СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 10984

Д.А.Трифонов В.Н.Иванов

ОБ ЭВОЛЮЦИИ МАКСИМАЛЬНО КЛАССИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ

1977

P4 - 10984

Д.А.Трифонов В.Н.Иванов

ОБ ЭВОЛЮЦИИ
МАКСИМАЛЬНО КЛАССИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ

Трифонов Д.А., Иванов В.Н.

Р4 - 10984

Об эволюции максимально классических состояний

Рассмотрена эволюция максимально-классических (и когерентных) состояний.

Найдены необходимые и достаточные условия для гамильтониана, допускающего стабильные максимально-классические состояния. Найден наиболее общий вид гамильтониана, для которого все максимально-классические состояния (в частности, все когерентные состояния) стабильны.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Trifonov D.A., Ivanov V.N.

P4 - 10984

On Evolution of Maximally-Classical States

The evolution of maximally-classical (and coherent) states is considered. The necessary and sufficient conditions for a Hamiltonian which permits stable maximally-classical states are found. The most general type of a Hamiltonian for which all maximally-classical states (in particular, all coherent states) are stable is found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

1. ВВЕДЕНИЕ

Эволюция максимально классических состояний (м.к.с.) была рассмотрена в работе [1] с точностью до членов первого порядка в разложении состояния $|\alpha(t+\tau), \mu(t+\tau)>$ по степеням τ. В этом приближении был получен общий вид гамильтониана $\hat{H}_{КЛ}$, для которого все м.к.с. всегда остаются максимально классическими. В настоящей работе выведем необходимые и достаточные условия для гамильтониана, сохраняющего максимальную классичность, без использования такого разложения. Будем решать эту задачу методом, близким методу Кано [2], который получил подобные условия при рассмотрении эволюции когерентных состояний (к.с.). Эволюция к.с. была рассмотрена ранее в работах [3,4] методом разложения к.с. $|\alpha(t+\tau)>$ (или гейзенберговского оператора $\hat{a}(t+\tau)$) в ряд по τ.

Состояние $|\psi>$ называем максимально классическим, если в нем произведение дисперсий координаты x и импульса p минимально:

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{h^2}{4},$$
$$(\Delta x)^2 = \overline{(x-\bar{x})^2}, \quad (\Delta p)^2 = \overline{(x-\bar{x})^2}. \qquad (1)$$

Здесь черта означает среднее по состоянию $|\psi>$.

Для того чтобы состояние $|\psi>$ было м.к.с., необходимо и достаточно, чтобы оно было собственным состоянием оператора уничтожения [5] $\hat{a}(\mu)$,

$$\hat{a}(\mu) = (2\mu)^{-1/2} (\hat{x} + i\mu\hat{p}),$$
$$\hat{a}(\mu)|\psi> = \alpha|\psi>, \qquad (2)$$

где μ есть произвольное положительное число, а собственное число α- комплексное. Таким образом, м.к.с. определяется тремя вещественными параметрами $\mathrm{Re}\,\alpha$, $\mathrm{Im}\,\alpha$ и μ и может быть обозначено $|\alpha,\mu>$. Система когерентных состояний (к.с.) содержится в системе м.к.с. и получается из последней при фиксированном параметре $\mu=\mu_0$. М.к.с. унитарно эквивалентны к.с./6/

$$|\,\text{м.к.с.}> = \exp\{-\frac{r}{2}[\hat{a}^{+2}(\mu_0) - \hat{a}^2(\mu_0)]\}\,|\,\text{к.с.}> = \hat{U}_r\,|\text{к.с.}>,$$

где (3)

$$r = \mathrm{arch}[\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu}})] \geq 0.$$

В x-представлении имеем следующий вид для нормированного м.к.с.

$$<x|\alpha,\mu> = (\pi\mu)^{-1/4}\exp[-(\frac{x}{\sqrt{2\mu}} - \alpha)^2 + \frac{1}{2}(\alpha^2 - |\alpha|^2)]. \quad (4)$$

2.ЭВОЛЮЦИЯ М.К.С.

Будем действовать в шредингеровском представлении, т.е. рассматривать м.к.с. $|\alpha,\mu>$ как начальное (при $t=0$) условие для решений уравнения Шредингера. Обозначим точное развитие во времени состояния $|\alpha,\mu>$ как $|\alpha(t),\mu(t),t> = \hat{S}\,|\alpha,\mu>$, где $\hat{S}$ - оператор эволюции системы. Ясно, что в общем случае при $t>0$ не будет иметь места равенство (1), т.е. $|\alpha(t),\mu(t),t>$ не будет собственной функцией оператора уничтожения (2) для некоторого $\mu(t)>0$ (и $<x|\alpha(t),\mu(t),t>$ не будет зависеть от x согласно формуле (4)). Найдем условия на гамильтониан системы, при которых это возможно, т.е. при которых имеем одновременные решения двух уравнений

$$(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H})|\alpha(t),\mu(t),t> = 0, \qquad (5)$$

$$\hat{a}(\mu(t)\,|\,\alpha(t),\mu(t),t> = \alpha(t)\,|\,\alpha(t),\mu(t),t>. \qquad (6)$$

Будем предполагать, что $\hat{H}$ выражен через операторы $\hat{a}^+(\mu(t)), \hat{a}(\mu(t))$, расположенные в нормальном порядке

$$\hat{H} = \sum_{k=0}[\hat{a}^+(\mu(t))]^k h_k(\hat{a}(\mu(t),t)$$
$$= \sum_{k,\ell=0} h_{k,\ell}(t)[\hat{a}^+(\mu(t))]^k[\hat{a}(\mu(t))]^\ell. \qquad (7)$$

Для выполнения условия эрмитовости $\hat{H}^+=\hat{H}$ нужно, чтобы $h_{k,\ell}(t) = h^*_{\ell,k}(t)$.

Пусть $|\alpha(t),\mu(t)>$ есть нормированное решение уравнения (6)

$$|\alpha(t),\mu(t)> = \exp[\alpha(t)\hat{a}^+(\mu(t)) - \alpha^*(t)\hat{a}(\mu(t))]\,|0;\mu(t)>,$$
$$\hat{a}(\mu(t))\,|\,0;\mu(t)> = 0. \qquad (8)$$

Любое нормированное решение уравнения (6) имеет вид (8). Тогда любое решение системы уравнений (5) и (6) совпадает с (8) с точностью до фазового множителя $\exp(i\phi(t))$, т.е.

$$|\alpha(t),\mu(t),t> = e^{i\phi(t)}\,|\alpha(t),\mu(t)>. \qquad (9)$$

Явный вид функций $\alpha(t),\mu(t)$ и $\phi(t)$ получается после подстановки (9) в (5). Умножим обе части уравнения (5) слева на м.к.с. $<\beta,\mu(t)| = (|\beta,\mu(t)>)^*$, где β есть произвольное число, а $\mu(t)$ - такое же, как и в $\hat{a}(\mu(t))$:

$$<\beta,\mu(t)\,|\,\hat{a}^+(\mu(t)) = \beta^*<\beta,\mu(t)|. \qquad (10)$$

С учетом (6) и (10) имеем

$$<\beta,\mu(t)|i\frac{\partial}{\partial t}|\alpha(t),\mu(t),t> = H(\beta^*,\alpha(t),t)<\beta,\mu(t)|\alpha(t),\mu(t),t>.$$

Для вычисления матричного элемента в левой части равенства (11) удобно воспользоваться явной зависимостью от x функции $<x|\alpha,\mu>$, которая дается формулой (4):

$$<\beta,\mu(t)|i\frac{\partial}{\partial t}|\alpha(t),\mu(t),t> = <\beta,\mu(t)|i\frac{\partial}{\partial t}\int dx\,|x><x|\alpha(t),\mu(t),t> =$$

$$= \{-\dot{\phi} + (i\dot{\mu}/4\mu(t))[\beta^{*2} - \alpha^2(t)] + i\dot{\alpha}(t)\beta^* - \tag{12}$$

$$-\frac{i}{2}[\dot{\alpha}(t)\alpha^*(t) + \alpha(t)\dot{\alpha}^*(t)]\}<\beta,\mu(t)|\alpha(t),\mu(t),t>.$$

Из (11) и (12), после сокращения на матричный элемент $<\beta,\mu|\alpha,\mu,t>$ и развития $H(\beta^*,\alpha(t),t)$ в ряд по степеням β^* получаем, приравнивая коэффициенты перед одинаковыми степенями, следующие условия

$$\dot{\phi} = -i\frac{\dot{\mu}}{4\mu(t)}\alpha^2(t) - \frac{i}{2}\frac{d}{dt}|\alpha(t)|^2 - h_o(\alpha(t),t), \tag{13}$$

$$\dot{\alpha} = -ih_1(\alpha(t),t), \tag{14}$$

$$\dot{\mu} = -4i\mu(t)h_2(\alpha(t),t), \tag{15}$$

$$0 = h_\ell(\alpha(t),t),\ \ell = 3,4,\ldots, \tag{16}$$

которые являются необходимыми и достаточными для существования стабильных м.к.с. у системы с гамильтонианом (7). Первые три условия можно рассматривать как дифференциальные уравнения для определения вещественных функций $\phi(t),\mu(t)$ и комплексной функции $\alpha(t)$, так что фактически условия (13)-(16) эквивалентны требованиям к коэффициентам h_ℓ гамильтониана

$$\mathrm{Im}\{-i\alpha^2(t)\mathrm{Im}h_2(\alpha(t),t) + i\mathrm{Im}[\alpha(t)h_1^*(\alpha^*(t),t)] - h_o(\alpha(t),t)\} = 0, \tag{16а}$$

$$\mathrm{Re}\,h_2(\alpha(t),t) = 0, \tag{16б}$$

$$h_\ell(\alpha(t),t) = 0,\ \ell = 3,4,\ldots, \tag{16в}$$

где $\alpha(t)$ определяется интегрированием уравнения (14) при начальном условии $\alpha(0)=\alpha$. Действительно, уравнение (14) практически всегда имеет однозначное решение при любом начальном условии $\alpha = \alpha(0)$, т.е. на коэффициент $h_1(\alpha(t),t)$ это уравнение не накладывает ограничения. Аналогично определяются $\mu(t)$ и $\phi(t)$, следовательно, ограничения на $h_k(\alpha,t)$ накладываются только условиями (16а)-(16в). Таким образом, начальное м.к.с. $|\alpha,\mu>$ будет оставаться при $t>0$ м.к.с. для тех квантовых систем, для которых выполняются условия (16).

Представляет интерес найти ограничения (более жесткие) на вид гамильтониана $\hat{H}_{кл}$, обеспечивающие одновременно стабильность всех м.к.с. $\{|\alpha,\mu>\}$. В силу однозначности соответствия $\alpha\to\alpha(t)$ это означает, что условия (16) должны иметь место для любого комплексного числа $\alpha(t)$. Если разложить в ряд по $\alpha(t)$ и $\alpha^*(t)$ коэффициенты $h_k(\alpha(t),t)$ и $h_k^*(\alpha^*(t),t)$, в силу произвольности α и α^* получим из (16) следующие необходимые и достаточные условия стабильности всех м.к.с.

$$\begin{aligned} &h_{k,\ell}(t) = 0,\quad k = 3,4,\ldots,\ \ell = 0,1,\ldots,\\ &h_{2,m}(t) = 0,\quad m = 1,2,\ldots,\\ &h_{2,0}(t) = -h^*_{2,0}(t),\end{aligned} \tag{17}$$

где величины $h_{k,\ell}(t)$ определены в (7). Отличными от нуля таким образом могут быть только коэффициенты $h_{0,0}(t), h_{1,0}(t) = h^*_{0,1}$, $h_{1,1}(t)$ и $h_{2,0}(t)=h^*_{0,2}(t)=-h^*_{2,0}$. Тогда наиболее общий вид гамильтониана $\hat{H}_{КЛ}$ дается формулой

$$\hat{H}_{КЛ} = h_{0,0}(t) + h_{1,0}(t)\hat{a}^+(\mu(t)) + h^*_{1,0}(t)\hat{a}(\mu(t)) + h_{1,1}(t)\hat{a}^+(\mu(t))\hat{a}(\mu(t)) + h_{2,0}(t)[\hat{a}^{+2}(\mu(t)) - \hat{a}^2(\mu(t))], \tag{18}$$

где $h_{0,0}(t), h_{1,1}(t)$ – произвольные вещественные функции, $h_{2,0}(t)$ – чисто мнимая, а $h_{1,0}(t)$ – произвольная комплексная функция. Функция $\mu(t)$ в (18) выражается через $h_{2,0}(t)$ согласно формуле (15) при $\alpha(t)=0$. Разумеется, можно считать $\mu(t)$ произвольной, а $h_{2,0}(t) = i\dot{\mu}(t)/4\mu(t)$. Удобно иметь $\hat{H}_{КЛ}$ выраженный через шредингеровские операторы $\hat{a} \equiv \hat{a}(\mu)$ и $\hat{a}^+$. Последние связаны с $\hat{a}(\mu(t))$ и $\hat{a}^+(\mu(t))$ формулами

$$\hat{a}(\mu(t)) = \hat{a}\,\mathrm{ch}\,r(t) + \hat{a}^+\mathrm{sh}\,r(t), \qquad \hat{a}^+(\mu(t)) = \hat{a}\,\mathrm{sh}\,r(t) + \hat{a}^+\mathrm{ch}\,r(t), \tag{19}$$

где

$$\mathrm{ch}\,r(t) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\mu(t)}{\mu}} + \sqrt{\frac{\mu}{\mu(t)}}\right], \qquad \mathrm{sh}\,r(t) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\mu}{\mu(t)}} - \sqrt{\frac{\mu(t)}{\mu}}\right], \qquad \mu \equiv \mu(0). \tag{20}$$

Из (19) и (18) имеем

$$\hat{H}_{КЛ} = \omega(t)[\mathrm{ch}^2 r(t) + \mathrm{sh}^2 r(t)]\hat{a}^+\hat{a} + \omega(t)\mathrm{ch}\,r(t)\,\mathrm{sh}\,r(t)(\hat{a}^{+2} + \hat{a}^2) + \frac{i}{2}\dot{r}(t)(\hat{a}^{+2} - \hat{a}^2) + F(t)\hat{a}^+ + F^*(t)\hat{a} + \beta(t), \tag{21}$$

где $\omega(t)$, $\beta(t)$ – произвольные вещественные функции, $r(t) \geq 0$, а $F(t)$ – произвольная комплексная функция.

Мы видим, что полученный здесь $\hat{H}_{КЛ}$ совпадает полностью с результатом работы [1], полученным в первом приближении при разложении м.к.с. $|\alpha(t+\tau), \mu(t+\tau), t\rangle$ по степеням τ.

Для $\hat{H}_{КЛ}$ уравнения (13)-(15) имеют решения

$$\mu(t) = \mu\exp[-4i\int_0^t h_{2,0}(t)dt],$$
$$\alpha(t) = \alpha e^{-i\psi(t)} - ie^{-i\psi(t)}\int_0^t e^{i\psi(t)} h_{1,0}(t)dt, \tag{22}$$
$$\phi(t) = \mathrm{Re}\{-\alpha^2(t)h_{2,0}(t) - h_{0,0}(t) - \alpha(t)h^*_{1,0}(t)\},$$

где $\psi(t) = \int_0^t h_{1,1}(t)dt$. В x-представлении м.к.с. $\langle x|\alpha(t),\mu(t)\rangle$ дается формулой (4), в которой α и μ заменяются $\alpha(t)$ и $\mu(t)$, определенными формулами (22).

Можно указать много случаев, когда более сложные, чем $\hat{H}_{КЛ}$, гамильтонианы сохраняют некоторые состояния максимально классическими. Например, гамильтониан

$$\hat{H} = \hat{H}_{КЛ} + \sum_{k,\ell=2}^{N}[\hat{a}^+(\mu(t))]^k\hat{a}^\ell(\mu(t))h_{k,\ell}(t), \tag{23}$$

где $\mu(t)$ дается первым уравнением (22), сохраняет максимальную классичность тех состояний $|\alpha,\mu\rangle$, для которых $\alpha(t)$ из (22) удовлетворяет уравнениям

$$\sum_{\ell=2} \alpha^\ell(t)h_{k,\ell}(t) = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots, N. \tag{24}$$

Для $N=3$ имеем простые условия

$$-\alpha(t) = \frac{h_{3,2}(t)}{h_{2,3}(t)} = \frac{h_{3,2}(t)}{h_{3,3}(t)}.$$

Отметим, что гамильтониан осциллятора с переменной частотой нельзя записать в виде (21), т.е. он не максимально классичен. Более того, можно показать [1], что в этом случае нет ни одного стабильного м.к.с. (так же как и ни одного стабильного к.с.), в то время как для стационарного осциллятора все м.к.с. стабильны.

То же самое утверждение справедливо и для случая движения заряженной частицы в однородном магнитном поле.

3. ЭВОЛЮЦИЯ К.С.

Развитие во времени к.с. можно рассматривать как частный случай эволюции м.к.с., соответствующий фиксированному параметру $\mu=\mu_0$ (или $r=0$). Связь между этими двумя классами состояний дается формулой (3). Из (21) при $r(t)=0$ получаем наиболее общий вид гамильтониана $\hat{H}_{\text{КОГ}}$, для которого вся система к.с. $\{|\alpha\rangle\}$ остается все время системой к.с.

$$\hat{H}_{\text{КОГ}}=\omega(t)\hat{a}^{+}\hat{a}+F(t)\hat{a}^{+}+F^{*}(t)\hat{a}+\beta(t). \qquad (25)$$

Этот результат совпадает с формулой для $\hat{H}_{\text{КОГ}}$, полученной в работах [3,4] методом разложения в ряд Тейлора к.с. $|\alpha(t+r)\rangle$. Здесь мы фактически показали, что полученные ранее [1,3,4] в первом порядке по r $\hat{H}_{\text{КОГ}}$ и $\hat{H}_{\text{КЛ}}$ на самом деле являются точными.

В настоящем рассмотрении фазовый множитель $\exp[i\phi(t)]$ оказался важным для видов $\hat{H}_{\text{КОГ}}$ и $\hat{H}_{\text{КЛ}}$, а также для условий (16) на коэффициенты гамильтонианов. Этот множитель был опущен в работе [2], где исследовалась эволюция к.с., вследствие чего получилось, что гамильтониан Мехты и Сударшана (25) сохраняет все к.с., только если $F(t)=0$. Недавно Летц [7] также показал, что гамильтониан (25) действительно не нарушает при эволюции (с произвольным $F(t)$) свойства когерентности начальных к.с. $\{|\alpha\rangle\}$.

Максимально классический гамильтониан $\hat{H}_{\text{КЛ}}$ можно получить из $\hat{H}_{\text{КОГ}}$ при помощи оператора U_r по формуле [8] $\hat{H}_{\text{КЛ}}=U_r\hat{H}_{\text{КОГ}}U_r^{-1}+i\frac{\partial U_r}{\partial t}U_r^{-1}$.

Общие условия (16) можно использовать для получения наиболее общего вида $\hat{H}$, сохраняющего стабильным любое к.с. или м.к.с. Легко найти общий вид $\hat{H}_{\text{ВАК}}$, для которого начальный вакуум $|0\rangle$, $\hat{a}|0\rangle=0$, остается вакуумом все время, т.е. $\hat{a}|0;t\rangle=0$, $(i\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}_{\text{ВАК}})|0;t\rangle=0$. С этой целью в условиях (16) надо положить $\alpha(t)=0=\dot{\mu}$. При этом получаем ограничения $h_{\ell,0}(t)=0$, $k=1,2,\ldots$

которые дают

$$\hat{H}_{\text{ВАК}}=h_{0,0}(t)+\sum_{k,\ell=1}h_{k,\ell}(t)\hat{a}^{+k}a^{\ell}, \qquad (26)$$

где $h_{0,0}(t)$, $h_{k,\ell}(t)$ – произвольные функции времени.

Полученные результаты относятся к одномерной квантовой системе, однако они легко обобщаются на многомерный (эвклидовый) случай. Например, вид $\hat{H}_{\text{КЛ}}$, для которого есть полная система м.к.с., таких, что в них $\Delta p_i\Delta x_j=\frac{\hbar}{2}\delta_{ij}$, есть

$$\hat{H}_{\text{КЛ}}=\omega_{ij}(t)\hat{a}_j^{+}(\mu_j(t))\hat{a}_i(\mu_i(t)) + i\frac{\dot{\mu}_j(t)}{4\mu_j(t)}[\hat{a}_j^{+2}(\mu_j(t))-\hat{a}_j^{2}(\mu_j(t))] + F_j(t)\hat{a}_j^{+}(\mu_j(t))+F_j^{*}(t)\hat{a}_j(\mu_j(t))+\beta(t), \qquad (27)$$

где $i,j=1,2,\ldots,N$.

В заключение один из авторов (Д.А.) выражает благодарность И.В.Полубаринову и В.И.Манько за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Trifonov D.A., Phys. Lett., (1974), 48A, p.165.
2. Kano Y., Phys. Lett., (1976), 56A, p.7.
3. Mehta C.L., Sudarshan E.C., Phys. Lett., (1966), 22, p.574.
4. Glauber R.J., Phys. Lett., (1966), 21, p.650.
5. Елютин П.В., Кривченков В.Д., Квантовая механика, "Наука", М., 1976.
6. Stoler D., Phys.Rev., (1970), D1, p.3217.
7. Letz H., Phys.Lett., (1977), 60A, p.399.
8. Stoler D., Phys.Rev., (1975), D11, p.3033.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 сентября 1977 года.