Б-67

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3278

М.К. Волков

МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ БЫСТРОГО РОСТА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
член-корреспондент АН СССР
профессор
Д.И.БЛОХИНЦЕВ

Дубна 1967

Диссертация посвящена исследованию релятивистской унитарной модели квантовой теории поля, содержащей, при рассмотрении ее в четырехмерном пространстве-времени, спектральные функции быстрого роста (т.е. растущие быстрее любого полинома). Цель диссертации состоит в том, чтобы показать, что существует ряд нетривиальных лагранжианов взаимодействия, приводящих к указанным спектральным функциям, на основе каждого из которых можно построить локальную теорию, свободную от ультрафиолетовых расходимостей или допускающую перенормировку конечного числа констант. При этом важно, чтобы S -матрица в такой теории была унитарной и не сводилась к единичной.

Вопросы, связанные с разделением полевых теорий на перенормируемые и неперенормируемые, выяснение связи проблемы нелокальности с проблемой неперенормируемости теории за последнее время изучались многими авторами [1-15]. Наибольший интерес вызывают теории, приводящие к спектральным функциям быстрого роста. До недавнего времени считалось, что эти теории в принципе неперенормируемы и нелокальны.

Однако недавно обнаружено, что существуют некоторые границы, в пределах которых полевые теории могут иметь спектральные функции быстрого роста, оставаясь в то же время локальными [7,8]. Предпринимаются также попытки сведения неперенормируемых теорий к перенормируемым [1,2,8-15]. Но до сих пор в этой области нет еще полной ясности.

Ввиду большой сложности описываемой проблемы приобретает особый интерес попытка рассмотрения простой модели, чтобы на ее основе разрешить наиболее интересующие нас вопросы.

Мы обратимся к исследованию модели, которая является релятивистским обобщением модели И.Бялыницкого-Бируля [16]. Он рассматривал локальную теорию поля с фиксированным "нуклоном", обладающим двумя состояниями с различными массами покоя. Наша модифицированная модель[17,18] близка к модели, рассмотренной Р.Арновитом и С.Дезером[19], только роль матриц γ_5 здесь играют матрицы изотопического спина и разложение ведется по Δm – разности масс "нуклонов" в двух различных состояниях, в то время как в[19] разложение велось по m – массе нуклона. Если $m \gg \Delta m$ (см. главу IV), то $\frac{\Delta m}{m}$ можно считать малым параметром разложения. В случае же $m = 0$ разложение по Δm носит несколько формальный характер.

Модель построена на лагранжиане взаимодействия[17]

$$L_{вз}(x) = -g : \overline{\Psi}(x) \tau_1 \gamma_\nu \Psi(x) \partial_\nu \phi(x) : - \Delta m : \overline{\Psi}(x) \tau_3 \Psi(x) :, \qquad (1)$$

где τ_1 и τ_3 – матрицы изотопического спина, γ_ν – матрицы Дирака, $\Psi(x)$ и $\phi(x)$ – операторы соответственно спинорного и скалярного полей.

Лагранжиан (1) обладает тем замечательным свойством, что при $\Delta m = 0$ унитарным преобразованием

$$\Psi'(x) = \Psi(x) e^{ig\tau_1 \phi(x)} \qquad (2)$$

он приводится к диагональному виду

$$L_{\Delta m = 0}(x) = L_0(\Psi'(x), \phi(x)),$$

где $L_0(\Psi', \phi)$ – лагранжиан свободных полей.

Та часть лагранжиана, которая содержит Δm, после преобразования (2) принимает вид существенно нелинейного взаимодействия

$$L'_{вз}(x) = \Delta m : \overline{\Psi}'(x) \tau_3 e^{-i2g\tau_1 \phi(x)} \Psi'(x) :. \qquad (3)$$

Знак нормального произведения относится здесь только к спинорным полям. Таким образом мы приходим к теории с зависимостью лагранжиана взаимодействия от поля $\phi(x)$ неполиномиального типа, что и приводит к появлению спектральных функций быстрого роста.

При рассмотрении модели в реальном четырехмерном пространстве-времени мы встречаемся с большой трудностью, возникающей при построении фурье-образов ряда величин. Например, спинорная функция Грина при $\Delta m = 0$ имеет вид[5,6,17]

$$G_0(x - x') = Z_2 S(x - x') e^{-ig^2 \Delta(x - x')}, \qquad (4)$$

где

$$S(x-x') = i \langle T(\Psi(x) \overline{\Psi}(x')) \rangle_0, \quad \Delta(x-x') = i \langle T(\phi(x)\, \phi(x')) \rangle_0$$

и $Z_2 = e^{ig^2 \Delta(0)}$ – константа перенормировки. Функция $G_0(x - x')$ в нуле интервала $(x - x')^2$ обладает существенной особенностью вида

$$G_0 \approx \exp\left\{ \frac{a}{(x - x')^2} \right\}; \quad (x - x')^2 \to 0, \qquad (5)$$

что и является причиной вышеупомянутого затруднения при построении фурье-образа этой величины.

Подобных неприятностей не возникает в двумерном случае[6,17,20], когда $\Delta(x)$ на световом конусе имеет лишь логарифмическую особенность в нуле интервала. Поэтому представляет известный интерес задача – рассмотреть релятивистскую модель в двумерном пространстве-времени, что и сделано в главе 1. Фурье-образы величин типа (4) определяются здесь обычным способом. Проведенные расчёты показали, что при определенных требованиях на величину константы связи g ($g^2 < \frac{\pi}{2}$), после проведения перенормировки конечного числа констант, теория в двумерном случае становится свободной от ультрафиолетовых расходимостей.

Разумеется, особый интерес представляет рассмотрение модели в реальном четырехмерном пространстве-времени /18,21,22/. Исследованию этого вопроса посвящена основная часть диссеретации (главы II – IV). Оказалось, что с помощью некоторой промежуточной регуляризации, не нарушающей унитарность S-матрицы в любом порядке теории возмущений по константам g и Δm, можно определить фурье-образ величины (4). Затем, при переходе к окончательным выражениям, регуляризация снимается так, что при этом не нарушается ни причинность, ни унитарность теории и ультрафиолетовые расходимости также не появляются. Мы рассматривали только тот случай, когда массы покоя скалярных частиц равны нулю. Обобщение на отличные от нуля массы покоя скалярных частиц представляет несомненный интерес, но мы не касаемся этого вопроса в диссертации.

Приведем в общих чертах описание метода регуляризации, использованного в диссертации /18/ (глава II). Выражение $F(p^2)$

$$F(p^2) = -i\pi^4 \int d^4x\, Sp\{S(x)S(-x)\} \exp i\{px - i(4\pi)^2 \kappa\Delta(x)\}, \tag{6}$$

где $\kappa = \left(\frac{g}{2\pi}\right)^2$, в случае, когда массы покоя всех частиц равны нулю, можно записать в виде:

$$F(p^2) = i\int d^3x \int_C dx_0\, e^{ipx} \frac{\exp\left[-\frac{4\kappa}{x^2}\right]}{(x^2)^3}, \tag{7}$$

где контур C определяется так, чтобы в экспоненте получался причинный пропагатор скалярной частицы. Интеграл (7) расходится. Чтобы получить конечное значение, мы определяем его как предел полусуммы регуляризованных функций:

$$F(p^2) = \lim_{\delta\to 0} \frac{F_\delta^{(1)} + F_\delta^{(2)}}{2}, \tag{8}$$

где

$$F_\delta^{\binom{1}{2}}(p^2) = i\int d^3x \int_C dx_0\, e^{ipx} \frac{\exp\left[-\frac{4\kappa}{x^2 \mp i\delta}\right]}{(x^2 \mp i\delta)^3}, \tag{9}$$

причем δ выбираются достаточно малыми для того, чтобы не нарушать свойст причинных функций, задаваемых контуром C. В нефизической области $p^2 < 0$ можно перейти к евклидовой метрике, делая поворот контура C до совмещения его с мнимой осью. Интеграл (9) сводится к одномерному интегралу

$$F_\delta^{\binom{1}{2}}(p^2) = -\frac{2\pi^2}{p}\int_0^\infty d\lambda\sqrt{\lambda}\, \mathcal{J}_1(p\sqrt{\lambda}) \frac{\exp\left[\frac{4\kappa}{\lambda \pm i\delta}\right]}{(\lambda \pm i\delta)^3}, \tag{10}$$

где $p = \sqrt{-p^2}$. Используя представление функции Бесселя

$$\mathcal{J}_1(p\sqrt{\lambda}) = i\frac{p\sqrt{\lambda}}{4}\int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} dy \frac{\left(\frac{|p|^2\lambda}{4}\right)^{iy}}{\operatorname{sh}\pi y\,\Gamma(1+iy)\,\Gamma(2+iy)}\quad (0 < a < 1), \tag{11}$$

можно взять интеграл по λ, предварительно повернув контуры интегрирования так, чтобы в экспоненте появился знак минус. При этом становится возможным переход к пределу $\delta \to 0$ и окончательное выражение для (6) имеет вид $(p^2 = p_0^2 - \vec{p}^{\,2})$

$$F(p^2) = \frac{\pi^2}{4}(p^2 + i\epsilon)\sum_0^\infty \frac{[\kappa(p^2 + i\epsilon)]^n}{n!(n+1)!(n+2)!}\left[\ln(\kappa p^2 e^{-i\pi}) - \Psi(n+3) - \Psi(n+2) - \Psi(n+1)\right] + \frac{\pi^2}{4\kappa}. \tag{12}$$

где $\Psi(a)$ – пси-функция Эйлера. Это выражение для двухточечной функции Грина удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к унитарной причинной локальной теории.

В третьей главе рассмотрены высшие порядки теории возмущений по Δm. Для двухточечных функций Грина построены спектральные представления вида

$$G_\delta(p) = -\hat{p}\left\{\frac{1}{p^2+i\epsilon} + \frac{\kappa}{2\pi i}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty}\frac{f_\delta(z+1)}{\Gamma(z+1)\Gamma(z+2)}\int_0^\infty dm^2\,\frac{m^{2(z-1)}}{m^2-p^2-i\epsilon}\right\}, \qquad (13)$$

где $G_\delta(p)$ – фурье-образ функции (4), а $f_\delta(z+1)$ – регуляризованная функция, возникающая при подстановке (11) в (10). С помощью этого представления легко доказать выполнение условия унитарности в высших порядках (в третьем и втором порядках это доказано и прямым расчётом). С помощью другого интегрального представления

$$G_\delta(p) = -i\hat{p}\,\frac{\kappa}{2}\int_{a+i\infty}^{a-i\infty}dz\,\frac{e^{-i\pi z}(p^2+i\epsilon)^{z-2}}{\sin\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z+1)}\,f_\delta(z) \qquad (14)$$

определены интегралы от произведения двухточечных функций Грина и показано отсутствие в них ультрафиолетовых расходимостей в любом порядке теории возмущений по Δm.

В последней главе сделано обобщение теории на случай отличных от нуля спинорных масс покоя /22/. Показано, что и в этом случае мы не выходим из рамок унитарной локальной теории поля, не содержащей ультрафиолетовых расходимостей.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах /17,18,21,22/. В обсуждении использовались также результаты работ /14,23/.

Литература

1. W. Guttinger. Nuovo Cim., 10, 1 (1958); Fortshr. der Phys, 14,8/9(1966).
2. W. Guttinger, E. Pfaffelhuber. Preprint CERN-Geneva 66/562-TH 660.
3. B. Schroer, J. Math. Phys., 5, 1361 (1964).
4. R. Bardakci, B. Schroer. J. Math. Phys. , 7, 10 (1966) .
5. T. Pradhau. Nucl. Phys., 43, 11 (1963).
6. B. Klaiber. Nuovo Cim., 36, 165(1965) ; Helv. Phys. Acta, 37, 554(1964).
7. Н.Н.Мейман. ЖЭТФ, 46, 1502 (1964).
8. A. Jaffe. Phys. Rev. Lett., 17, 661 (1966); Preprint Stanford University Jan. 1967.
9. R. F. Sawyer. Phys. Rev., 134, B448 (1964) .
10. G. Feinberg, A. Pais. Phys. Rev., 131, 2724 (1963) ; 133, B447(1964) .
11. B.A. Arbuzov, A.T. Filippov. Nuovo Cim., 38, 796 (1965); Phys. Lett., 13, 95 (1964).
12. D.I. Blokhintsev. Preprint, E-983 Dubna (1962); Intern. Conf. on High Energy Phys. at CERN 687 (1962).
13. Г.В.Ефимов. ЖЭТФ, 44, 2107 (1963); ЖЭТФ, 48, 596 (1965); Nuovo Cim., 32, 1046 (1964); Ядерная физика, II , 180 (1965). Nucl. Phys., 74, 657 (1965);
14. М.К.Волков, Г.В.Ефимов. ЖЭТФ, 47, 1800 (1964).
15. E.S. Fradkin. Nucl. Phys., 49, 624 (1963).
16. I. Bialynicki-Birula. Nucl. Phys., 12, 309 (1959) .
17. М.К.Волков. Ядерная физика, II , 171 (1965).
18. М.К.Волков. Препринт ОИЯИ, Р2-3114, Дубна, 1967.Направлено в ЯФ .
19. R. Arnowitt, S. Deser. Phys. Rev., 100, 347 (1955).
20. D. Dubin, J. Tarski. Preprint New York, University (1966).
21. M.K. Volkov. Preprint, E2-3266, Dubna, (1967). Направлено в ЯФ.
22. М.К.Волков. Препринт ОИЯИ, Р2-3270, Дубна, 1967. Направлено в Phys. Lett.
23. Б.М.Барбашов, М.К.Волков. ЖЭТФ, 50, 660 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
14 апреля 1967 года.