ДАН СССР, 1967, т.173, N5, с 526-528

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

2720

С.И. Сердюкова

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

1966

2720

С.И. Сердюкова

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в ЖВМ и МФ

Рассматривается задача с начальными данными:

$$\sum_{|\ell|\leq k} A^1_\ell \bar{u}^{n+1}_{j+\ell} = \sum_{|\ell|\leq k} A^0_\ell \bar{u}^n_{j+\ell} \quad ,$$

$$\bar{u}^0_j = \bar{r}_j \; , \qquad |r_j(p)| < \infty \; . \tag{1}$$

Здесь A^1_ℓ и A^0_ℓ –матрицы с постоянными коэффициентами размерности (q,q) и $\bar{u}^n_j$– вектор с компонентами $u^n_j(p)$.

Исследуется устойчивость в равномерной метрике, в C.

Определение 1. Задача (1) устойчива в C, если равномерно по n выполняется соотношение

$$\sup_{j,1\leq p\leq q} |u^n_j(p)| \leq c \sup_{j,1\leq p\leq q} |u^0_j(p)| \; .$$

Здесь и ниже c, c_1, c_2 – положительные и не зависят от n. После преобразования

$$\bar{v}^n = \sum_j \bar{u}^n_j z^{-j}$$

задача (1) принимает вид:

$$\bar{v}^n = \{(A^1(z))^{-1} A^0(z)\}^n \bar{v}^0 = C^n(z)\bar{v}^0 \; .$$

Заметим, что элементами характеристической матрицы $C(z)$ являются отношения многочленов.

Лемма 1. Для того чтобы система (1) была устойчива в C, необходимо и достаточно, чтобы равномерно по n в ℓ_1 были ограничены коэффициенты Фурье n-ой степени характеристической матрицы $C(z)$, а именно, если

$$\Gamma^n_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C^n(e^{i\phi})e^{ij\phi}\, d\phi \; ,$$

то необходимо и достаточно, чтобы равномерно по n выполнялось соотношение

$$\sup_{1 \le p, r \le q} \sum_j |\Gamma_j^n(p,r)| \le c .$$

Порядок роста функции Грина Γ_j^n в метрике ℓ_1 характеризует степень неустойчивости задачи (1) в C:

$$\sup_{1 \le p, r \le q} \sum_j |\Gamma_j^n(p,r)| = \sup_{|u_j^0(p)| < \infty} \left(\sup_{1 \le p \le q, j} |u_j^n(p)| / \sup_{1 \le p \le q, j} |u_j^0(p)| \right).$$

Доказательство можно посмотреть в [1].

Таким образом, для устройчивости в C как минимум необходимо, чтобы характеристическая матрица $C(z)$ была определена во всех точках единичной окружности $|z|=1$, которую мы обозначим через D_1. Никаких дополнительных ограничений на $C(z)$ не накладывается: $C(z)$ – произвольная матрица, элементами которой являются отношения многочленов.

Основные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Для того чтобы система (1) была устойчива в C, необходимо и достаточно, чтобы

1. Система (1) была устойчива в L_2 (т.е. характеристическая матрица $C(z)$ должна удовлетворять условиям В.Я. Урма [2]);

2. Все собственные значения характеристической матрицы удовлетворяли необходимому и достаточному условию устойчивости в C, сформулированному для характеристической функции в случае одного уравнения [1,3].

Для устойчивых в L_2 систем получены точные по порядку в ℓ_1 оценки роста функции Грина.

Ниже мы уточняем вторую часть теоремы, приводим доказательство, даем примеры систем, устойчивых в L_2, но неустойчивых в C и коротко останавливаемся на многослойных схемах.

Необходимость устойчивости в L_2 для устойчивости в C следует из оценки:

$$\sum_j |\Gamma_j^n(p,r)| > \frac{1}{M} \sum_j |\Gamma_j^n(p,r)|^2 .$$

Через $\Gamma_j^n(p,r)$ обозначены элементы матрицы Γ_j^n, а M имеет следующее значение:

$$M = \begin{cases} \max\limits_j |\Gamma_j^n(p,r)| & \text{при} \quad \max\limits_j |\Gamma_j^n(p,r)| \geq 1, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Одним из условий устойчивости в L_2 /2/ является требование, чтобы все собственные значения характеристической матрицы по модулю на D_1 не превосходили единицы. Так как элементами являются отношения многочленов и $C(z)$ не имеет особенностей на D_1, собственные значения $C(z)$ являются алгебраическими функциями, не имеющими полюсов на D_1 /4/. Отсюда и из условия устойчивости в L_2 следует, что каждое собственное значение принадлежит одному из следующих трех типов:

I. Собственное значение $\lambda(z)$ по модулю на D_1 тождественно равно единице, но $\lambda(z)$ не является степенью z.

II. $\lambda(z) = \exp(ib_0)\cdot(z^{\ell/m})$.

III. Собственное значение по модулю меньше единицы всюду на D_1 кроме конечного числа точек:

$$e^{i\phi_1}, \ldots, e^{i\phi_s}, \ldots, e^{i\phi_t},$$

где $|\lambda(e^{i\phi_s})| = 1$.

В окрестностя каждого ϕ_s справедливо разложение /4/:

$$\lambda(e^{i\phi}) = \exp\{ib_0 + ib_1(\phi-\phi_s) + i\sum_{\ell=\ell_1}^{2\ell_0} b_\ell(\phi-\phi_s)^\ell - a(\phi-\phi_s)^{2\ell_0} + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell(\phi-\phi_s)^{2\ell_0+\ell/m}\}.$$

Коэффициенты b, $a>0$ – вещественные; ℓ, m – целые.

Уточняем вторую часть теоремы. Для того чтобы устойчивая в L_2 система (1) была устойчива в C, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения были либо типа II, либо типа III. Причем для каждого собственного значения типа III и каждого ϕ_s, где это собственное значение по модулю равно единице, в разложении (4) должно выполняться соотношение

$$\ell_1 \geq 2\ell_0.$$

Если есть хотя бы одно собственное значение типа I, то система (1) неустойчива в C. Справедлива оценка:

$$c_1 n^{1/2} \leq \sup_{1\leq p,r\leq q} \sum_j |\Gamma_j^n(p,r)| \leq c_2 n^{1/2}. \tag{5}$$

Если нет собственных значений типа I, но есть хотя бы одно собственное значение типа III, для которого при некотором ϕ_s в разложении (4)

$$\ell_1 < 2\ell_0 ,$$

то устойчивости в C нет. Справедлива оценка:

$$c_1 n^{\frac{1}{2}-(\ell_1/4\ell_0)} \le \sup_{1\le p,r<q} \sum_j |\Gamma_j^n(p,r)| \le c_2 n^{\frac{1}{2}-(\ell_1/4\ell_0)} . \qquad (6)$$

Здесь $\ell_1/4\ell_0$ – наименьшее из всевозможных значений $\ell_1/4\ell_0$, отвечающих различным собственным значениям типа III и различным ϕ_s.

Доказательство теоремы.

Лемма 2. (Лемма локализации). Существует $b > 0$, не зависящее от n, такое, что равномерно по n выполняется соотношение:

$$\sup_{1\le p,r\le q} \sum_{|j|>bn} |\Gamma_j^n(p,r)| < ce^{-n} .$$

Эта оценка является простым следствием ограниченности элементов $C(z)$ на D_1 и в ее окрестности [3].

Лемма 3. ([5], В.Я. Урм). Пусть $C(z)$ – характеристическая матрица системы (1) и ее собственные значения $\lambda(e^{i\phi})$ при $|\phi| < d$ разлагаются в ряд:

$$\lambda(\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \phi^{\ell/m} .$$

Тогда при $|\phi|<d_1\le d$ матрица $C(e^{i\phi})$ невырожденным преобразованием подобия $D(\phi)$ приводится к виду:

$$\tilde{C}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda(\phi) & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{c}_{12}(\phi) & \tilde{c}_{22}(\phi) & \dots & \tilde{c}_{q2}(\phi) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{\tilde{c}}_{1q}(\phi) & \tilde{\tilde{c}}_{2q}(\phi) & \dots & \tilde{\tilde{c}}_{qq}(\phi) \end{pmatrix} = D^{-1}(\phi)C(e^{i\phi})D(\phi). \qquad (7)$$

Причем элементы матриц $\tilde{C}(\phi)$, $D(\phi)$ и $D^{-1}(\phi)$ при $|\phi|<d_1$ разлагаются в ряды по не – отрицательным степеням $\phi^{1/m}$. Если в разложении $\lambda(\phi)$ присутствуют лишь целые степени ϕ, то и элементы матриц разлагаются по целым степеням ϕ.

Лемма 4. Пусть $d(\phi)$ при $|\phi|<d_1$ разлагается в ряд по неотрицательным степеням $\phi^{1/m}$, а $\rho(\phi)$– дважды непрерывно дифференцируемая неотрицательная срезающая функция:

$$\rho(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |\phi| < d_1/2 , \\ 0 & \text{при} \quad |\phi| > 2d_1/3 , \end{cases} -$$

тогда ряд Фурье функции $\rho(\phi)\, d(\phi)$ сходится абсолютно.

Интегрируя один раз по частям

$$d_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\phi) d(\phi) e^{ij\phi} d\phi$$

и применяя затем метод перевала, получаем оценку:

$$d_j = O(j^{-1-(1/m)}) \qquad \text{при} \quad |j| \to \infty .$$

Отсюда следует абсолютная сходимость ряда Фурье.

Лемма 4 позволяет доказать, что матрицы C и $\tilde{C}$ в (7), грубо говоря, эквивалентны относительно устойчивости в C . Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. Обозначим через $\tilde{\Gamma}_j^n$ матричную функцию

$$\tilde{\Gamma}_j^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\phi)\, \tilde{C}^n(\phi)\, e^{ij\phi}\, d\phi .$$

Тогда имеет место оценка:

$$\sup_{1\le p,r\le q} \sum_j |\Gamma_j^n(p,r)| \ge c \sup_{1\le p,r\le q} \sum_j |\tilde{\Gamma}_j^n(p,r)| . \tag{8}$$

Доказательство.

В самом деле, из представления (7) имеем:

$$\tilde{\Gamma}_j^n(p,r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho \sum_{1\le\alpha,\beta\le q} d^{-1}_{\beta r}\, d_{p\alpha}\, C^n_{\alpha\beta}(e^{i\phi}) e^{ij\phi} d\phi = \sum_{1\le\alpha,\beta\le q} d^{\ell}_{\beta r p \alpha}\, \Gamma^n_{j+\ell}(\alpha,\beta) . \tag{9}$$

Здесь $d^{-1}_{\beta r}$, $d_{p\alpha}$, $C^n_{\alpha\beta}$ – коэффициенты матриц D^{-1} , D , C^n соответственно,

$$d^{-1}_{\beta r}(\phi) d_{p\alpha}(\phi) \rho(\phi) = \sum_{\ell} d^{\ell}_{\beta r p\alpha} e^{i\ell\phi} .$$

Согласно лемме (4) определена величина

$$M = \sup_{1\le\alpha,\beta,p,r\le q} \left(\sum_{\ell} |d^{\ell}_{\beta r p \alpha}|\right) .$$

Так как при $|\phi|<d_1$ матрица $D(\phi)$ невырожденная, величина M строго положительна. Теперь из (9) легко получить (8) с постоянной $c = 1/M$.

Переходим к доказательству необходимости второго условия сформулированной выше теоремы. Сначала рассмотрим случай, когда среди собственных значений $C(z)$ есть хотя бы одно $\lambda(z)$ типа 1. Надо установить оценку (5). Правая часть оценки следует из устойчивости в L_2. Получим нижнюю оценку. При $|\phi|<d$ имеем:

$$\ln\lambda(\phi) = i\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \phi^\ell = ih(\phi),\ b_\ell \text{ — вещественные.}$$

Согласно лемме 3 при $|\phi|<d_1\le d$ матрица $C(e^{i\phi})$ невырожденным аналитическим преобразованием подобия приводится к виду (7) с рассматриваемым $\lambda(\phi)$ в левом верхнем углу. Из леммы 5 следует, что для доказательства левой части (5) достаточно установить оценку:

$$\sum_j |\bar{\bar{\Gamma}}{}_j^n(1,1)| > cn^{1/2}, \tag{10}$$

чем мы и займемся. Итак, рассматриваем интеграл:

$$2\pi\bar{\bar{\Gamma}}{}_j^n(1,1) = \int_{-\pi}^{\pi} \lambda^n(\phi)\rho(\phi)e^{ij\phi}\,d\phi = \int_{-\pi}^{\pi}\rho(\phi)e^{inh(\phi)+ij\phi}\,d\phi = \int_{-\pi}^{\pi}\rho(\phi)e^{inF(\phi)}\,d\phi\,. \tag{11}$$

Оценка (10) получена с помощью метода перевала. Предварительно проведем небольшое исследование подинтегральной функции интеграла (11). Точки перевала функции $F(\phi)$ удовлетворяют уравнению

$$h'(\phi) + (j/n) = 0\,.$$

Так как $h'(\phi)$ –вещественная функция, каждая точка дуги $|\phi|<d_1$ является точкой перевала функции $F(\phi)$ при некотором j, не обязательно целом. По ϕ значение j определяется однозначно: $j = -nh'(\phi)$. Так как $h'(\phi)$ – аналитическая функция, каждому j в круге $|\phi|<d_1$ отвечает конечное число точек перевала. Кратные точки перевала удовлетворяют уравнению

$$h''(\phi) = 0\,,$$

поэтому в круге $|\phi|<d_1$ они появляются лишь при конечном наборе ϕ и, следовательно, при конечном наборе значений j.

Из всего сказанного выше следует, что найдутся вещественные j_0, ϕ_0 и круг $K_\sigma = \{\phi : |\phi-\phi_0|<\sigma\}$, обладающие такими свойствами:

1. K_σ лежит внутри круга $|\phi|<d_1$ и ϕ_0 (при $j=j_0$) – единственная в K_σ точка перевала функции $F(\phi)$.

2. В K_σ нет кратных точек перевала ни при каком j;

$$0 < \gamma_1 < |h''(\phi)| < \gamma_2 < \infty .$$

Пусть j растет, начиная с $j = j_0$, тогда точка перевала, занимающая при $j = j_0$ положение ϕ_0, перемещается по дуге D_1 со скоростью

$$\gamma_1 \Delta j/n < |\Delta\phi| < \gamma_2 \Delta j/n .$$

Так что при изменении j от j_0 до $j_0 + (\sigma n/3\gamma_2)$ рассматриваемая точка перевала не выходит за пределы круга $K_{\sigma/3}$. В то же время точки перевала извне K_σ проникают в K_σ не глубже чем на $\sigma/3$. Таким образом, при изменении j от j_0 до $j_0 + (\sigma n/3\gamma_2)$ в круге $K_{2\sigma/3}$ все время одна простая точка перевала. Окрестность этой точки перевала устроена так, как показано на рис. 1. На рис. 1 заштрихована область $\operatorname{Re} F(\phi) \leq 0$. Звездочкой отмечена текущая точка перевала (ϕ_0^j) в $K_{2\sigma/3}$.

Берем новую срезающую функцию:

$$\rho(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |\phi - \phi_0| < \sigma/3 , \\ 0 & \text{при} \quad |\phi - \phi_0| > 2\sigma/3 . \end{cases}$$

От такой замены в интеграле (11) предыдущие рассуждения не пострадают. Далее в (11) отрезок интегрирования деформируем в контур L, отмеченный на рис. 1 пунктиром. L лежит в области $\operatorname{Re} F(\phi) \leq 0$. В окрестности точки перевала L идет по линии наискорейшего спуска. К интегралу по L применим метод перевала. Известная асимптотическая формула /6/ дает:

$$\tilde{\Gamma}_j^n(1,1) = (n h''(\phi_0^j))^{-1/2} \exp(i n h(\phi_0^j)) + O(n^{-3/2}) \tag{12}$$

при $n \to \infty$ и $j \in [j_0, j_0 + (\sigma n/3\gamma_2)]$. Так как $h(\phi_0^j)$ – вещественное и $|h''(\phi_0^j)| < \gamma_2$, из (12) следует оценка:

$$\sum_{|j - j_0| < \sigma n/3\gamma_2} |\tilde{\Gamma}_j^n(1,1)| > \sqrt{n}(\sigma/6)(\gamma_2)^{-3/2}$$

при достаточно большом n. Оценка (5) доказана.

Далее, пусть нет собственных значений типа I, но есть собственные значения типа III, для которых нарушается условие устойчивости в C для одного уравнения: при некоторых ϕ_s в разложении (4) $\ell_1 < 2\ell_0$. Рассмотрим то из выделенных таким образом собственных значений типа III, для которого величина $\ell_1/4\ell_0$ при некотором ϕ_s принимает минимальное значение. Докажем оценку (6). Как и выше, достаточно установить аналогичную оценку для интеграла:

$$\tilde{\Gamma}_j^n(1,1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\phi) \lambda^n(\phi) e^{ij\phi} d\phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\phi)\exp\{n(ib_0 + ib_1\phi + i\sum_{\ell=\ell_1}^{2\ell_0} b_\ell \phi^\ell - a\phi^{2\ell_0} + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \phi^{2\ell_0+(\ell/m)}) + ij\phi\} d\phi .$$

(мы положили $\phi_s = 0$; в окрестности нуля $\rho(\phi) = 1$).

К этому интегралу дословно применимы рассуждения, проведенные в /1/, § 5 при рассмотрении неустойчивых схем. Поведение $\tilde{\Gamma}_j^n(1,1)$ при больших n и j, определяющих порядок роста величины

$$\sum_j |\tilde{\Gamma}_j^n(1,1)| ,$$

определяется функцией

$$\exp\{n(ib_0 + ib_1\phi + i\sum_{\ell=\ell_1}^{2\ell_0} b_\ell\phi^\ell - a\phi^{2\ell_0}) + ij\phi\} .$$

Эта функция просто тождественна с рассмотренной в /1/. Главный член асимптотики не меняется. Меняется лишь порядок добавочного члена. В результате порядок роста $\sum_j |\tilde{\Gamma}_j^n(1,1)|$ остается тем же, что и в /1/.

Чтобы быть до конца точными, сделаем на плоскости ϕ радиальный разрез и будем рассматривать одну из ветвей $\lambda(\phi)$. Радиальный разрез проводим по биссектрисе сектора нижней полуплоскости (предполагается, что $j>0$), принадлежащего области

$$\mathrm{Re}(i\phi + ib_{\ell_1}\phi^{\ell_1}) \le 0$$

и наиболее тесно прилегающего к отрицательной части мнимой полуоси. На рис. 2 представлен случай

$$i\phi + ib_{\ell_1}\phi^{\ell_1} = i\phi - i\phi^6 .$$

В общем случае картина аналогична. Заштрихована область

$$\mathrm{Re}(i\phi - i\phi^6) \le 0 .$$

В ней пунктиром дан контур L , в который деформируется отрезок интегрирования в процессе доказательства[1], § 5. Звездочками отмечены точки перевала, определяющие асимптотику интеграла по L. В третьей четверти штрихом дан радиальный разрез.

Контур интегрирования деформируется внутри области

$$\mathrm{Re}(i\phi + ib_{\ell_1}\phi^{\ell_1}) \leq 0,$$

не задевая разреза. Срезающая функция в точках перевала, определяющих асимптотику интеграла по L, равна единице.

Доказательство правой части оценки удобно проводить после доказательства достаточности условий теоремы.

Доказательство достаточности.

Пусть система (1) устойчива в L_2 и собственные значения ее характеристической матрицы либо типа II, либо типа III. При этом для каждого собственного значения типа III в окрестности каждого ϕ_s, где это собственное значение по модулю равно единице, справедливо разложение

$$\lambda(e^{i\phi}) = \exp\{ib_0 + ib_1(\phi-\phi_s) + (ib_{2\ell_0} - a)(\phi-\phi_s)^{2\ell_0} + \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell(\phi-\phi_s)^{2\ell_0+(\ell/m)}\}. \quad (13)$$

Докажем, что система устойчива в C. При доказательстве мы следуем схеме В.Я. Урма[5].

Рассмотрим следующее разбиение единицы:

$$1 \equiv \sum_{i=1}^{I}\rho_i(\phi) \qquad \text{при} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Каждая ρ_i –неотрицательная дважды непрерывно дифференцируемая функция:

$$\rho_i(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{на} \quad G_i = \{\phi : |\phi-\phi_i| \leq \varepsilon_i\}, \\ 0 & \text{вне} \quad N_i = \{\phi : |\phi-\phi_i| \leq \eta_i\}. \end{cases}$$

Каждая точка ϕ_s, где одно из собственных значений по модулю равно единице, является одной из $\phi_i \in G_i$. Отсюда на каждом N_i лежит строго одна точка ϕ_s и вне этой точки на N_i собственные значения типа III по модулю меньше единицы. Пусть при $\phi=\phi_i$ собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ по модулю равны единице, а остальные всюду на N_i строго меньше единицы:

$$|\lambda_{k+1}|, \dots, |\lambda_q| \leq q_0 < 1.$$

Тогда согласно лемме 3 в окрестности ϕ_i матрицу $C(e^{i\varphi})$ невырожденным преобразованием подобия $D(\phi)$ можно привести к виду:

$$\tilde{C} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline P_1 & Q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 \ddots & 0 & 0 \\ a_{pr} & \lambda_k & \\ \hline P_1 & & Q \end{array}\right). \quad (14)$$

Элементы матриц $\tilde{C}$, D, D^{-1} в окрестности ϕ_1 разлагаются в ряды по неотрицательным степеням $(\phi-\phi_1)^{1/m}$. Пусть взято такое разбиение единицы, что эти ряды сходятся на N_1. Разбиение с указанными выше свойствами существует.

Так как

$$C^n = \sum_{i=1}^{I} \rho_i C^n \quad \text{при} \quad 0 \le \phi \le 2\pi,$$

для того чтобы доказать устойчивость (1) в C, достаточно установить равномерную по n в ℓ_1 ограниченность коэффициентов Фурье элементов всех матриц $\rho_i C^n$. Рассмотрим одну из этих матриц. Пусть она приведена к виду (14). Тогда

$$\rho_1 C^n = \rho_1 D \left(\begin{array}{c|c} \lambda^n & 0 \\ \hline P_n & Q^n \end{array} \right) D^{-1}.$$

Матрица P_n выражается через матрицы P_1, λ, Q:

$$P_n = P_1 \lambda^{n-1} + Q P_1 \lambda^{n-2} + Q^2 P_1 \lambda^{n-3} + \ldots + Q^{n-1} P_1. \qquad (15)$$

Для завершения доказательства, грубо говоря, достаточно исследовать на устойчивость матрицу λ.

Лемма 6. Если для любой функции $d(\phi)$, которая на N_1 разлагается в ряд по неотрицательным степеням $(\phi-\phi_1)^{1/m}$, равномерно по n в ℓ_1 ограничены коэффициенты Фурье элементов матрицы $\rho_1 d \lambda^n$, то система (1) устойчива в C.

Доказательство. Прежде всего напомним, что согласно лемме (1) достаточно рассматривать $|j| \le bn$. Далее, так как

$$\Gamma_j^n(p,r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho_1 \sum_{1 \le \alpha,\beta \le q} d_{\beta r} d_{p\alpha}^{-1} \tilde{C}_{\alpha\beta}^n e^{ij\phi}\, d\phi = \sum_{1 \le \alpha,\beta \le q} \Gamma_j^n(p,r,\alpha,\beta),$$

достаточно доказать, что равномерно по n ограничены

$$\sum_{|j| \le bn} |\Gamma_j^n(p,r,\alpha,\beta)|.$$

По условию леммы это имеет место для $1 \le \alpha,\beta \le k$. Далее, так как собственные значения матрицы Q на N_1 по модулю меньше $q_0 < 1$ и ряды Фурье функций $\rho_1 d_{\beta r} d_{p\alpha}^{-1}$ сходятся абсолютно, имеет место оценка:

$$\sup_{\substack{k+1 \le \alpha,\beta \le q \\ 1 \le p,r \le q}} \Big(\sum_{|j|<bn} |\Gamma_j^n(p,r,\alpha,\beta)| \Big) \le c n^{q-k+1} q_0^n.$$

Из условий леммы следует равномерная по n в ℓ_1 ограниченность коэффициентов Фурье элементов матрицы $\rho_1 P_1 \lambda^n$. Отсюда, из (15) и соотношения

$$\int_{N_1} |q^n_{pr}(\phi)|\, d\phi \le cn^{q-k} q^n_0 .$$

получаем оценку:

$$\sup_{\substack{1\le\alpha\le k\\ k+1\le\beta\le q\\ 1\le p,r\le q}} \sum_{|j|\le bn} |\Gamma^n_j(p,r,\alpha,\beta)| \le c_1(1+2^{q-k+1} q^2_0 + \ldots + i^{q-k+1} q^i_0 + \ldots + (n-1)^{q-k+1} q^{n-1}_0) \le c_2 .$$

Лемма 6 доказана.

Наконец, докажем, что для устойчивых в L_2 систем условия леммы 6 выполняются автоматически. Собственно мы ограничимся тем, что приведем условия В.Я. Урма и докажем специфические для нашего случая оценки. В остальном доказательство полностью совпадает с доказательством В.Я. Урма [5], и мы его не повторяем.

На N_1 каждое собственное значение матрицы λ имеет вид:

$$\lambda(e^{i\phi}) = \exp\{ib_0 + ib_1(\phi-\phi_1) + (ib_{2\ell_0} - \alpha)(\phi-\phi_1)^{2\ell_0} + \sum_{\ell=1} c_\ell (\phi-\phi_1)^{2\ell_0+(\ell/m)}\} . \quad (16)$$

Собственные значения λ_p и λ_r из одного класса, если у них в разложении (16) совпадают параметры:

$$b_0 ,\ b_1 ,\ b_{2\ell_0} ,\ \alpha ,\ 2\ell_0 .$$

Требование устойчивости в L_2 накладывает [2] следующие ограничения на поведение внедиагональных элементов матрицы λ (см. (14)) в окрестности ϕ_1 :

1. Если λ_p и λ_r –одного класса, то a_{pr} при $\phi=\phi_1$ должен иметь нуль кратности не ниже $2\ell_0$;

2. Если λ_p и λ_r –разных классов, но имеют γ общих коэффициентов в разложении (16), считая и нулевые, то a_{pr} при $\phi=\phi_1$ должен иметь нуль кратности не ниже γ ;

3. Если $\lambda_p \equiv \lambda_r$, то a_{pr} должен тождественно равняться нулю в окрестности ϕ_1.

В процессе доказательства требуется установить равномерную по n в ℓ_1 ограниченность коэффициентов Фурье функций:

$$f^n_{i_1\ldots i_t} = \rho_1\, da_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_{t-1} i_t} \delta^n_{i_1 i_2 \ldots i_t} , \quad (17)$$

где

$$\delta^n_{i_1 i_2\ldots i_t} = \sum_{\ell_1+\ldots+\ell_t = n-t+1} \lambda_{i_1}^{\ell_1} \ldots \lambda_{i_t}^{\ell_t} ,$$

$\lambda_{i_1} , \ldots , \lambda_{i_t}$ – все из одного класса.

Если $\lambda(z)$ является степенью z : $\lambda(z)=e^{ib_0} z^{\ell/m}$, то без ограничения общности можно считать, что это целая степень z , в противном случае делаем другую замену:

$$\bar{v}_n = \sum_j \bar{u}_j^n z^{-mj}$$

Если два собственных значения степенного типа принадлежат одному классу, то они тождественно совпадают, так что соответствующие $a_{pr} = 0$ и остается рассмотреть лишь $\rho_1 d\lambda^n$. Равномерная по n в ℓ_1 ограниченность коэффициентов Фурье такой функции является простым следствием абсолютной сходимости ряда Фурье функции $\rho_1 d$ (см. лемму 3).

Если же $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{i_t}$ – собственные значения типа III и принадлежат одному классу, то из (16), (17) и сформулированных выше условий на a_{pr} следует, что при $\phi \in N_1$ справедливы оценки:

$$|f^n_{i_1\ldots i_t}| \le cn^{t-1}(\phi-\phi_1)^{2\ell_0(t-1)} \exp\{-n\tfrac{a}{2}(\phi-\phi_1)^{2\ell_0}\}, \tag{18}$$

$$\left|\frac{d^2}{d\phi^2}(f^n_{i_1\ldots i_t} e^{-ib_1(n-t+1)(\phi-\phi_1)})\right| \le c\{n^{t-r}(\phi-\phi_1)^{2\ell_0(t-1)-2} + \tag{19}$$
$$+ n^t(\phi-\phi_1)^{2\ell_0 t + 2} + n^{t+1}(\phi-\phi_1)^{2\ell_0(t+1)-2}\}\exp\{-n\frac{a}{2}(\phi-\phi_1)^{2\ell_0}\}.$$

Из (18) сразу получаем оценку:

$$|\Gamma^n_j| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^n_{i_1\ldots i_t} e^{ij\phi}\, d\phi\right| < c_1 n^{-1/2\ell_0}.$$

Затем, интегрируя дважды по частям и учитывая при этом, что за счет ρ_1 внеинтегральные члены пропадают, с помощью оценки (19) получаем, что

$$|\Gamma^n_j| \le c_2 n^{1/2\ell_0}/j_1^2 .$$

Под знак интеграла мы брали функцию

$$\exp\{ij_1(\phi-\phi_1)\} = \exp\{ij(\phi-\phi_1) + i(n-t+1)b_1(\phi-\phi_1)\}.$$

Из двух последних оценок следует искомая оценка:

$$\sum_j |\Gamma^n_j| \le c .$$

З а м е ч а н и е 1. Осталась недоказанной правая часть оценки (6). Чтобы восполнить этот пробел, оценим коэффициенты Фурье функции

$$f^n_{i_1\ldots i_t} ,$$

дословно повторяя оценки, проведенные при рассмотрении неустойчивого случая для одного уравнения /1/, § 5. При этом следует учитывать поведение a_{pr} вблизи ϕ_1. Все оценки останутся старыми за исключением определяющей оценки 4 (/1/, § 5). За счет $n^{t-1}(\phi-\phi_1)^{2\ell_0(t-1)}$ в ней появится дополнительный множитель. Однако в ℓ_1 оценка сверху останется прежней. Теорема доказана.

Замечание 2. Задача с начальными данными для многослойной схемы сводится /7/ к двухслойной задаче вида (2). Так что доказанная здесь теорема одновременно решает вопрос об устойчивости в C многослойных схем.

Например, исследование трехслойной схемы

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = \frac{r}{h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n),$$

аппроксимирующей уравнение $u_{tt} = u_{xx}$, сводится к исследованию системы

$$\begin{cases} u_j^{n+1} - v_j^n = \frac{r}{h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \\ v_j^{n+1} = u_j^n. \end{cases}$$

Последняя при $\frac{r}{h}<1$ устойчива в L_2, но неустойчива в C

$$\sup_{1<p,r<2} \sum_j |\Gamma_j^n(p,r)| \asymp \sqrt{n}.$$

Приведем еще один пример системы, устойчивой в L_2, но неустойчивой в C. Система

$$\left\{\begin{aligned} &u_j^{n+1} - u_j^n - \tfrac{1}{2}\frac{r}{h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) - \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0 \\ &v_j^{n+1} - v_j^n - \tfrac{1}{2}\frac{r}{h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{h^2}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) = 0 \end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned} &u_t = v_x \\ &v_t = u_x \end{aligned}\right.$$

при $\frac{r}{h}<1$ устойчива в L_2. В окрестности $\phi=0$ собственные значения характеристической матрицы имеют вид:

$$\lambda_{1,2}(\phi) = \exp\left\{\pm i\frac{r}{h}\phi \mp \frac{1}{6}i\frac{r}{h}\left(1-\frac{r^2}{h^2}\right)\phi^3 - \frac{1}{8}\frac{r^2}{h^2}\left(1-\frac{r^2}{h^2}\right)\phi^4 + O(\phi^5)\right\}.$$

Здесь $\ell_1 = 3$, $2\ell_0 = 4$, так что $\ell_1 < 2\ell_0$ и поэтому устойчивости в C нет.

$$\sup_{1\le p,r\le 2} \sum |\Gamma_j^n(p,r)| \asymp n^{1/8}.$$

Замечание 3. В работе /8/ введено понятие обобщенной жордановой формы и с помощью него получено необходимое и достаточное условие устойчивости системы в C. Однако, как показывает простой пример,

$$\begin{pmatrix} 1 & \phi & 0 \\ 0 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

введенная в работе [8] обобщенная жорданова форма определена не всегда.

Приношу глубокую благодарность Н.С. Бахвалову за внимание к работе.

Литература

1. С.И. Сердюкова. Диссертация, МГУ, 1965.
2. В.Я. Урм. О необходимом и достаточном условии устойчивости систем разностных уравнений, ДАН СССР, 139, 1, 40 (1961).
3. С.И. Сердюкова. Об устойчивости в C линейных разностных схем с постоянными действительными коэффициентами. ЖВМ и МФ, 6, № 3, 469–478 (1966).
4. А.И. Маркушевич. Теория аналитических функций, ГИТТЛ, гл. VIII, 6.3, 1950.
5. В.Я. Урм. Диссертация, М., 1961.
6. Н.Г. де Брейн. Асимптотические методы в анализе. ИЛ, 5.8, 114, 1961.
7. Р.Д. Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, гл. V, § 2, 90–91, 1960.
8. Robin E.Esch. A necessary and Sufficient Condition for Stability of Partial Difference Equation Problems. Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 7, N.2, 163–175, April, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 апреля 1966 г.

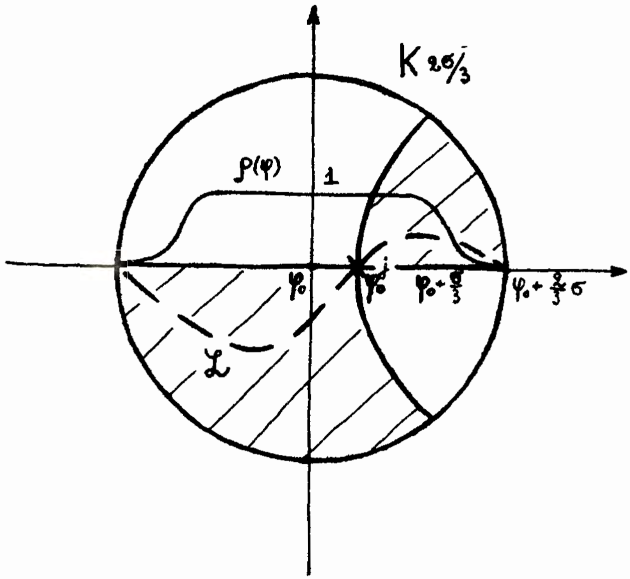

Рис 1.

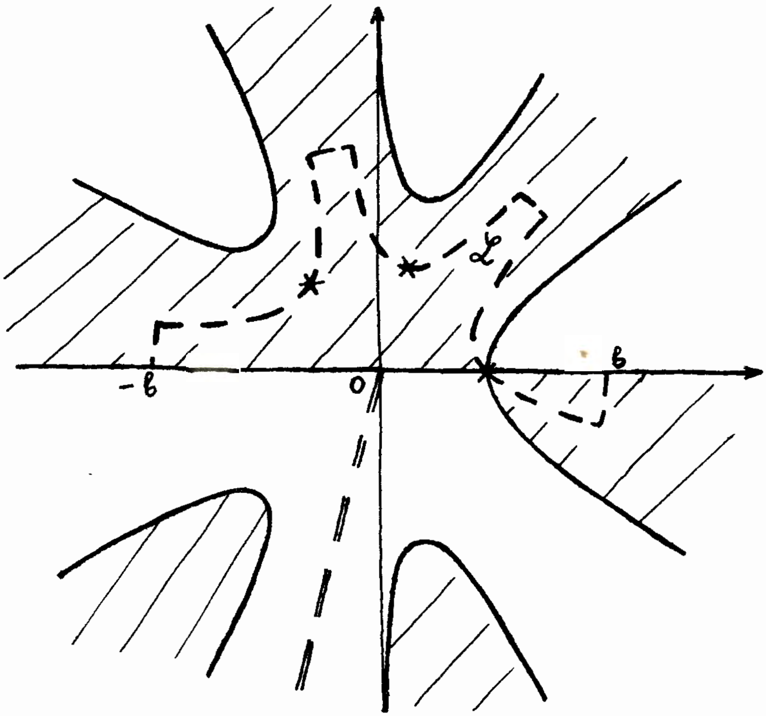

Рис 2.