

Р-823

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2882-2



4547/3 ур

Н.Б. Рубин

О КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ  
ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО КОЛЬЦА ТИПА БУДКЕРА  
В ПРИБЛИЖЕНИИ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1966

2882-2

Н.Б. Рубин

О КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ  
ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО КОЛЬЦА ТИПА БУДКЕРА  
В ПРИБЛИЖЕНИИ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ



## В в е д е н и е

В работе рассматривается квазистационарное состояние электронно-ионного будкерского <sup>/1/</sup> кольца во внешнем азимутальнооднородном магнитном поле с учетом собственных сил в приближении самосогласованного поля. Внешнее магнитное поле считается зависящим от радиуса, и эта зависимость характеризуется, как обычно, функцией 
$$n(r) = -\frac{r}{K_x} \cdot \left. \frac{\partial K_x}{\partial r} \right|_{x=0}$$
 где  $K_x$  — z-компонента магнитного поля. Силовые линии этого поля предполагаются симметричными относительно плоскости  $z = 0$ .

Вначале считается, что во внешнем магнитном поле имеется как данный однороднозаряженный тор эллиптического сечения, состоящий из движущихся электронов и ионов (протонов). Далее выясняются некоторые необходимые условия существования кольца указанного типа и условия, при которых такая модель удовлетворяет кинетическому уравнению с самоогласованным полем. Функция распределения частиц в фазовом пространстве как для ионов, так и для электронов берется в форме, примененной для образований из частиц одного сорта в <sup>/2/</sup> и в <sup>/3/</sup>  $x/$ , когда в первом приближении энергия всех частиц одного типа одинакова. Для чисто электронных пучков или в присутствии достаточно малого числа ионов используется также функция распределения в специальной форме, учитывающей некий определенный спектральный набор энергий электронов в пучке, иначе говоря, набор мгновенных орбит, около которых частицы совершают колебания.

Рассмотрение ведется в приближении, когда линейные размеры эллиптического сечения тора малы по сравнению с радиусом кольца. В работе вычисляются энергетические характеристики пучка, температуры и т.п. и их связь с размерами сечения тора и внешним магнитным полем. Некоторые результаты сравниваются с таковыми для "беннетовского" прямолинейного пучка <sup>/4/</sup>, если пренебречь в нашем случае внешней фокусировкой. Вообще же эта фокусировка везде учитывается, ее присутствие, в частности, снимает некое вырождение, имеющее место в беннетовском пучке, сводящееся к тому, что радиус последней не связан с энергетическими параметрами.

В данной работе, однако, не рассматривается излучение частиц и столкновения электронов с ионами. Эти эффекты, согласно <sup>/1/</sup> при наличии компенсирующего внешнего электрического поля и определенного механизма создания кольца определяют размеры  $x/$  Аналогия с <sup>/2/</sup> касается "поперечной" части функции распределения (см. ниже).

его сечения; у нас размеры пучка считаются заданными. Вопросы о способах создания такого кольца и его устойчивости также не обсуждаются.

Подчеркнем, что рассмотрение ведется непосредственно применительно к случаю тороидального сгустка (конечно, в определенном приближении) и какие-либо косвенные аналогии с беннетовским пучком за основу не берутся.

### § 1. Уравнения движения частицы

Рассмотрим уравнения, которым подчиняется движение какой-либо частицы в совокупном поле - внешнем и поле тороидального сгустка. Запишем поле сгустка. Если центральный (или "большой") радиус  $r_n$  однороднозаряженного тора много больше размеров сечения, координаты в котором обозначим  $\rho = r - r_n$  и  $z$ , то поле, созданное каждой из компонент (электронной или ионной) внутри сечения тора, может быть приближенно представлено в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_\rho^{(e,i)} &= \frac{e_{e,i} N_{e,i}}{\pi r_n b g} \cdot \frac{2}{(1+g/b)} \rho + \frac{e_{e,i} N_{e,i} \ell_n}{2\pi r_n^2} \frac{16r_n}{(b+g)} \\ \mathcal{E}_z^{(e,i)} &= \frac{e_{e,i} N_{e,i}}{\pi r_n b g} \cdot \frac{2}{(1+b/g)} \cdot z \end{aligned} \right\} (1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_\rho^{(e,i)} &= \frac{e_{e,i} N_{e,i} V_{e,i}}{\pi r_n b g} \cdot \frac{2}{(1+b/g)} z, \\ \mathcal{H}_z^{(e,i)} &= -\frac{e_{e,i} N_{e,i} V_{e,i}}{\pi r_n b g} \cdot \frac{2}{(1+g/b)} \rho + \frac{e_{e,i} N_{e,i} V_{e,i} \ell_n}{2\pi r_n^2} \frac{16r_n}{(b+g)}. \end{aligned} \right\} (1.2)$$

Электронный и ионный торы предполагаются совмещенными и имеющими одинаковые размеры;  $g$  и  $b$  - полуоси эллиптического сечения тора соответственно вдоль  $\rho$  и  $z$ ;  $e_{e,i}$  - соответственно заряды электронов или ионов;  $N_{e,i}$  - полные числа частиц в торах;  $V_{e,i}$  - отнесенные к  $c \theta^\circ$  - скорости электронов или ионов. Значения параметров  $r_n$ ,  $b$ ,  $g$ ,  $V_{e,i}$  пока не конкретизируем.

При выводе (1.1) и (1.2) сохранены члены, содержащие  $\ell_n \frac{16r_n}{(b+g)}$  (см.  $\mathcal{E}_\rho$  и  $\mathcal{H}_z$ ), хотя обычно и меньшие, чем максимальные значения тех, которые пропорциональны  $\rho$  и  $z$  (в особенности при достаточно малых отношениях  $g/r_n$ ,  $b/r_n$ ), однако они в несколько раз больше отброшенных квадратичных (по  $\frac{\rho}{r_n}$ ,  $\frac{z}{r_n}$ ,  $\frac{g}{r_n}$  и т.п.) членов. Скорости  $V_{e,i}$  при расчете собственных полей считаются не зависящими от  $\rho$  и  $z$ ; вообще уточнение здесь дало бы более высокий порядок, который при наших предположениях не должен учитываться. В одном случае (см. дальше)

было бы, однако, желательно учесть соответствующие поправки, но при этом будут выдвинуты аргументы, позволяющие прийти к результату, который все же не очень зависит от этих поправок. Решение электродинамической задачи, дающей приближенные выражения (1.1) и (1.2), не представляет трудностей, но довольно громоздко (см., например, /5/).

Сила, действующая со стороны рассмотренного поля на любую частицу (заряд  $e$ ,  $\theta$ -скорость  $\beta_\theta$ ) - электрон или ион - будет иметь в рассматриваемом приближении компоненты

$$f_\rho = D_\rho \rho + D_0, \quad f_z = D_z z, \quad f_\theta = 0, \quad (1.3)$$

где  $D_\rho$ ,  $D_0$ ,  $D_z$  - константы:

$$D_\rho = -\frac{|e|e}{2\pi r_a b g} \cdot \frac{2}{(1+g/b)} [N_0(1-\beta_\theta B_0) - N_1(1-\beta_\theta B_1)],$$

$$D_0 = -\frac{|e|e}{2\pi r_a^2} [N_0(1+\beta_\theta B_0) - N_1(1+\beta_\theta B_1)] \ell_n \frac{16 r_a}{(b+g)}, \quad (1.4)$$

$$D_z = -\frac{|e|e}{2\pi r_a b g} \cdot \frac{2}{(1+b/g)} [N_0(1-\beta_\theta B_0) - N_1(1-\beta_\theta B_1)].$$

При  $b=g$ , то есть при круговом сечении тора,  $D_\rho = D_z$ .

Анализ более точных выражений для сил показывает, что параметры, которые должны быть малыми, для справедливости приближенных выражений (1.3 и (1.4) есть

$$\frac{1}{1-\beta_\theta B} \cdot \frac{\rho^2}{r_a^2} \ell_n \frac{16 r_a}{(b+g)} \ll 1; \quad \frac{1}{1-\beta_\theta B} \cdot \frac{z^2}{r_a^2} \ell_n \frac{16 r_a}{b+g} \ll 1. \quad (1.5)$$

Для примера, приведенного в /1/, когда  $b=g=4 \cdot 10^{-3}$  см, и для электронов  $\bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^{(*)2}}} = 41$  к/ (где  $\beta_n$  - равновесная относительная скорость - см. следующую §)  $r_a = 100$  см, получаем  $\ell_n \frac{16 r_a}{b+g} = 12,2$  и в результате  $3,3 \cdot 10^{-5} \ll 1$ , то есть условия (1,5) хорошо выполняются.

Уравнения движения любой частицы во внешнем магнитном поле  $\vec{H}$  с учетом сил (1.3) имеют вид

x/ Величина  $\bar{\gamma}$  при правильном соответствии с "энергией упорядоченного движения"  $E_0^{(*)} \Gamma_0 = \frac{E_0^{(*)}}{\sqrt{1-\beta_n^2}}$ , равной на оси пучка 15 Мэв ( $\Gamma_0 = 30$ ), отвечает в данном примере "энергии"  $E_0^{(*)} \bar{\gamma} = 20,5$  Мэв ( $\bar{\gamma} = 41$ ) - см. об этом в § 7.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c^2} \dot{r} \right) = \frac{E}{c^2} r \dot{\theta}^2 + \frac{e}{c} r \dot{\theta} H_z + f_\rho, \quad (1.6a)$$

$$\frac{d}{dt} \left( p_z + \frac{e}{c} \int_0^r H_z dr \right) = 0, \quad (1.6б)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c^2} \dot{z} \right) = -\frac{e}{c} r \dot{\theta} H_z + f_z, \quad (1.6в)$$

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} [\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2]}}, \quad p_z = \frac{E}{c^2} r^2 \dot{\theta}. \quad (1.6 г)$$

Здесь  $E$  — полная энергия свободной частицы,  $\int_0^r H_z dr = A_2$  — вторая (и единственная) ковариантная компонента вектор-потенциала  $A/\alpha$ ,  $p_z$  — аналогичная компонента импульса частицы. ("Физические"  $\theta$  — компоненты векторов  $p_\theta = p_z/r$ ,  $A_\theta = A_2/r$ ).  
Компоненты внешнего поля связаны так :

$$H_r = -\frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial H_z}{\partial z} r dr = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial A_2}{\partial r}, \quad H_\theta = 0. \quad (1.7)$$

Формулы (1.7) являются следствиями уравнений  $\text{rot} \vec{H} = 0$ ,  $\text{div} \vec{H} = 0$  и симметрии поля, указанной в начале работы. Уравнения (1.6) относятся как к ионам, так и к электронам. При специализации для электронов или для протонов надо выбрать соответствующий знак  $e$  и считать, скажем, применительно к электронам, что  $E = E_0$ ,  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ ,  $D_\rho = D_\rho^{(e)}$  и т.д.

## § 2. Равновесное движение

Найдем принципиально возможное движение частицы в совокупном поле по окружности радиуса  $r_0$ , то есть при  $\rho = z = 0$ . Из (1.6a) получим

$$\frac{E_0}{r_0} \beta_z^2 + e \beta_z H_z - \frac{e|e|}{2\pi r_0^2} [N_0(1 + \beta_z B_0) - N_1(1 + \beta_z B_1)] \ln \frac{16 r_0}{(b+g)}. \quad (2.1)$$

(Индексом "s" помечены все величины, относящиеся к  $r = r_0$  и рассматриваемому движению). При специализации (2.1) применительно к электронам надо, очевидно, взять  $\beta_z = \beta_z^{(e)}$ ,  $E_0 = E_0^{(e)}$ , а для ионов  $\beta_z = \beta_z^{(i)}$ ,  $E_0 = E_0^{(i)}$ ; остальные величины в (2.1) в обоих случаях одни и те же. Отметим, что в дальнейшем при самосогласовании задачи следует найти гидродинамические скорости  $V_0$  и  $V_1$  и установить их связь, в частности, со скоростями индивидуальных частиц  $\beta_z^{(e)}$  и  $\beta_z^{(i)}$ . Забегая вперед, отождест-

$x'$  Нумерация компонент соответствует последовательности  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ .

вим с достаточной степенью точности  $\beta_n^{(1)} = B_1$ , а для релятивистских электронов в отдельных случаях будем различать  $\beta_n^{(*)}$ ;  $\gamma_n^{(*)} = 1/\sqrt{1 - (\beta_n^{(*)})^2}$  и  $B_n$ .

$\Gamma_n = 1/\sqrt{1 - B_n^2}$ , при этом будем отличать также введенный выше параметр  $\bar{\gamma} = 1/\sqrt{1 - \beta_n^{(*)} B_n}$  для электронов. Когда обе величины,  $B_n^{(*)}$  и  $B_n$ , близки к 1, то небольшое различие в них может в принципе привести к существенному отличию  $\gamma_n$  от  $\Gamma$ . Найдем необходимое внешнее магнитное поле и  $\beta_n^{(1)} = B_1$  при заданных  $\beta_n^{(*)}$ ,  $B_n$ .

Введем малый параметр

$$\epsilon = \frac{e^2 N_n}{2\pi r_n E_n^{(*)}} \ln \frac{\gamma_n}{(b+g)} = \frac{\nu_n}{\gamma_n^{(*)}} \ln \frac{\gamma_n}{(b+g)},$$

где

$$\nu_n = r_0 \frac{N_n}{2\pi r_n}, \quad r_0 = \frac{e^2}{E_0^{(*)}}.$$

$r_0$  - классический радиус электрона,  $\frac{N_n}{2\pi r_n}$  - погонное число электронов. Если взять численный пример, приведенный в /1/,

$$N_n = 1,3 \cdot 10^{14} \text{ (ток электронов 1000 A)}, \quad b = g = 4 \cdot 10^{-3} \text{ см,}$$

$r_n = 100 \text{ см, } \gamma_n^{(*)} = 118^{x/}$ , получим  $\epsilon = 0,62 \cdot 10^{-2}$ . Из (2.1), примененного к электрону, находим

$$K_n = \frac{E_n^{(*)} \beta_n^{(*)}}{|e| r_n} \left\{ 1 + \frac{\epsilon}{(\beta_n^{(*)})^2} \left[ (1 + \beta_n^{(*)} B_n) - \frac{N_n}{N_0} (1 + \beta_n^{(*)} B_1) \right] \right\} =$$

$$= \frac{E_n^{(*)} \beta_n^{(*)}}{|e| r_n} \left\{ 1 + \frac{1}{(\beta_n^{(*)})^2 \gamma_n^{(*)}} \left[ \nu_n (1 + \beta_n^{(*)} B_n) - \nu_1 (1 + \beta_n^{(*)} B_1) \right] \ln \frac{16r}{(b+g)} \right\},$$

где  $\nu_1 = r_0 N_1 / 2\pi r_n$ .

Эта формула будет в § 7 сравнена с формулой (8) из /1/, где  $b = g, \beta_n^{(*)} = B_n = 1, B_1 = 0$  при учете различного определения  $\gamma_n^{(*)}$  и  $\Gamma$  в /1/ (там последняя величина обозначена  $\gamma_0$ ).

Для определения  $B_1$  запишем (2.1) для иона, умножив это уравнение на  $r_n/E_n^{(*)}$ :

$$\frac{E_n^{(1)}}{E_n^{(*)}} B_1^2 + \frac{|e| r_n K_n B_1}{E_n^{(*)}} - \epsilon \left[ (1 + B_1 B_n) - \frac{N_1}{N_0} (1 + B_1^2) \right] = 0.$$

После подстановки сюда (2.3) найдем

$$\frac{E_0^{(1)}}{E_n^{(*)}} \frac{B_1^2}{\sqrt{1 - B_1^2}} + [B_n + \frac{\epsilon}{B_n} (1 - \frac{N_1}{N_0})] B_1 - \epsilon (1 - \frac{N_1}{N_0}) = 0.$$

(Различие  $\beta_n^{(*)}$  и  $B_n$  здесь не важно, если, конечно, не идет речь о выражении  $E_n^{(*)}$ ).  
 $\frac{x/}{\text{Величина } E_n^{(*)} = E_0^{(*)} \gamma_n^{(*)}}$  при  $E_0^{(*)} \Gamma_n = 15 \text{ Мэв}$  на оси пучка в данном примере равна 58 Мэв (см. § 7).

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \quad & \frac{E_s^{(e)}}{E_0^{(1)}} \gg \epsilon; \text{ здесь будет два решения:} \\
 & B_1^{(1)} = \frac{\epsilon}{B_0} \left(1 - \frac{N_1}{N_0}\right), \quad B_1^{(2)} = B_1 - \frac{\epsilon \left(1 - \frac{N_1}{N_0}\right)}{B_0 \Gamma_1^2} \left(1 - \frac{\bar{B}_1}{B_0}\right), \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

где  $\bar{B}_1$  определяется из уравнения

$$\bar{B}_1 E_s^{(1)} = -B_0 E_s^{(e)}; \quad E_s^{(1)} = E_0^{(1)} \Gamma_1 = \frac{E_0^{(1)}}{\sqrt{1 - \bar{B}_1^2}}. \quad (2.7)$$

Первое решение соответствует вращению ионов с малой скоростью в ту же сторону, что и электроны ( $N_1 < N_0$ ): сила Лоренца, направленная от центра, компенсируется стягиванием за счет сил, связанных с кривизной электронного кольца (центробежная сила инерции, пропорциональная второй степени скорости иона здесь не играет роли).

Второе решение соответствует вращению иона с несколько большей (по модулю), чем в предыдущем решении, скоростью напротив электрона: здесь центробежная сила существенна. При  $\epsilon = 0$  первое решение соответствует отсутствию направленной скорости у иона, а второе - обычному вращению иона в магнитном поле.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \quad & \frac{E_s^{(e)}}{E_0^{(1)}} \approx \epsilon. \text{ Тогда} \\
 & B_1 = \frac{E_s^{(e)}}{E_0^{(1)}} \frac{[-B_0 \pm \sqrt{B_0^2 + 4\epsilon \frac{E_s^{(e)}}{E_0^{(1)}} \left(1 - \frac{N_1}{N_0}\right)}]}{2}.
 \end{aligned}$$

Здесь центробежная сила, сила Лоренца и сила стягивания, действующие на равновесный ион, одного порядка.

$$\text{в) } \quad \frac{E_s^{(e)}}{E_0^{(1)}} \ll \epsilon. \text{ При этом } B_1 = \pm \sqrt{\frac{E_s^{(e)}}{E_0^{(1)}} \epsilon \left(1 - \frac{N_1}{N_0}\right)}; \text{ этот случай едва ли реальный (малое магнитное поле).}$$

### § 3. Движение частиц вблизи равновесного; инварианты

Разложим уравнения движения частицы, движущейся в торе, около равновесных параметров, определенных выше.

Используем переменные  $\rho = r - r_s$ ,  $z, w = P_2 - P_2^{(s)}$ , где  $P_2 = p_2 + \frac{e}{c} A_2$ ,  $P_2^{(s)}$  - равновесное значение соответствующей величины, и рассмотрение будем вести в линейном приближении  $x/l$ . Из (1.6) и свойств симметрии поля найдем в указанном приближении

---

$x/l$ . Точнее говоря, за переменную  $w$  примем величину  $\bar{P}_2 - \bar{P}_2^{(s)}$ , где чертой обозначены обобщенные импульсы с учетом части вектор-потенциала, обусловленной собственным полем пучка. Но эта часть, как увидим, квадратична по  $\rho$  и  $z$  или того же порядка, что и квадратичные члены, и здесь нам не важна.



$$\Delta A_2 = r_n K_n \rho; \Delta E = \dot{\theta}_n w; \frac{\Delta \dot{\theta}}{\dot{\theta}_n} = \frac{1}{\gamma_n^2} \frac{w}{p_2^{(n)}} - \frac{\rho}{r_n};$$

$$\frac{\Delta \beta \theta}{\beta_n} = \frac{1}{\gamma_n^2} \cdot \frac{w}{p_2^{(n)}}; K_n = K_n (1 - n \frac{\rho}{r_n}); K_r = -n K_n \frac{z}{r_n}. \quad (3.1)$$

где  $\Delta A_2 = A_2 - A_2^{(n)}; \Delta \dot{\theta} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_n; \Delta \beta \theta = r \dot{\theta} - r_n \dot{\theta}_n; |\dot{\theta}_n| = \omega_n.$

Здесь надо иметь в виду также условие

$$\frac{\Delta E}{E_n} = \frac{\dot{\theta}_n w}{E_n} \ll 1 \dots \quad (3.1a)$$

Уравнения для  $\rho, w$  и  $z$  из (1.6) получаются в виде

$$\frac{d}{dt} (E_n \dot{\rho}) + E_n \omega_n^2 (1 - n \frac{c^2 D_\rho^{(n)}}{E_n \omega_n^2}) \rho = \frac{\omega_n c^2 w}{r_n}; \quad \frac{dw}{dt} = 0; \quad (3.2a)$$

$$\frac{d}{dt} (E_n \dot{z}) + E_n \omega_n^2 (n - \frac{c^2 D_z^{(n)}}{E_n \omega_n^2}) z = 0. \quad (3.2b)$$

Если эти уравнения относятся, например, к ионам, то надо снабдить  $E_n, D_\rho^{(n)}, D_z^{(n)}, \omega_n$  индексом "i" и пользоваться соответствующими формулами для них, причем вместо  $\omega_n^{(1)}$  взять  $c|B_i|/r_n$ , где  $B_i = B_1$  из (2.7), либо для всех других случаев положить  $\omega_n^{(1)} = 0, B_i = 0$ , так как уточнения здесь были бы более высокого порядка.

Применительно к электронам пояснений не требуется.

Эти уравнения можно записать в гамильтоновой форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{\partial H_\perp}{\partial p_\rho} = \frac{c^2}{E_n} p_\rho; \Delta \dot{\theta} = \frac{\partial H_\perp}{\partial w} = \dot{\theta}_n \left( \frac{w}{\gamma_n^2 p_2^{(n)}} - \frac{\rho}{r_n} \right); \dot{z} = \frac{\partial H_\perp}{\partial p_z} = \frac{c^2 p_z}{E_n}; \\ \dot{p}_\rho &= -\frac{\partial H_\perp}{\partial \rho} = -Q_\rho^2 \rho + \frac{\dot{\theta}_n w}{r_n}; w = -\frac{\partial H_\perp}{\partial \theta} = 0; \dot{p}_z = -\frac{\partial H_\perp}{\partial z} = -Q_z^2 z \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

с гамильтонианом

$$H_\perp = -\dot{\theta}_n \frac{\rho}{r_n} w + \frac{1}{2} p_2^{(n)} \dot{\theta}_n^2 \cdot \left( \frac{w}{\gamma_n p_2^{(n)}} \right)^2 + \frac{c^2 p_\rho^2}{2 E_n} + \frac{Q_\rho^2 \rho^2}{2} + \frac{c^2 p_z^2}{2 E_n} + \frac{Q_z^2 z^2}{2}, \quad (3.4)$$

$$Q_\rho^2 = \frac{E_n \omega_n^2}{c^2} \left( 1 - n \frac{c^2 D_\rho^{(n)}}{E_n \omega_n^2} \right); Q_z^2 = \frac{E_n \omega_n^2}{c^2} \left( n - \frac{c^2 D_z^{(n)}}{E_n \omega_n^2} \right). \quad (3.5)$$

Уравнения (3.2) справедливы при  $\rho/r_n \ll 1, z/r_n \ll 1$ , поэтому имеет смысл рассматри-

вать лишь ограниченные решения, то есть решения, когда  $Q_\rho^2 > 0$ ,  $Q_z^2 > 0$ . Эти условия дальше будем анализировать.

Уравнение аксиальных колебаний (3.26) не связано с другими двумя, а радиальное уравнение описывает в общем случае колебания частиц относительно положений равновесия, смещенных относительно  $r_s$  на постоянную величину  $\frac{w \dot{\theta}_s}{r_s Q_\rho^2}$ . Каковы возможные наборы величин  $w$  в разных случаях, будет определено в дальнейшем.

Гамильтониан  $H_\perp$  можно разбить на два:

$$H_\perp = H_{\perp\rho} + H_{\perp z}, \quad H_{\perp z} = \frac{c^2 p_z^2}{2E_s} + \frac{Q_z^2 z^2}{2}, \quad (3.6)$$

и соответственно иметь две системы: одну - для пар  $\rho$ ,  $p_\rho$  и  $\theta - \theta_s, w$ , вторую - для пары  $z$ ,  $p_z$ . Так как все параметры постоянны, то имеется три инварианта движения  $H_{\perp\rho}$ ,  $H_{\perp z}$ ,  $w$ . Вместо интегралов движения  $H_{\perp\rho}$  и  $H_{\perp z}$  будем использовать связанные с ними сохраняющиеся величины - амплитуды радиальных и аксиальных колебаний  $a_\rho$  и  $a_z$ :

$$a_\rho^2 = \frac{c^2 p_\rho^2}{E_s Q_\rho^2} + \left( \rho - \frac{w \dot{\theta}_s}{r_s Q_\rho^2} \right)^2 = \frac{2H_{\perp\rho} - \dot{\theta}_s p_\rho^{(e)} \left( \frac{w}{\gamma_s p_2^{(s)}} \right)^2}{Q_\rho^2} + \left( \frac{w \dot{\theta}_s}{r_s Q_\rho^2} \right)^2, \quad (3.7)$$

$$a_z^2 = \frac{c^2 p_z^2}{E_s Q_z^2} + z^2 = \frac{2H_{\perp z}}{Q_z^2}.$$

В частности, при  $w = 0$ ,  $Q_\rho = Q_z = Q$  (например,  $n = 0,5$ ;  $b = g$ )

$$a_\rho^2 + a_z^2 = \frac{2H_\perp}{Q^2}. \quad (3.8)$$

Распишем величины  $(Q_\rho^{(e)})^2$  и  $(Q_\rho^{(1)})^2$ :

$$\left. \begin{aligned} (Q_\rho^{(e)})^2 &= \frac{(E_s \omega_s^2)_e}{c^2} \{ (1-n) - \frac{c^2}{(E_s \omega_s^2)_e} \cdot \frac{e^2}{\pi r_s b g} \cdot \frac{2}{(1+g/b)} [N_e (1 - \beta_s^{(e)}) B_e] - N_i (1 - \beta_s^{(e)}) B_i] \} \\ (Q_\rho^{(1)})^2 &= \frac{(E_s \omega_s^2)_1}{c^2} \{ (1-n) - \frac{c^2}{(E_s \omega_s^2)_1} \cdot \frac{e^2}{\pi r_s b g} \cdot \frac{2}{(1+g/b)} [N_e (1 + |\beta_s| B_e) - N_i (1 - \beta_s^2) B_i] \} \end{aligned} \right\} (3.9)$$

где

$$B_i = \begin{cases} \bar{B}_i \\ 0 \end{cases}, \quad E_s^{(1)} = \begin{cases} \bar{E}_s^{(1)} \\ E_0^{(1)} \end{cases}.$$

Величины  $(Q_z^{(e)})^2$ ,  $(Q_z^{(1)})^2$  определяются предыдущими выражениями при замене в них

$$(1-n) \rightarrow n, \quad b \rightarrow g, \quad g \rightarrow b.$$

#### § 4. Некоторые необходимые условия существования квазистационарного состояния

Проанализируем условия  $Q_\rho^2 > 0$ . Рассмотрим случай, когда  $V_1 = 0$  (даже если это не так, то не будет сделано при этом существенной ошибки, поскольку фокусировка ионов внешним магнитным полем в отношении полных энергий частиц меньше фокусировки электронов, так как величина  $E_s \omega_s^2$  приблизительно пропорциональна  $E_s^{-1}$ ).

Тогда:

$$(Q_\rho^{(e)})^2 = \frac{(E_s \omega_s^2)_e}{c^2} \left[ (1-n) + \frac{c^2}{(E_s \omega_s^2)_e} \cdot \frac{e^2}{\pi r_e b g} \cdot \frac{2}{(1+g/b)} \left( N_1 - \frac{N_e}{\gamma^2} \right) \right],$$

(4.1)

$$(Q_\rho^{(1)})^2 = \frac{e^2}{\pi r_e b g} \cdot \frac{2}{(1+g/b)} (N_e - N_1).$$

Заметим, что не очень существенно, стоит ли здесь в выражениях  $\frac{N_e}{\gamma^2}$  величина  $\bar{\gamma}$  или  $\gamma_s^{(e)}, \Gamma_e$ . В том примере, который все время использовался, член  $N_e/\bar{\gamma}^2$  является малой поправкой (§7), будь  $\gamma$  равной  $\bar{\gamma}$ ,  $\gamma_s^{(e)}$  или  $\Gamma_e$  (хотя эти величины сравнительно сильно различаются). Если же  $N_1 = \frac{N_e}{\gamma^2}$ , тогда величины  $\bar{\gamma}$ ,  $\gamma_s^{(e)}$  и  $\Gamma_e$  весьма близки. Все же, как будет указано, логичнее использовать здесь  $\bar{\gamma}$ .

Сразу ясно, что для того, чтобы было  $(Q^{(1)})^2 \geq 0$ , необходимо  $N_e \geq N_1$ , тогда ионы будут колебаться в потенциальной яме, созданной электронным пучком. Рассмотрим далее два случая:

а) "Перекомпенсация"

$$N_e \geq N_1 > \frac{N_e}{\gamma^2}. \quad (4.2)$$

Тогда второй член в выражениях для  $(Q_\rho^{(e)})^2$  всегда больше нуля, то есть имеется самофокусировка /1,4/. Внешняя фокусировка необязательна. Принципиально, в пределах справедливости исходных предположений, размеры сечения тора  $b$ ,  $g$ , могут быть сколь угодно малыми.

б) "Недокомпенсация"

$$\frac{N_e}{\gamma^2} > N_1. \quad (4.3)$$

Здесь второй член в выражении для  $(Q_{\rho}^{(*)})^2$  меньше нуля и внешняя фокусировка необходима. При этом размеры сечения тора  $b$ ,  $g$  ограничены снизу. Если они будут слишком малы, дефокусирующие силы пучка превысят внешнюю фокусировку и стационарное состояние будет невозможным. Граничные значения для  $b$  и  $g$ , отвечающие случаю  $Q_{\rho}^{(*)} = Q_z^{(*)} = 0$ , есть

$$g = \sqrt{\frac{n}{(1-n)} \cdot \frac{2e^2 r_n N_n (1 - N_1 \bar{y}^2 / N_n)}{\pi E_0^{(*)} \gamma_n^{(*)} \gamma_n^2 (\beta_n^{(*)})^2}}, \quad b = \sqrt{\frac{(1-n)}{n} \cdot \frac{2e^2 r_n N_n (1 - N_1 \bar{y}^2 / N_n)}{\pi E_0^{(*)} \gamma_n^{(*)} \bar{y}^2 (\beta_n^{(*)})^2}} \quad (4\&4)$$

При  $\frac{N_1 \bar{y}^2}{N_n} = 1$  ограничение пропадает - переход к предыдущему случаю. При  $n = 0$  или  $n = 1$  квазистационарное состояние при "недокомпенсации" невозможно, так как в отсутствие по одному из направлений внешней фокусировки ограниченное движение в этом направлении не осуществляется: соответствующее  $(Q^{(*)})^2 < 0$ . Если взять  $N_1 = 0$ ,

$N_n = 1,3 \cdot 10^{14}$  (см. выше пример из [1]),  $n = 0,5$ ,  $r_n = 100$  см, тогда при  $\bar{y} = \gamma_n^{(*)} = 58^{x/}$  получим, что минимально возможный радиус  $\approx 2 \cdot 10^{-3}$  см. Такое малое значение этой величины связано с тем, что энергия электронов достаточно велика. Несмотря на то, что дополнительная ионная компенсация в этом случае привела бы к ряду нежелательных эффектов - повышается температура электронов, соответственно возрастает роль излучения за счет поперечных колебаний, появляется трение на ионах и, как результат, равновесный размер оказывается больше  $4 \cdot 10^{-3}$  см (см. [1]), - присутствие ионов при этом, по-видимому, все же желательно (возрастает жесткость системы).

### § 5. Решение кинетического уравнения

Рассмотрим вопрос о том, когда выбранная модель соответствует решению кинетического уравнения. В ограниченно поставленной нами задаче это будет соответствовать нахождению достаточных условий существования квазистационарного состояния рассматриваемого типа. Одновременно будет получен аппарат для расчета температур, давлений, энергий в пучке и т.д. Кинетическое уравнение для не зависящих явно от времени и  $\theta$  функций распределения частиц каждого сорта  $f_{\alpha, i}(\rho, z, w, p_r, p_z)$  имеет вид

$$\dot{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \dot{z} \frac{\partial f}{\partial z} + \dot{p}_r \frac{\partial f}{\partial p_r} + \dot{p}_z \frac{\partial f}{\partial p_z} = 0 \quad (5.1)$$

<sup>x/</sup> В отсутствие ионов и при  $Q_z^{(*)} = 0$  величина  $\bar{y}$  совпадает с  $\gamma_n^{(*)}$  (см. § 7).

Здесь учтено, что  $\dot{w} = 0$ , так как  $w$  — интеграл движения. Объемная плотность заряда  $\sigma = \frac{e}{r} \int f dp_\rho \, d w d p_z$ , куда  $\frac{1}{r}$  входит в качестве метрического коэффициента. Для нас имеет смысл приближение

$$\sigma \approx \sigma_0 = \frac{e}{r_0} \int f dp_\rho \, d w d p_z, \quad (5.2)$$

так как плотность заряда определяет собственные силы, умножение которых на  $\rho/r_0$  при расчете добавки к величине  $\sigma_0$  за счет различия  $1/r$  и  $1/r_0$  дало бы величину порядка малости, везде не учитываемого.

В этом же приближении ток

$$j_\theta = \frac{e}{r} \int f \theta f dp_\rho \, d w d p_z \approx R c \sigma_0. \quad (5.3)$$

Токи  $j_\rho, j_z$  при усреднении по функции распределения должны равняться нулю. Рассмотрим два варианта функций распределения.

#### I вариант. Симметричный пучок

Функцию распределения как для электронов, так и для ионов возьмем в виде, примененном для пучков, состоящих из частиц одного сорта, в <sup>/2/</sup> и <sup>/3/</sup>. Здесь в первом приближении энергия всех частиц одного сорта одинакова — их радиальные колебания происходят относительно одной и той же орбиты.

$$f_0 = \frac{c^2 N_0}{2\pi^3 b^2 g^2 E_z^{(*)} Q_z^{(*)} Q_\rho^{(*)}} \delta(w) \delta \left[ \frac{(a_\rho^{(*)})^2}{g^2} + \frac{(a_z^{(*)})^2}{b^2} - 1 \right], \quad (5.4)$$

$f_1$  — та же функция ( $e^- \rightarrow i^+$ ).

Функции  $f_0$  и  $f_1$  связаны через величины  $Q_z^{(*)}, Q_\rho^{(*)}$ , входящие в нормировку и в выражения  $a_\rho, a_z$ , так как во все выражения  $Q_z, Q_\rho$  входят как  $N_0, B_0$ , так и  $N_1, B_1$ . То обстоятельство, что функции распределения зависят только от интегралов движения  $a_\rho, a_z, w$ , гарантирует удовлетворение кинетическим уравнениям. Силы  $\dot{p}_\rho, \dot{w}, \dot{p}_z$ , подставляемые в эти уравнения для ионов и электронов, определяются как внешними, так и совокупными электронно-ионными полями. Объемная плотность заряда (5.2), вычисленная на основе (5.4) с использованием выражений (3.7), оказывается не зависящей от координат в пределах эллиптического сечения тора, ограниченного эллипсом

$\frac{x}{B^{1/2}}$  в качестве функции распределения взята  $\delta$ -функция, стоящая в (5.4) на втором месте.

$$\frac{\rho^2}{g^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (5.5)$$

и равна нулю вне этого сечения. Внутри сечения

$$\sigma_0 = -\frac{|e|N_0}{2\pi^2 r_g b g}, \quad \sigma_1 = \frac{|e|N_1}{2\pi^2 r_g b g}. \quad (5.6)$$

Задача оказывается в рассматриваемом приближении самосогласованной.

Из выражения (5.4) следует, что в данной модели в пучке присутствуют частицы, амплитуды радиальных и аксиальных колебаний которых связаны соотношением

$$\frac{a_\rho^2}{g^2} + \frac{a_z^2}{b^2} = 1. \quad (5.7)$$

Это значит, что частицы, у которых амплитуды радиальных колебаний равны радиальной полуоси эллипса  $g$ , не совершают радиальных колебаний. Частицы же с промежуточными амплитудами участвуют в обоих видах движения, причем амплитуды соответствующих колебаний связаны соотношением (5.7).

Частиц с нулевыми амплитудами тех и других колебаний ("равновесных"), очевидно, нет.

## II. вариант. Пучок с набором орбит и аксиальными колебаниями

Еще один вариант функции распределения, отвечающей однороднозаряженному тору эллиптического сечения, соответствует следующей модели: частицы не совершают радиальных бетатронных колебаний, но они имеют распределенный спектр энергий, то есть имеется набор орбит; вертикальные колебания у частиц есть, причем наибольшая амплитуда этих колебаний зависит от того, какая орбита взята из набора. Такая схема позволяет найти нужную функцию распределения:

$$f = \frac{Nc^2 \omega_0}{2\pi^4 b g E_g r_g Q_z Q_\rho^3} \cdot \frac{\delta(a_\rho)}{a_\rho} \cdot \frac{\sigma [b^2 (1 - \frac{w^2 \omega_0^2}{g^2 r_g^2 Q_\rho^4}) - a_z^2]}{\sqrt{b^2 (1 - \frac{w^2 \omega_0^2}{g^2 r_g^2 Q_\rho^4}) - a_z^2}}. \quad (5.8)$$

Эта функция может быть в принципе взята как для электронов, так и для ионов, но для последних лишь тогда, когда ионы имеют встречное электронам направленное движение. В остальных случаях  $\omega_a^{(1)} = 0$ , тогда следует для ионов брать, например, функцию (5.4).

Интегрирование (5.8) по импульсному пространству также дает плотность (5.6), не зависящую от координат в пределах эллиптического сечения с полуосями  $g$  и  $b$  и равную нулю вне этого сечения. Область для  $w$  при этом такова:

$$-g \frac{r_s Q_\rho^2}{\omega_s} \leq w \leq +g \frac{r_s Q_\rho^2}{\omega_s} . \quad (5.9)$$

При достаточно сильной ионной фокусировке функция распределения (5.8) не применима, так как тогда были бы большие значения  $Q_\rho^2$ , а следовательно и  $w$ , и нарушилось бы условие "узости" спектра энергий (3.1a). Поэтому (5.8) годится либо для чисто электронных пучков, либо при слабой ионной фокусировке. Широкий спектр  $\Delta E$  при больших  $Q_\rho^2$  соответствует возможности ускорения частиц в пределах стабилизированного пучка<sup>/1/</sup>, но рассмотрение здесь надо проводить иначе; этот вопрос в данной работе не исследуется.

### § 6. Моменты функций распределения; давления в пучке

Запишем кинетическое уравнение (5.1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\dot{\rho} f) + \frac{\partial}{\partial z} (\dot{z} f) + \frac{\partial}{\partial p_\rho} (\dot{p}_\rho f) + \frac{\partial}{\partial p_z} (\dot{p}_z f) = 0 \quad (6.1)$$

(в нашем случае, как видно из (3.3),  $\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \rho} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = \frac{\partial \dot{p}_\rho}{\partial p_\rho} = \frac{\partial \dot{p}_z}{\partial p_z} = 0$ ).

Умножим (6.1) на некую функцию  $S(p_\rho, p_z, w, \rho, z)$  и проинтегрируем по импульсному пространству. Тогда найдем

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \int \dot{\rho} S f d\Pi + \frac{\partial}{\partial z} \int \dot{z} S f d\Pi = \int \frac{dS}{dt} f d\Pi , \quad (6.2)$$

где  $d\Pi = dp_\rho dp_z dw$ .

Возьмем  $S = p_\rho$ . Для функций (5.4) и (5.8) тогда будет

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\rho}{\partial \rho} = \frac{\sigma}{e} \langle \dot{p}_\rho \rangle , \quad \mathcal{P}_\rho = \frac{\sigma}{e} \langle \dot{p}_\rho p_\rho \rangle . \quad (6.3)$$

Знак  $\langle \rangle$  - означает усреднение по функции распределения:

$$\langle \Psi \rangle = \frac{e}{\sigma r} \int \Psi f d\Pi .$$

Уравнение (6.3) можно трактовать так: "градиент радиального давления равен плотности радиальной (самосогласованной) силы Лоренца".

Аналогично:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_z}{\partial z} = \frac{\sigma}{e} \langle \dot{p}_z \rangle, \quad \mathcal{P}_z = \frac{\sigma}{e} \langle z p_z \rangle. \quad (6.4)$$

Если ввести радиальную и аксиальную "температуры" по формуле

$$\mathcal{P}_\rho = \frac{\sigma}{e} k T_\rho, \quad \mathcal{P}_z = \frac{\sigma}{e} k T_z, \quad (6.5)$$

то для функций распределения I и II варианта (5.4), (5.8) в пределах сечения тора

$$k T_\rho = \begin{cases} \frac{Q_\rho^2 g^2 (1 - \frac{\rho^2}{g^2} - \frac{z^2}{b^2})}{2} & \text{— для I варианта,} \\ 0 & \text{— для II варианта,} \end{cases} \quad (6.6)$$

$$k T_z = \begin{cases} \frac{Q_\rho^2 b^2 (1 - \frac{\rho^2}{g^2} - \frac{z^2}{b^2})}{2} & \text{— для I и II варианта.} \end{cases} \quad (6.7)$$

### § 7. Температуры в пучке и энергии частиц

Рассмотрим случай  $V_1 = 0$ , тогда, например,

$$\left. \begin{aligned} k T_z^{(*)} &= \left[ \frac{(E_n \omega_n^2) e}{2c^2} b^2 n + \frac{e^2}{2\pi r_n} \cdot \frac{2b/g}{(1+b/g)} (N_1 - \frac{N_n}{\gamma^2}) \right] \left( 1 - \frac{\rho^2}{g^2} - \frac{z^2}{b^2} \right), \\ k T_z^{(1)} &= \frac{e^2}{2\pi r_n} \cdot \frac{2b/g}{(1+b/g)} (N_n - N_1) \left( 1 - \frac{\rho^2}{g^2} - \frac{z^2}{b^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Температуры каждого вида частиц зависят от числа как тех, так и других (то есть от  $N_n$  и  $N_1$ ). Характерно также, что при наличии внешних сил ( $n \neq 0$  — для вертикального движения,  $n \neq 1$  — для радиального движения) температура электронов связана не только с отношением  $b/g$  (это отношение может быть единицей — круговое сечение тора), но и отдельно, скажем, с величиной  $b$ . Температура же ионов не связана с характерным размером. Если собственные силы много больше внешних фокусирующих сил и членом, содержащим  $n$  в первой формуле (7.1), можно пренебречь, то есть фактически перейти к прямому пучку, то в случае кругового сечения ( $b = g$ ) температуры не будут никак связаны с сечением пучка — вырожденный случай типа беннетовского прямого пучка. Кстати, если при этом заменить  $\frac{N_n}{2\pi r_n}$  на погонную плотность частиц, то температуры (7.1) на оси ( $\rho = z = 0$ ) пучка совпа-



дут с удвоенными однородными температурами в беннетовском случае. Для приводимого ранее примера при  $N_1 \approx N_0$  будет  $kT_x^{(1)} \approx 0$  и на оси  $kT_x^{(*)} = 30$  кэВ. При  $\frac{N_0}{\gamma^2} < N_1 < N_0$  поперечная температура будет не 0, но при том же  $N_0$  будет не выше 30 кэВ, а электронная - понизится (здесь член, содержащий  $n$ , составляет ничтожную величину  $= 10^{-2}$  эВ).

Рассчитаем теперь энергию частиц во втором порядке. После простых, но довольно громоздких вычислений получим

$$E = E_s + \dot{\theta}_s w - \dot{\theta}_s w \frac{\rho}{r_s} + \frac{1}{2} \dot{\theta}_s^2 \rho^2 \cdot \left( \frac{w}{\gamma_s \rho^2} \right)^2 + \frac{\rho^2 c^2}{2 E_s} + \frac{\rho_s^2 c^2}{2 E_s} + \frac{Q \rho^2}{2} + \frac{Q_s^2 z^2}{2} - e\phi. \quad (7.2)$$

Здесь  $w = \vec{P}_2 - \vec{P}_2^{(*)}$  при учете векторного потенциала суммарного поля,  $\phi$  - скалярный потенциал самосогласованного поля (скалярный потенциал внешнего поля равен 0).

$$\phi = z^2 \frac{|e| (N_0 - N_1)}{2\pi r_s b g} \cdot \frac{2}{(1+b/g)} + \rho^2 \frac{|e| (N_0 - N_1)}{2\pi r_s b g} \cdot \frac{2}{(1+g/b)} + \rho \frac{|e| (N_0 - N_1)}{2\pi r_s^2} \ln \frac{16 r_s}{(b+g)} \quad (7.3)$$

$$\text{Гамильтониан } H = E + e\phi = E_s + \dot{\theta}_s w + H_{\perp}.$$

(сравните (3.4) и (7.2)). Для функции распределения (5.4) (I вариант) среднее значение энергии частиц в данной точке пучка

$$\langle E \rangle_I = E_s + \frac{kT_{\rho}}{2} + \frac{kT_x}{2} + Q_{\rho}^2 \frac{\rho^2}{2} + Q_x^2 \frac{z^2}{2} - e\phi. \quad (7.4)$$

Для второго варианта

$$\langle E \rangle_{II} = E_s + Q_{\rho}^2 r_s \rho + \frac{kT_x}{2} + \frac{Q^2 \rho}{2} \left[ \frac{r_s Q \beta}{E_0 \gamma_s^3 \beta_s^2} - 1 \right] \rho^2 + Q_x^2 \frac{z^2}{2} - e\phi. \quad (7.5)$$

В первом порядке  $\langle E \rangle_I = E_s$ ,  $\langle E \rangle_{II} = E_s + Q_{\rho}^2 r_s \rho$ , где член  $Q_{\rho}^2 r_s \rho$  дает набор мгновенных орбит. Добавки к энергии за счет поперечных колебаний нелинейны и в первом варианте - порядка  $kT_x, kT_{\rho}$ . Для приведенных примеров это небольшие величины (в сравнения с  $E_s$ ). Ко второму варианту, конечно, использованные оценки температуры не относятся, так как тогда  $Q_{\rho}^2 r_s \rho \gg E_s$ . Здесь нужно брать  $N_1 \approx \frac{N_0}{\gamma^2}$  (либо  $N_1 = 0$ ), тогда для электронов будет случай, типичный для обычных ускорителей.

В I варианте, кстати, при  $b = g$ ;  $n = 0,5$ ;  $Q_{\rho} = Q_x \equiv Q$  будет  $kT_x = kT_{\rho} = \frac{Q^2 b^2}{2} - \frac{Q^2 (\rho^2 + z^2)}{2}$ , так что  $\langle E \rangle_I = E_s + \frac{Q^2 b^2}{2} - e\phi$ , а гамильтониан  $\langle H \rangle_I = E_s + Q^2 b^2 / 2$  вообще не будет зависеть от координат.

Средняя по функции распределения  $\theta$  - скорость частиц  $\beta_{\theta}$  во втором приближении равна соответственно для первого и второго вариантов

$$\langle \beta_\theta \rangle_I = V_I = \beta_* \left\{ 1 - \frac{g^2 Q_\rho^2 (1 - \frac{\rho^2}{g^2} - \frac{z^2}{b^2})}{4E_*} - \frac{b^2 Q_z^2 (1 - \frac{\rho^2}{g^2} - \frac{z^2}{b^2})}{4E_*} + \frac{1}{E_0 \gamma_*^3 \beta_*^2} \left[ \frac{Q_\rho^2 \rho^2}{2} - \frac{Q_z^2 z^2}{2} - e\phi \right] \right\},$$

$$\langle \beta_\theta \rangle_{II} = V_{II} = \beta_* \left\{ 1 + \frac{Q_\rho^2 r_* \rho}{E_0 \gamma_*^3 \beta_*^2} - \frac{b^2 Q_z^2 (1 - \frac{\rho^2}{g^2} - \frac{z^2}{b^2})}{4E_*} + \frac{1}{E_0 \gamma_*^3 \beta_*^2} \left[ -3 \frac{r_*^2 Q_\rho^2}{E_*} + 1 \right] \frac{Q_\rho^2 \rho^2}{2} + \frac{Q_z^2 z^2 (7.6)}{2} - e\phi \right\}.$$

Поправки для приведенного примера в I варианте небольшие, поэтому выше  $\beta_*$  и  $V$  часто не различались, однако  $\gamma_*$  и  $\Gamma$  отождествлены не были. Хотя гидродинамические скорости (7.6) и ненамного меньше, чем величина  $\beta_*$  (отнесенная к  $c$  скорость гипотетической равновесной частицы), соответствующая вращению строго по окружности и отсутствию поперечного движения, однако при близости как  $\beta_*$ , так и  $V$  к 1 для электронов небольшая разница между этими величинами в принципе может, как указывалось, привести к существенному различию между  $\gamma_* = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_*^2}}$  и  $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}$  для электронов. Следует подчеркнуть, во избежании недоразумений, что полная скорость частиц  $\beta = \frac{1}{c} \sqrt{\dot{r}^2 + (\dot{\theta} r)^2 + \dot{z}^2}$  значительно ближе к  $\beta_*$ , чем вообще  $\beta_\theta$  — ведь энергия  $E$  для различных частиц ((7.2), (7.4)) различается не сильно. Вычислим  $\beta_*$  при задании  $V_I$  на оси. Тогда из (7.6) при  $g=b$ ,  $kT_\rho = kT_z = kT$

$$V_I = \beta_* \left( 1 - \frac{kT}{E_*} \right), \quad (7.7)$$

$$\frac{E_*}{E_0} = \beta_*^2 \Gamma_I^2 \frac{kT}{E_0} + \sqrt{\beta_*^2 \Gamma_I^4 \left( \frac{kT}{E_0} \right)^2 + \Gamma_I^2}.$$

Так, для используемого нами все время примера при  $kT = 30$  кэв и  $\Gamma_0 = 30$  получим  $\gamma_*^{(*)} = 116$ ,  $E_*^{(*)} = 58$  Мэв. Эти расчеты показывают, что хотя средняя энергия, приходящаяся на один электрон, слабо меняется по сечению пучка, однако гидродинамическая энергия  $E_0 \Gamma = E_0 / \sqrt{1-V^2}$  в приведенном примере изменяется от  $\Gamma = 30$  до  $\Gamma \approx 116$  на границе пучка (там  $V = \beta_*$ ). Конечно, такое существенное изменение  $\Gamma$  не отвечает предположению линейности полей (1.3), так как  $D_\rho^{(*)}$  будет существенно зависеть от координат (через величину  $N_0 (1 - \beta_*^{(*)} V_0)$ ), однако при  $N_0 > N_1 > N_0 / \bar{\gamma}^2$  и в случае, если  $N_1$  достаточно далеко от граничного значения  $N_0 / \bar{\gamma}^2$ , но при  $N_1 < N_0$  поправки в (7.1) за счет  $N_0 / \bar{\gamma}^2$  не играют роли и предыдущее верно. Отметим все же, что, взяв в формуле для  $kT$  и других в качестве коэффициента при  $N_0$  величину  $1 - \beta_*^{(*)} V_0 = 1 / \bar{\gamma}^2$ , мы фактически произвели некое усреднение значений  $\Gamma$  по сечению:

$$\bar{\gamma} = \sqrt{2\Gamma \gamma_* / \sqrt{\gamma_*^2 + \Gamma^2}}$$

(в нашем примере  $\bar{\gamma} = 41$ ). Проведенные оценки соответствуют утверждению Будкера о том, что магнитное поле должно быть взято примерно в 3 раза больше (см.(2.3)),

чем это нужно было бы исходя из величины  $\Gamma$ . Однако следует иметь в виду, что в случае слабого действия пространственного заряда (мало частиц, ионов нет) надо рассчитывать величину магнитного поля в соответствии с величиной  $\gamma_0$  (для примера  $\gamma_0 = 116$ ), тогда величина  $\Gamma$  была бы близка именно к 116, а не к 30. Если фокусирующая сила не очень велика, так что  $\Gamma^2 \frac{kT}{E_0 \Gamma} = \frac{kT_0}{E_0} \ll 1$ , где  $T_0$  - собственная температура, то величины  $E$  в (7.4) и (7.5) можно разложить около  $E_0 \Gamma$ , а не  $E_0$ , тогда будет

$$\langle E \rangle_I = E_0 \Gamma + \Gamma^2 \frac{(kT_\rho + kT_z)}{2}, \quad \langle E \rangle_{II} = E_0 \Gamma + \Gamma^2 \frac{kT_z}{2}. \quad (7.8)$$

В этом приближении при замене  $\langle E \rangle_I$  на близкую величину  $E_0$  формула (2.3) при  $N_1 \gg \frac{N_0}{\gamma^2}$  практически совпадает с приведенной в [1]. Если, не обращая внимания на указанное приближение, сосчитать величину  $\Gamma^2 \frac{kT_\rho + kT_z}{2}$  при  $\Gamma = 30$  ( $E_0 \Gamma = 15$  Мэв) получим  $\langle E \rangle_I = 15$  Мэв - 27 Мэв = 42 Мэв (тоже примерно коэффициент 3).

В случае пучков высокой плотности, но при  $N_1 = N_0 / \gamma^2$  величина  $kT$  для электронов близка к 0 и (7.8) хорошо выполняется (для обоих вариантов). Для ионов первая формула (7.8) выполняется обычно хорошо ввиду того, что  $\Gamma_1 \approx 1$ .

Автор благодарит В.И. Векслера и товарищей по работе за многочисленные обсуждения.

#### Л и т е р а т у р а.

1. Г.И. Будкер. Атомная энергия, 5, 9 (1956).
2. И.М. Капчинский. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. Атомиздат, М, 1966.
3. О.И. Ярковой. Препринт ОИЯИ, 2183, Дубна, 1965.
4. Bennett. Phys. Rev., 98, 1584 (1955).
5. Э.А. Перельштейн, О.И. Ярковой. Препринт ОИЯИ, 2351, Дубна, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел  
8 августа 1968 г.