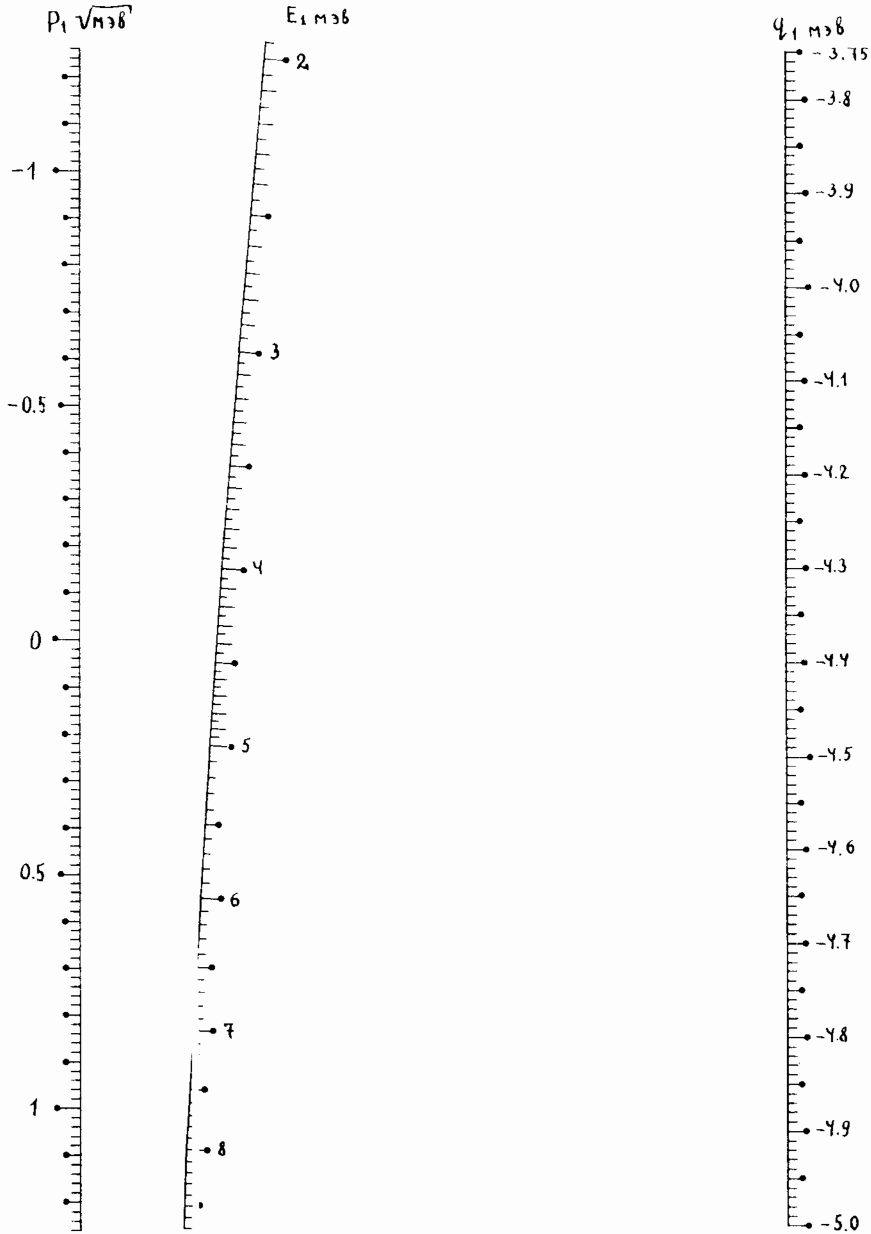


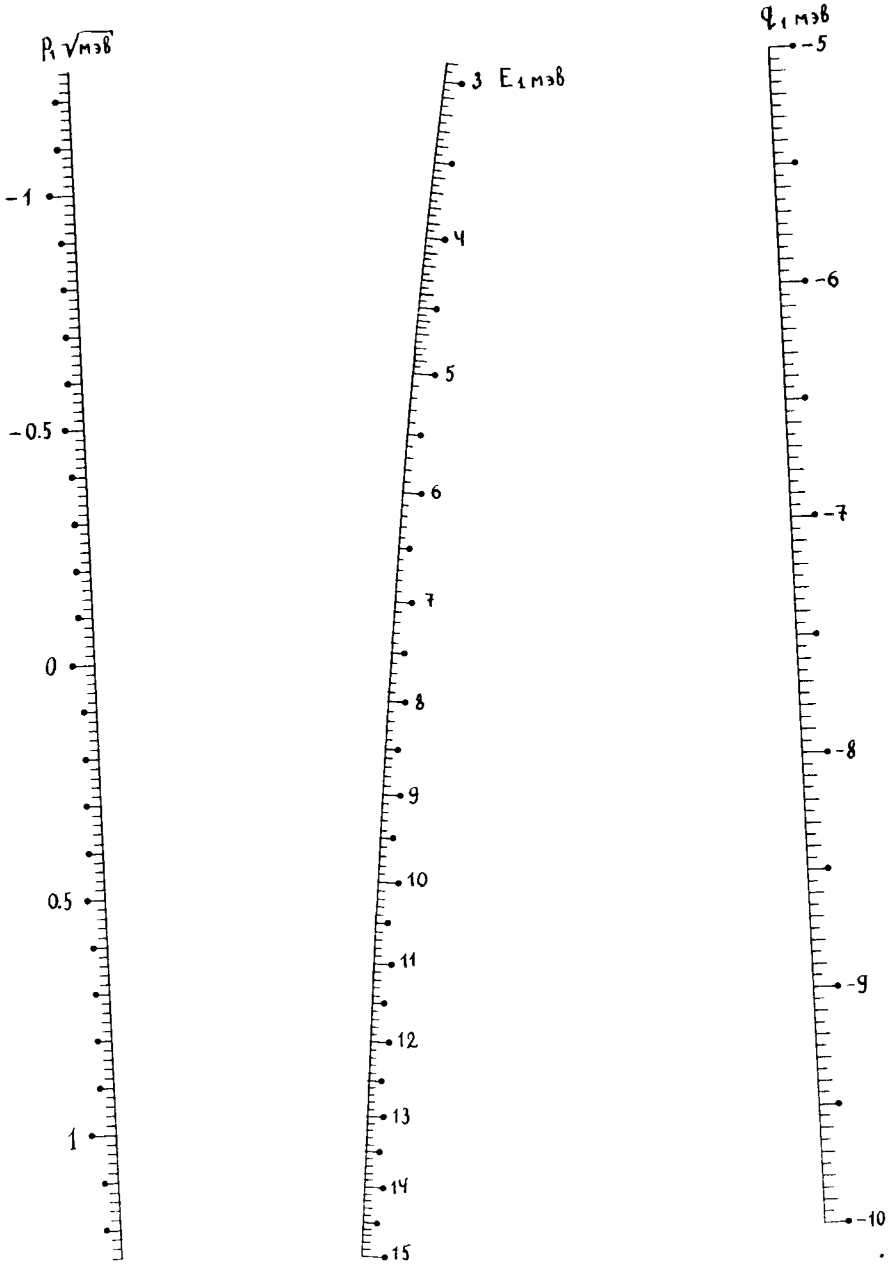
p, √mэв
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.2
E, mэв
1.5
2
3
4
5
q, mэв
-1.3
-1.4
-1.5
-1.6
-1.7
-1.8
-1.9
-2.0
-2.1
-2.2
-2.3
-2.4
-2.5

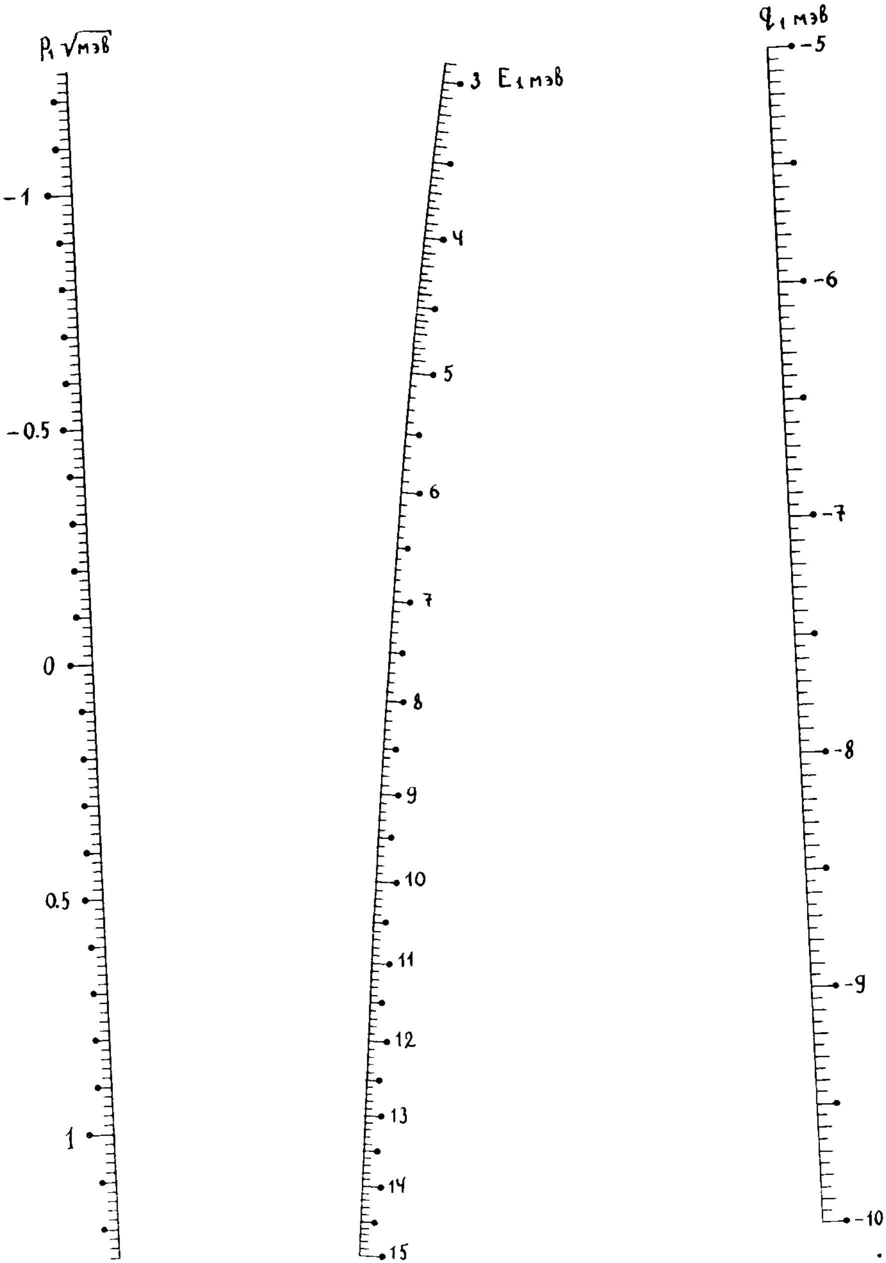

P, √МэВ
-1.2
-1.1
-1.0
-0.9
-0.8
-0.7
-0.6
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.4
E, Мэв
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.5
2.0
2.5
q, Мэв
-1.25
-1.3
-1.4
-1.5
-1.6
-1.7
-1.8
-1.9
-2.0
-2.1
-2.2
-2.3
-2.4
-2.5

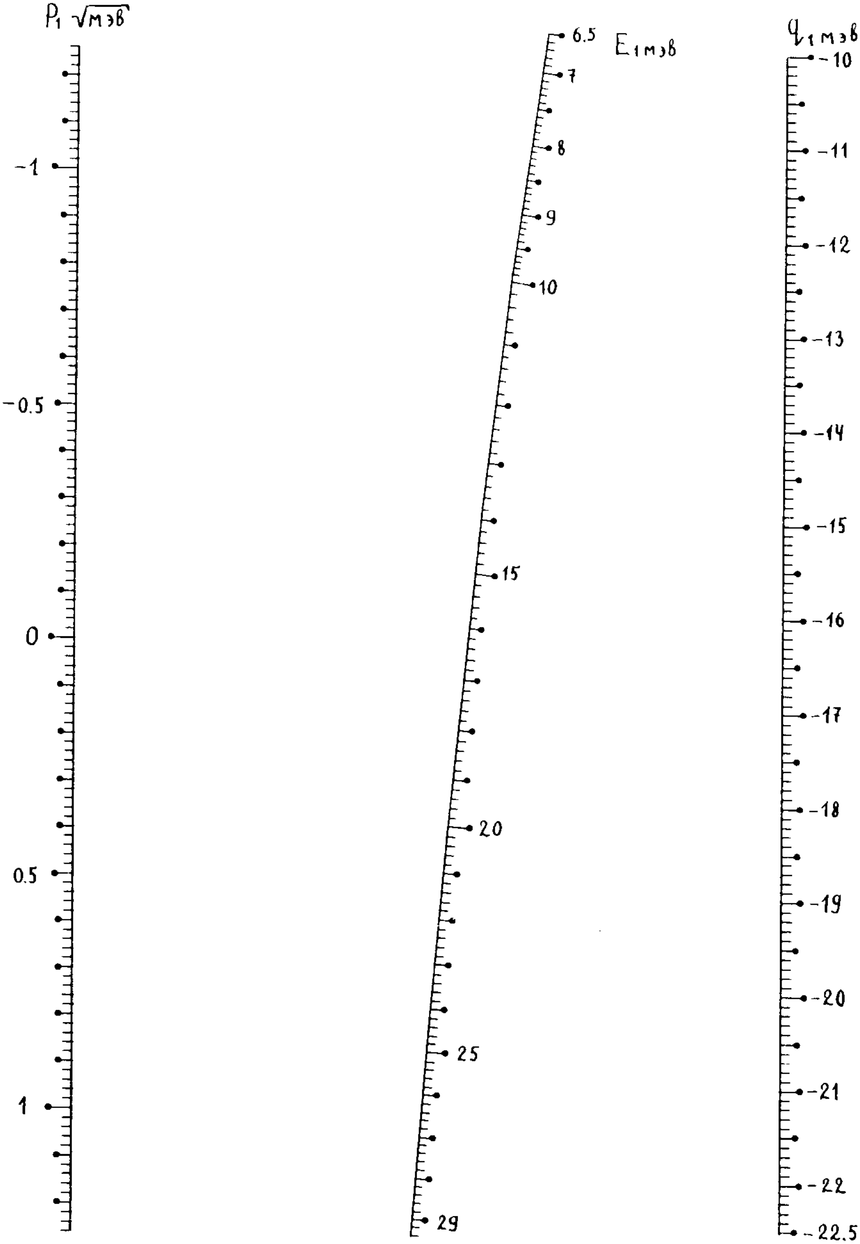


P₁ √мэв
-1
-0.5
0
0.5
1
E (мэв)
1.1
1.5
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
q (мэв)
-2.5
-2.6
-2.7
-2.8
-2.9
-3.0
-3.1
-3.2
-3.3
-3.4
-3.5
-3.6
-3.7

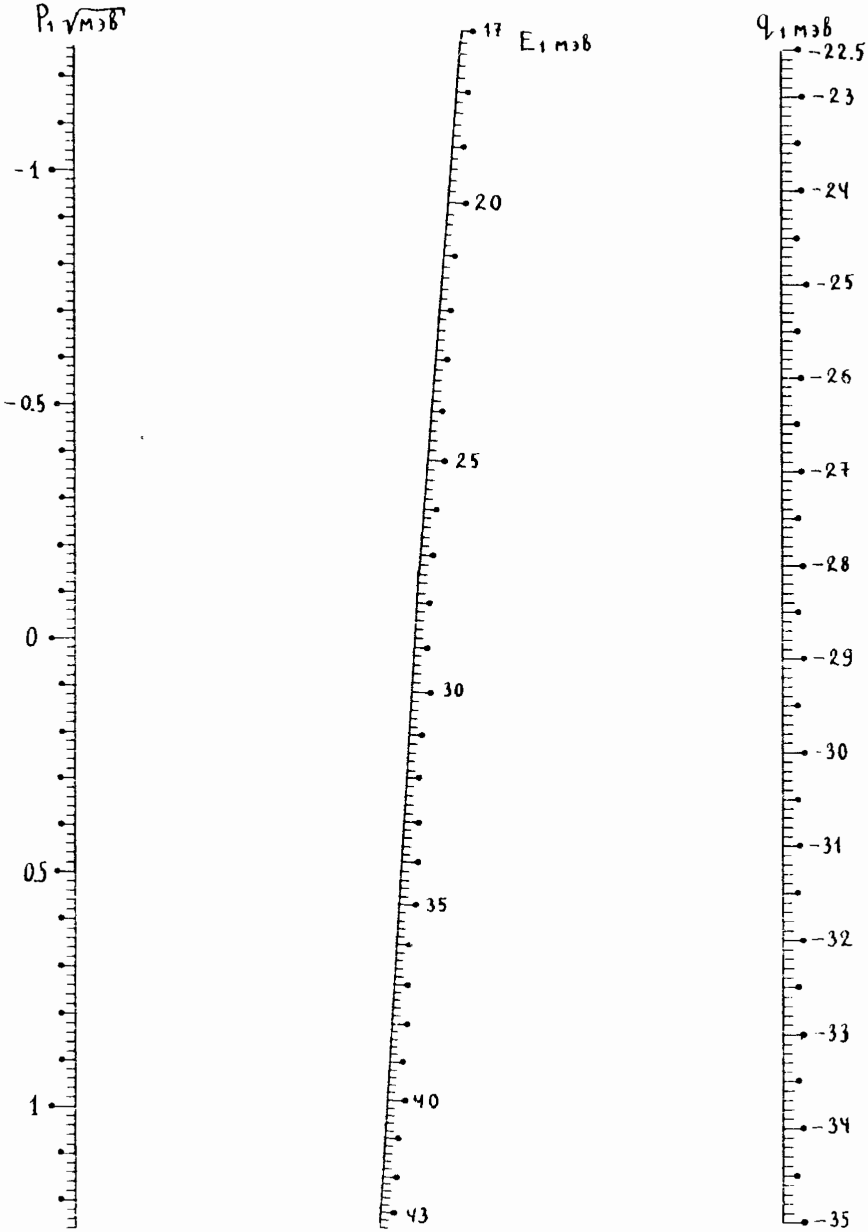

P, √Мэв
-1
-0.5
0
0.5
1
E, Мэв
2
3
4
5
6
7
8
q, Мэв
-3.75
-3.8
-3.9
-4.0
-4.1
-4.2
-4.3
-4.4
-4.5
-4.6
-4.7
-4.8
-4.9
-5.0


P₁ √мэв
−1
−0.5
0
0.5
1
3 E₁ мэв
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
q₁ мэв
−5
−6
−7
−8
−9
−10

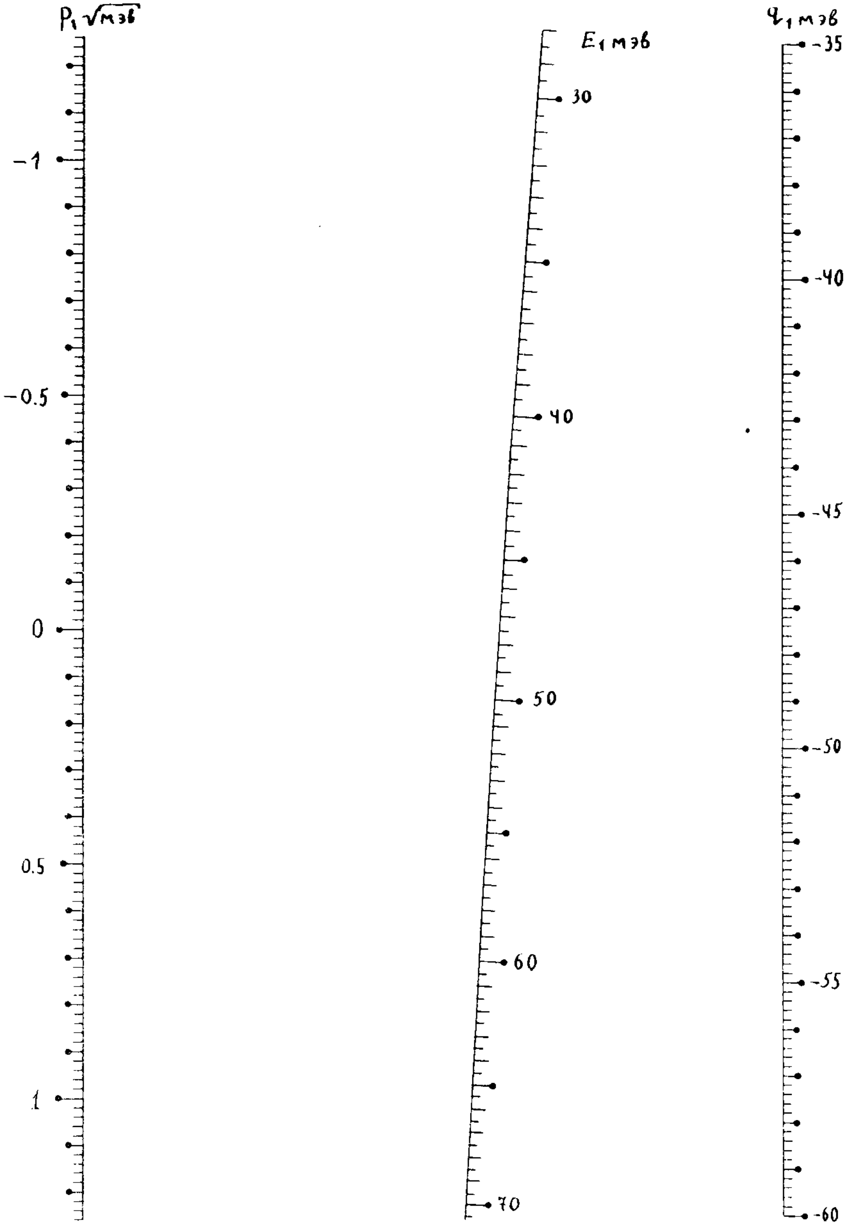

p1 √мэв
-1
-0.5
0
0.5
1
3 E1 мэв
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
q1 мэв
-5
-6
-7
-8
-9
-10

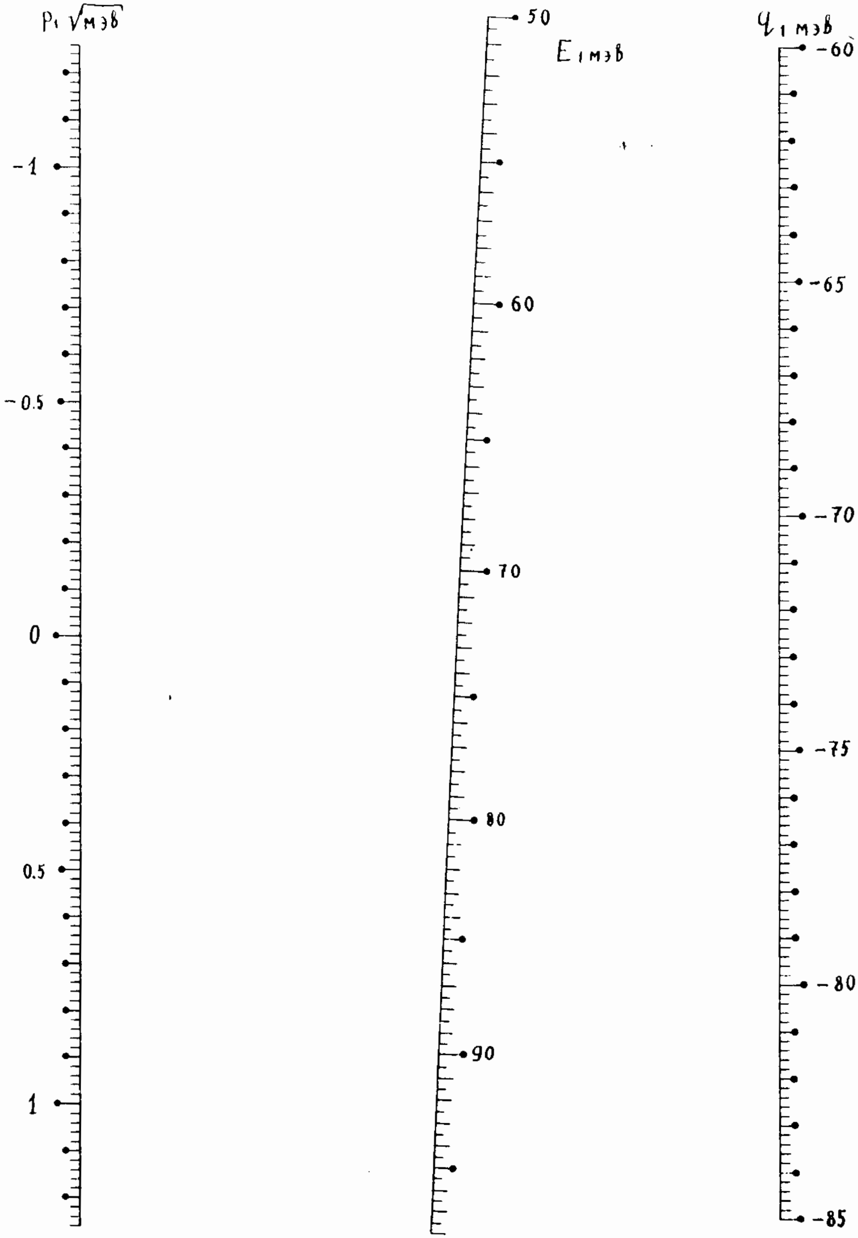


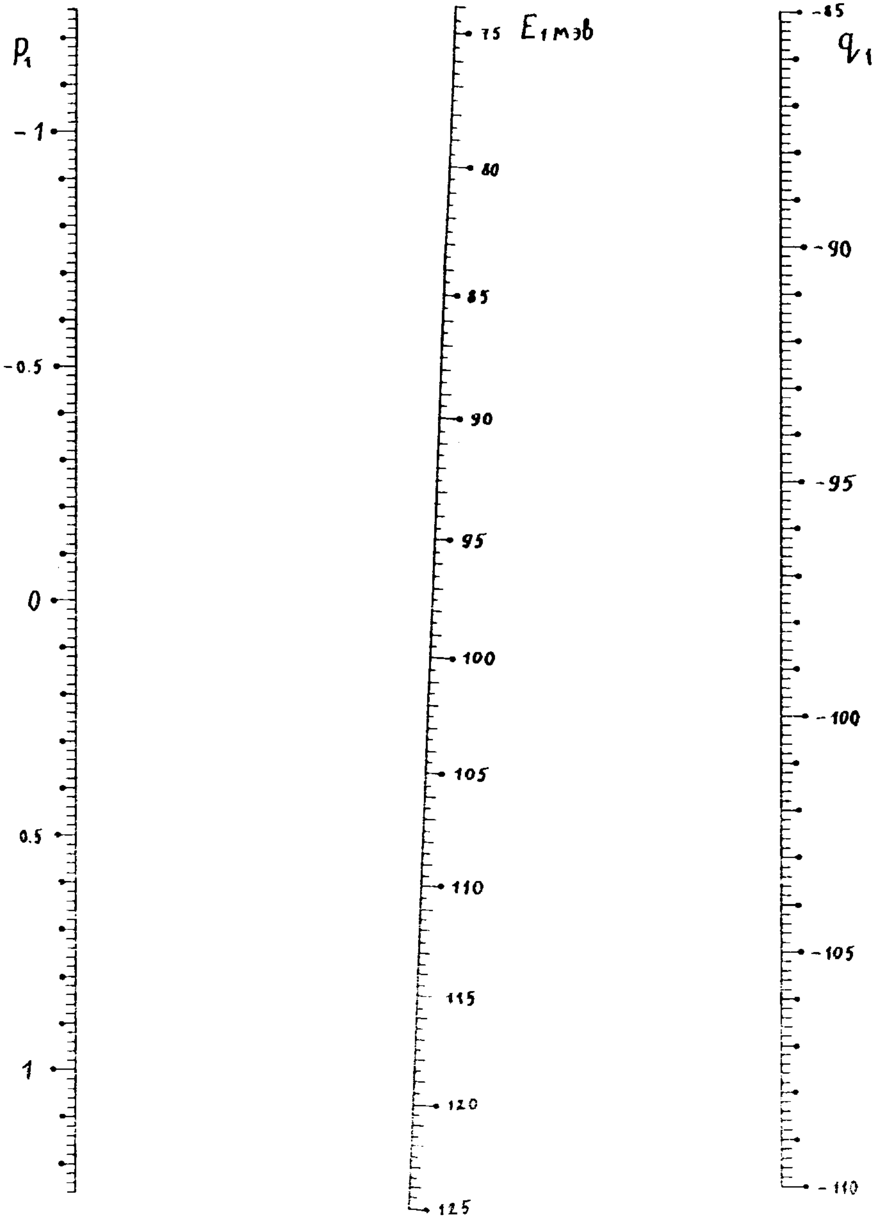
P_1 √MэB
−1
−0.5
0
0.5
1
E_1 MэB
6.5
7
8
9
10
15
20
25
29
q_1 MэB
−10
−11
−12
−13
−14
−15
−16
−17
−18
−19
−20
−21
−22
−22.5



P, √мэв
-1
-0.5
0
0.5
1
17
E, мэв
20
25
30
35
40
43
q, мэв
-22.5
-23
-24
-25
-26
-27
-28
-29
-30
-31
-32
-33
-34
-35

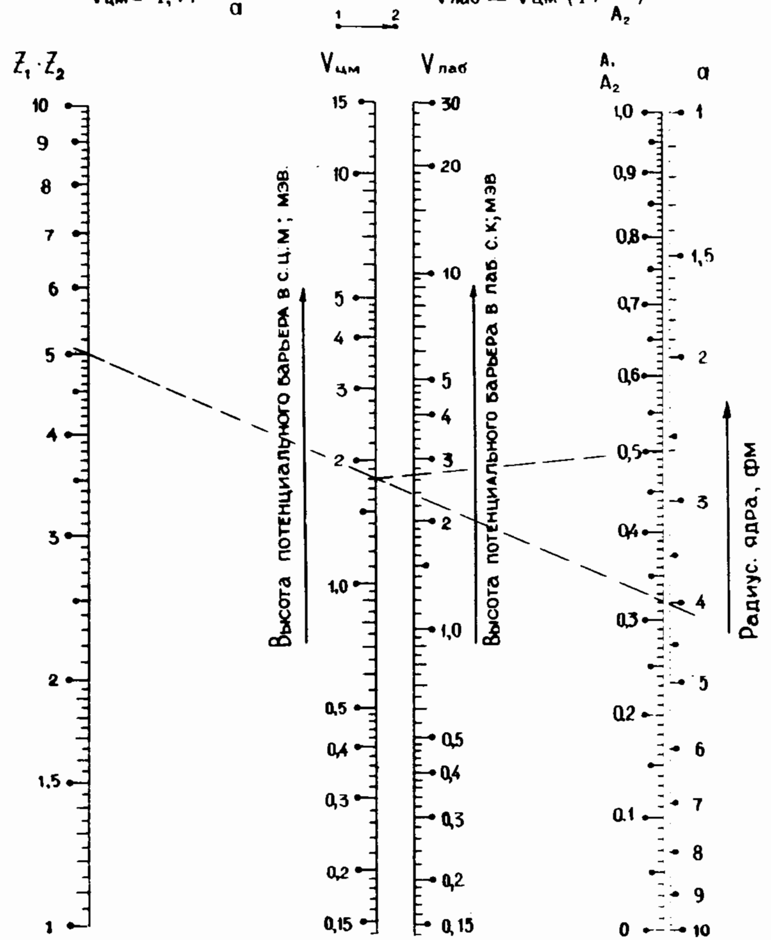

P, √мэв
-1
-0.5
0
0.5
1
E, мэв
30
40
50
60
70
Ч, мэв
-35
-40
-45
-50
-55
-60


p, $\sqrt{\text{мэв}}$
-1
-0.5
0
0.5
1
50
E, мэв
60
70
80
90
φ, мэв
-60
-65
-70
-75
-80
-85



p_1
-1
-0.5
0
0.5
1
E, Мэв
75
80
85
90
95
100
105
110
115
120
125
q_1
-85
-90
-95
-100
-105
-110

$$V_{цм} = 1{,}44\ \frac{Z_1 Z_2}{a} \qquad V_{лаб} = V_{цм}\left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right)$$



Пример дано : $Z_1Z_2 = 5$; $a = 4ф$; $A_1/A_2 = 0{,}5$

находим : $V_{цм}$ = 1,8 мэв ; $V_{лаб}$ = 2,7 мэв