

Г- 577

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2786



Н.Н. Говорун, Б.П. Жидков, Г.И. Макаренко

НАХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ
ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ, РАСПРЕДЕЛЕННЫХ
НА ПОВЕРХНОСТИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА
КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

ВЫПУСКНОЙ ЦЕНТР

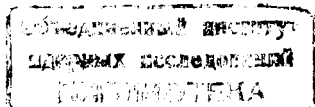
1966

2786

Н.Н. Говорун, Е.П. Жидков, Г.И. Макаренко

НАХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ
ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ, РАСПРЕДЕЛЕННЫХ
НА ПОВЕРХНОСТИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА
КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

4327/3 м.



1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пучок электронов длиной l метров с силой тока I ампер и относительной скоростью электронов $\beta = \frac{v}{c}$ вырывается в магнитное поле под небольшим углом δ (см. рис. 1). Угол δ такой, что движение образующейся при этом спирали из электронов вдоль магнитного поля происходит с относительной скоростью, равной $\beta \sin \delta$.

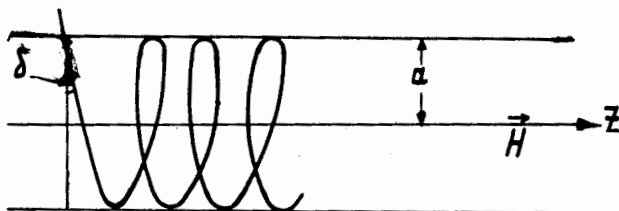


Рис. 1

Величина магнитного поля H такова, что радиус спирали равен a м.

Требуется найти силы, действующие на электроны в спирали, и дать конфигурацию электрического поля E , которое обеспечило бы удержание электронов в спирали.

2. МОДЕЛЬ И ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Для решения поставленной задачи предлагается вместо спирали рассматривать цилиндрическую трубу с зарядами, распределенными равномерным тонким слоем по ее поверхности. Эта модель будет ближе к физической картине, чем спираль, т.к. исходный пучок электронов имеет конечную толщину и разброс по импульсу, так что после скручивания его в магнитном поле отдельные витки спирали будут размыты и даже частично могут перекрывать друг друга.

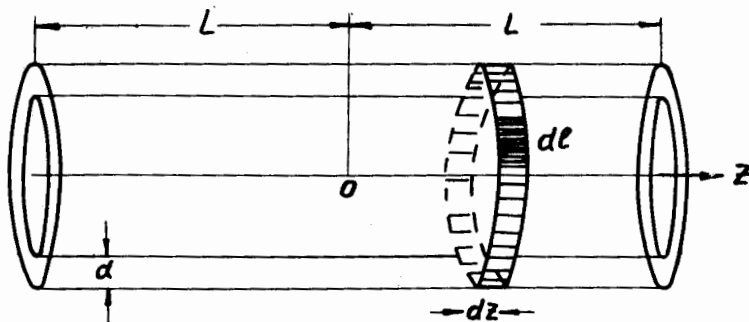


Рис. 2

Толщина поверхностного слоя электронов d зависит от дисперсии по импульсу электронов в исходном пучке и от толщины пучка.

Сила, действующая на элемент объема $d\tau$, будет:

$$d\vec{F} = \omega d\tau \vec{E} + \mu [\vec{j}, \vec{H}] d\tau, \quad (1)$$

где:
 ω - объемная плотность заряда, μ - магнитная проницаемость, $\vec{j} = \omega \vec{v}$,
 объемная плотность тока, $\vec{v}_\tau = v \cos \delta$ - азимутальная скорость электронов, а векторы
 электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} задаются формулами Стреттона-Чу (см. ^{1/1}):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_D \omega \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) d\tilde{\tau}_{M'}, \quad (2)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_D [\vec{j}, \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right)] d\tilde{\tau}_{M'},$$

где область интегрирования D есть область между внутренней и внешней поверхностями цилиндрической трубы,

r - расстояние между точками $M(z, \rho, \varphi)$ и $M'(z', \rho', \varphi')$:

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2},$$

а знак (') означает, что дифференцирование ведется по координатам точки $M'(z', \rho', \varphi')$.

Система координат - цилиндрическая.

Нас в первую очередь будет интересовать сила, действующая вдоль оси Oz на кольцевую область из электронов (на рис. 2 эта область заштрихована).

3. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА И РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Вследствие того, что интегралы в формулах (2) являются трехмерными, счет по этим формулам требует значительного времени.

Для предварительной оценки искомых величин была сделана дальнейшая идеализация расчетной схемы, а именно: считалось, что заряд распределен на поверхности цилиндрической трубы с поверхностной плотностью σ .

Такая идеализация будет отражать существо дела до тех пор, пока толщина слоя

d из электронов будет оставаться много меньше, чем длина трубы $2L$, т.е. при условии: $d \ll 2L$.

Принятая идеализация не работает вблизи концов трубы, т.е. в областях, где

$$\frac{L - |z|}{d} \sim 1.$$

Выпишем расчетные формулы для выражения силы, действующей на элемент поверхностного кольцевого тока

$$d\vec{F} = \vec{E} \sigma d\tau dz + \mu [\vec{j}, \vec{H}] d\tau dz, \quad (3)$$

где:

σ - поверхностная плотность зарядов,

$\vec{j} = \sigma \vec{v}_\tau$ - поверхностная плотность тока,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\Sigma} \sigma \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) dS_{M'}, \quad (4)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} [\vec{j}_{M'}, \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right)] dS_{M'},$$

где Σ - поверхность трубы $\rho = \rho' = a$, $-L \leq z \leq L$.

В дальнейшем нас будет интересовать сила, действующая на кольцевой ток в направлении оси Oz . Величина этой силы вычисляется по формуле

$$dF_z = \int_0^{2\pi a} (d\vec{F}, \vec{z}^0) = \frac{a^2 \sigma^2 dz}{4\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L}^L (\text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right), \vec{z}^0) dz' + \frac{a^2 \mu dz}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L}^L ([\vec{j}_M, [\vec{j}_{M'}, \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right)]], \vec{z}^0) dz'. \quad (5)$$

Здесь и далее предполагаем, что $\sigma = \text{const}$. Величина силы, расталкивающей кольцо (суммарной на все кольцо), будет:

$$dF_p = \int_0^{2\pi a} (d\vec{F}, \vec{p}^0), \quad (6)$$

где $\vec{\rho}^{\circ}$ означает единичный вектор, направленный вдоль радиуса, а $d\vec{F}$ задается формулой (3).

Мы предполагаем, что сила расталкивания $d\vec{F}_p$ компенсируется магнитным полем \vec{H} , так что радиус трубы остается постоянным.

Искомое электрическое поле \vec{E} , которое нужно создать, чтобы компенсировать действие силы $d\vec{F}_z$ будет:

$$E_z = \frac{dF_z}{dQ}, \quad (7)$$

где dQ - заряд элемента dZ кольца трубы:

$$dQ = 2\pi a \sigma dz. \quad (8)$$

Учитывая, что $\vec{j} = \sigma v_r \vec{\rho}^{\circ}$ из (5), (7) и (8) получим:

$$E_z = \frac{a\sigma}{8\pi^2 \epsilon} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L}^L (\text{grad}'(\frac{1}{r}), \vec{z}^{\circ}) dz' + \frac{a\sigma \mu v_r^2}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L}^L ([\vec{\psi}_M^{\circ}, [\vec{\psi}_{M'}^{\circ}, \text{grad}'(\frac{1}{r})]], \vec{z}^{\circ}) dz'. \quad (9)$$

Сделаем некоторые преобразования подынтегральных выражений, входящих в формулу (9). Учитывая то, что

$$\text{grad}'(\frac{1}{r}) \Big|_{\rho=\rho'=a} = \left\{ \frac{z-z'}{r^3}; -\frac{a[1-\cos(\varphi-\varphi')]}{r^3}; \frac{a\sin(\varphi-\varphi')}{r^3} \right\}$$

$$\vec{z}^{\circ} = \{1, 0, 0\}, \quad \vec{\rho}_M^{\circ} = \{0, 1, 0\}, \quad \vec{\psi}_M^{\circ} = \{0, 0, 1\},$$

получим

$$(\text{grad}'(\frac{1}{r}), \vec{z}^{\circ}) = \frac{z-z'}{r^3}, \quad (10)$$

$$[\vec{\psi}_M^{\circ}, \text{grad}'(\frac{1}{r})] = \left\{ \frac{a[1-\cos(\varphi-\varphi')]}{r^3}; \frac{z-z'}{r^3}; 0 \right\}_{M'}$$

$$[\vec{\psi}_M^{\circ}, [\vec{\psi}_{M'}^{\circ}, \text{grad}'(\frac{1}{r})]] = \left\{ -\frac{(z-z')\cos(\varphi-\varphi')}{r^3}; \frac{a[1-\cos(\varphi-\varphi')]}{r^3}; 0 \right\}_M$$

Здесь учтено, то, что единичные векторы $\vec{\rho}_M^{\circ}$ и $\vec{\rho}_{M'}^{\circ}$ берутся в различных точках (см. /2/). Теперь

$$([\vec{\psi}_M^{\circ}, [\vec{\psi}_{M'}^{\circ}, \text{grad}'(\frac{1}{r})]], \vec{z}^{\circ}) = -\frac{(z-z')\cos(\varphi-\varphi')}{r^3} \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (9), получим:

$$E_z = \frac{a\sigma}{8\pi^2 \epsilon} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-L}^L \left(\frac{z-z'}{r^3} - \mu \epsilon v_r^2 \frac{z-z'}{r^3} \cos(\varphi-\varphi') \right) dz' = \frac{a\sigma}{2\pi \epsilon} \int_0^{\pi} d\gamma \int_{-L}^L \frac{(z-z')(1-\beta^2 \cos^2 \delta \cos \gamma)}{[\sqrt{2a^2(1-\cos \delta)} + (z-z')]^3} dz', \quad (12)$$

$$\text{где } \gamma = \varphi - \varphi', \quad \rho = \rho' = a.$$

Введем безразмерные величины:

$$\alpha = \frac{a}{L}, \quad \xi = \frac{z}{L}, \quad \xi' = \frac{z'}{L} \quad (13)$$

и проинтегрируем (12) по ξ' , получим:

$$E_z = \frac{a\sigma}{2\pi L \epsilon} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha^2(1-\cos \delta)} + (\xi-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2(1-\cos \delta)} + (\xi+1)^2} \right) (1-\beta^2 \cos^2 \delta \cos \gamma) d\gamma. \quad (14)$$

Выражая поверхностную плотность заряда σ через полный заряд Q

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a L},$$

будем иметь:

$$E_z(\alpha, \xi) = \frac{Q \alpha^2}{8\pi^2 \alpha^2 \epsilon} \int_0^{\pi} \mathcal{K}(\alpha, \xi, \gamma) (1-\beta^2 \cos^2 \delta \cos \gamma) d\gamma$$

или

$$\frac{E_z(\alpha, \xi)}{\frac{Q}{8\pi^2 \alpha^2 \epsilon}} = I_1(\alpha, \xi) + (1-\beta^2 \cos^2 \delta) I_2(\alpha, \xi), \quad (15)$$

где

$$I_1(\alpha, \zeta) = \alpha^2 \int_0^\pi \mathcal{K}(\alpha, \zeta, \gamma) (1 - \cos \gamma) d\gamma, \quad (16)$$

$$I_2(\alpha, \zeta) = \alpha^2 \int_0^\pi \mathcal{K}(\alpha, \zeta, \gamma) \cos \gamma d\gamma, \quad (17)$$

$$\mathcal{K}(\alpha, \zeta, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2(1-\cos\gamma) + (\zeta-1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{2\alpha^2(1-\cos\gamma) + (\zeta+1)^2}} \quad (18)$$

На рисунках 3 и 4 приведены значения интегралов $I_1(\alpha, \zeta)$ и $I_2(\alpha, \zeta)$ для α и ζ меняющихся соответственно в пределах $0,05 \div 10$ и $0,05 \div 0,999$.

Отметим еще раз, что при использовании результатов, полученных по формуле (18), необходимо помнить об указанных в начале этого параграфа границах применимости этой формулы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж.А. Стреттон. Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.
2. Н.Е. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд. АН СССР, Москва, 1951.

Рукопись поступила в издательский отдел

18 июня 1986 г.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ $I_1(\alpha, \zeta)$

ζ	α	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	2,5	3
0,05	0,0008	0,0030	0,0106	0,0287	0,0356	0,0407	0,0441	0,0463	0,0476	0,0482	0,0466	0,0427	0,0389	0,0357
0,10	0,0016	0,0061	0,0214	0,0574	0,0712	0,0813	0,0882	0,0926	0,0951	0,0964	0,0931	0,0853	0,0778	0,0713
0,20	0,0032	0,0125	0,0437	0,1155	0,1427	0,1624	0,1759	0,1845	0,1895	0,1919	0,1854	0,1701	0,1552	0,1422
0,30	0,0051	0,0196	0,0677	0,1748	0,2145	0,2431	0,2626	0,2751	0,2823	0,2858	0,2763	0,2538	0,2317	0,2124
0,40	0,0074	0,0280	0,0947	0,2357	0,2864	0,3229	0,3477	0,3635	0,3728	0,3773	0,3650	0,3357	0,3068	0,2814
0,50	0,0102	0,0386	0,1260	0,2982	0,3581	0,4010	0,4301	0,4488	0,4598	0,4652	0,4507	0,4152	0,3799	0,3489
0,60	0,0143	0,0526	0,1629	0,3617	0,4285	0,4761	0,5087	0,5298	0,5423	0,5486	0,5325	0,4917	0,4507	0,4143
0,70	0,0205	0,0726	0,2066	0,4244	0,4957	0,5467	0,5818	0,6049	0,6188	0,6260	0,6095	0,5645	0,5184	0,4772
0,75	0,0252	0,0859	0,2310	0,4547	0,5272	0,5794	0,6157	0,6396	0,6543	0,6620	0,6458	0,5991	0,5509	0,5076
0,80	0,0317	0,1024	0,2566	0,4833	0,5568	0,6100	0,6473	0,6721	0,6875	0,6958	0,6804	0,6324	0,5823	0,5390
0,85	0,0412	0,1226	0,2825	0,5097	0,5838	0,6379	0,6762	0,7020	0,7182	0,7272	0,7132	0,6643	0,6126	0,5655
0,90	0,0558	0,1461	0,3070	0,5329	0,6075	0,6625	0,7018	0,7287	0,7460	0,7558	0,7437	0,6945	0,6425	0,5928
0,92	0,0635	0,1559	0,3158	0,5409	0,6157	0,6712	0,7110	0,7384	0,7561	0,7663	0,7553	0,7061	0,6526	0,6034
0,94	0,0725	0,1655	0,3238	0,5480	0,6227	0,6791	0,7195	0,7474	0,7656	0,7763	0,7664	0,7173	0,6635	0,6138
0,96	0,0821	0,1742	0,3305	0,5542	0,6298	0,6862	0,7272	0,7557	0,7744	0,7863	0,7771	0,7285	0,6741	0,6239
0,98	0,0911	0,1810	0,3355	0,5591	0,6352	0,6924	0,7340	0,7632	0,7828	0,7943	0,7873	0,7387	0,6844	0,6339
0,99	0,0945	0,1833	0,3372	0,5611	0,6375	0,6950	0,7370	0,7666	0,7863	0,7982	0,7920	0,7437	0,6893	0,6386
0,999	0,0961	0,1843	0,3381	0,5623	0,6391	0,6970	0,7394	0,7693	0,7893	0,8015	0,7962	0,7481	0,6937	0,6428

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ $I_2(\alpha, \xi)$

ξ	0,05	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	I	I,5	2	2,5	3
0,05	0,293 10^4	0,452 10^4	0,630 10^4	0,647 10^4	0,0122	0,0195	0,0279	0,0372	0,0470	0,0573	0,1108	0,1649	0,2184	0,2713
0,1	0,601 10^4	0,926 10^4	0,129 10^4	0,0131	0,0247	0,0393	0,0563	0,0749	0,0946	0,1151	0,2223	0,3308	0,4381	0,5442
0,2	0,133 10^4	0,204 10^4	0,279 10^4	0,0277	0,0515	0,0814	0,1159	0,1536	0,1936	0,2350	0,4514	0,6702	0,8869	1,1011
0,3	0,237 10^4	0,361 10^4	0,483 10^4	0,0454	0,0830	0,1296	0,1828	0,2406	0,3017	0,3650	0,6947	1,0280	1,3582	1,6849
0,4	0,410 10^4	0,615 10^4	0,788 10^4	0,0687	0,1225	0,1878	0,2616	0,3414	0,4251	0,5117	0,9618	1,4165	1,8673	2,3136
0,5	0,724 10^4	0,108 10^4	0,0129	0,1012	0,1747	0,2620	0,3592	0,4633	0,5721	0,6842	1,2656	1,8529	2,4355	3,0126
0,6	0,144 10	0,203 10^4	0,0220	0,1490	0,2474	0,3611	0,4857	0,6180	0,7556	0,8985	1,748	2,0830	2,9997	3,9111
0,7	0,334 10^3	0,434 10^4	0,0397	0,2233	0,3540	0,5010	0,6595	0,8262	0,9985	1,1748	2,3684	2,3930	4,4124	5,4246
0,75	0,559 10^3	0,679 10^4	0,0551	0,2769	0,4280	0,5955	0,7747	0,9623	1,1557	1,3531	2,7150	3,8673	5,0144	6,1542
0,80	0,103 10^4	0,0113	0,0782	0,3481	0,5238	0,7159	0,9199	1,1322	1,3506	1,5731	2,7150	3,8673	5,0144	6,1542
0,85	0,218 10^4	0,0201	0,1148	0,4471	0,6537	0,8769	1,1119	1,3553	1,6049	1,8588	3,1588	4,4703	5,7768	7,0759
0,90	0,564 10^4	0,0393	0,1767	0,5957	0,8451	1,1109	1,3884	1,6746	1,9669	2,2637	3,7797	5,3086	6,8328	8,3496
0,92	0,890 10^4	0,0532	0,2146	0,6806	0,9530	1,2418	1,5424	1,8517	2,1671	2,4871	4,1197	5,7658	7,4074	9,0416
0,94	0,0148	0,0740	0,2663	0,7919	1,0938	1,4121	1,7421	2,0808	2,4258	2,7754	4,5567	6,3522	8,1433	9,9271
0,96	0,0266	0,1075	0,3425	0,9511	1,2942	1,6536	2,0248	2,4047	2,7910	3,1819	5,1706	7,1741	9,1736	11,166
0,98	0,0537	0,1714	0,4776	1,2263	1,6393	2,0684	2,5095	2,9593	3,4156	3,8765	6,2162	8,5716	10,923	13,267
0,99	0,0857	0,2389	0,6152	1,5030	1,9855	2,4841	2,9947	3,5141	4,0400	4,5706	7,2590	9,9635	12,664	15,358
0,999	0,1996	0,4685	1,0753	2,4239	3,1367	3,8657	4,6068	5,3566	6,1130	6,8742	10,716	14,574	18,428	22,276

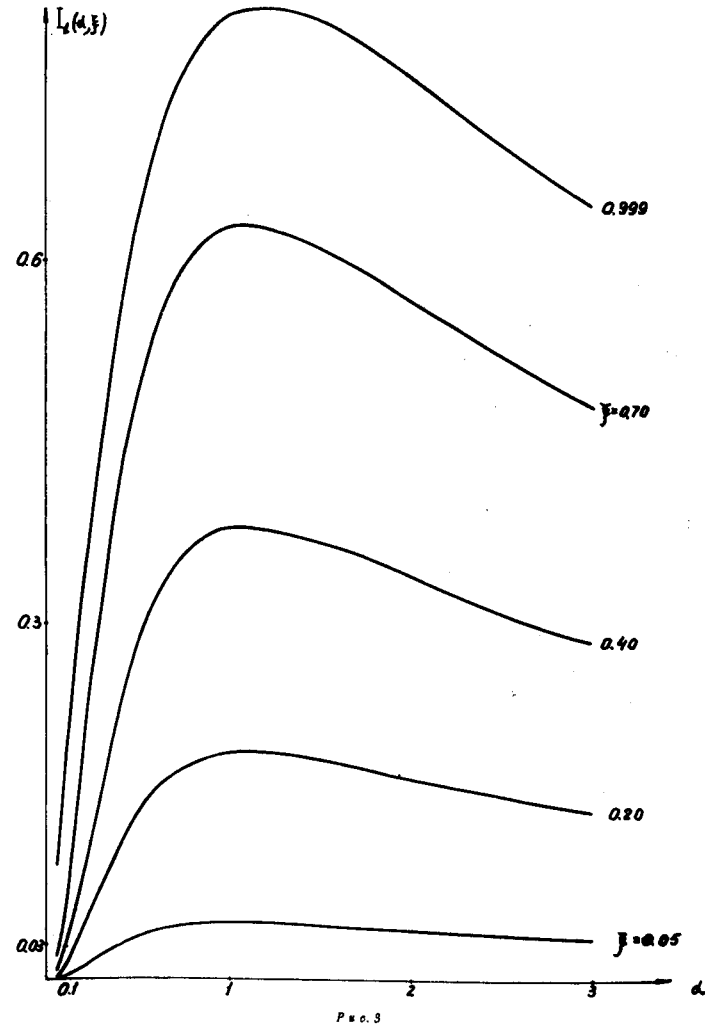


Рис. 3

