ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2679 -2

Н. Б. Рубин

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРЕМА ВИРИАЛА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, ДВИЖУЩИХСЯ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1966

2679 -2

Н.Б. Рубин

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРЕМА ВИРИАЛА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, ДВИЖУЩИХСЯ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Направлено в ЖТФ

В ряде случаев при исследовании, например, поведения частиц в накопительных системах ускорителей, плазменных установках и т.п. представляют интерес некоторые общие закономерности, присущие ограниченным системам, состоящим из финитно (возможно, релятивистски) движущихся частиц и внешнего электромагнитного поля. Одно из таких общих соотношений выражается теоремой вириала. При наличии внешнего поля[x)] эта теорема должна выглядеть иначе, чем в случае свободных заряженных частиц, рассмотренном в /1/.

Для исследования вопроса используем известное уравнение

$$r^{i}_{k;i} = \frac{1}{c} J_n \tilde{F}^{\cdot n}_{k} \,, \tag{1}$$

где r^i_k – тензор энергии – импульса частиц, и слева в (1) записана операция его ковариантного дифференцирования по пространственно-временным координатам с последующим суммированием по индексу i от 0 до 4[xx)]; справа в (1): J_n – 4– ток частиц, $\tilde{F}^{\cdot n}_{k}$ – тензор суммарного электромагнитного поля: внешнего $\tilde{\tilde{F}}^{\cdot n}_{k}$ и поля частиц $F^{\cdot n}_{k}$ (по индексу "n" производится суммирование от 0 до 4).

Введем t^i_k – тензор энергии – импульса электромагнитного поля частиц, для которого, как известно /1/, справедливо уравнение:

$$t^{i}_{k;i} = -\frac{1}{c} J_n F^{\cdot n}_{k} \,. \tag{2}$$

Обозначив $T^i_k = r^i_k + t^i_k$, из (1) и (2) получим:

$$T^{i}_{k;i} = \frac{1}{c} J_n \tilde{\tilde{F}}^{\cdot n}_{k} \,. \tag{3}$$

Подчеркнем, что в левую часть (3) входит суммарный тензор энергии – импульса частиц и их поля, а в первую часть 4 – ток частиц и внешнее поле. При отсутствии внешнего поля уравнение (3) принимает обычный вид: справа 0.

---

x) Источники этого поля из рассмотрения исключаются.

xx) Запись уравнения (1) допускает, очевидно, использование произвольных криволинейных координат.

Для получения необходимых соотношений на основе (3) используем прием, в основе которого лежит метод, примененный в [2] для получения интегральной формы законов сохранения в произвольных координатах. Это позволит, в частности, получить некоторые соотношения в общековариантной форме.

Рассмотрим 4-компонентную (в общем случае) функцию пространственно-временных координат q^i, определенную так:

$$\Psi^i = T^i_k \phi^k , \tag{4}$$

где ϕ^k – набор четырех функций от q^i, причем не требуется, чтобы они образовали 4-вектор; пока эти функции не конкретизируются.

Рассмотрим соотношение

$$\Psi^i_{;i} = \frac{\partial \Psi^i}{\partial q^i} + \Gamma^i_{\ell i} \Psi^\ell = \frac{\partial \Psi^i}{\partial q^i} + \Psi^\ell \frac{\partial (\ln\sqrt{g})}{\partial q^\ell} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\Psi^i)}{\partial q^i} , \tag{5}$$

где $\Gamma^k_{\ell i}$ – символы Кристоффеля, $\Gamma^i_{\ell i} = \frac{\partial (\ln\sqrt{g})}{\partial q^\ell}$, g – детерминант метрического тензора g_{ik}.

Помножим (5) на $\sqrt{g}$ и проинтегрируем по всему трехмерному пространству, тогда

$$\int \frac{\partial(\sqrt{g}\Psi^0)}{\partial q^0} dq^1 dq^2 dq^3 + \int \frac{\partial(\sqrt{g}\Psi^\alpha)}{\partial q^\alpha} dq^1 dq^2 dq^3 = \int \left(\frac{\partial \Psi^i}{\partial q^i} + \Gamma^i_{\ell i} \psi^\ell\right)\sqrt{g}\, dq^1 dq^2 dq^3 \tag{6}$$

(по α и вообще далее по дважды повторяющимся греческим индексам – суммирование от 1 до 3).

Считая, что на бесконечности $T^i_k \phi^k \to 0$ (для возвращения излучения в систему предполагается наличие "отражающих" стенок [1]) и используя теорему Гаусса, получим, что второй интеграл слева в (6) будет 0.

Подставим в (6) выражение (4) и, воспользовавшись уравнением (3), найдем:

$$\frac{\partial}{\partial q^0}\left[\int T^0_k \phi^k \sqrt{g}\, dq^1 dq^2 dq^3\right] = \int\left[T^i_k \left(\frac{\partial \phi^k}{\partial q^i} + \phi^\ell \Gamma^k_{\ell i}\right) + \phi^k \frac{1}{c} J_n \tilde{\tilde{F}}{}_k^{\cdot n}\right]\sqrt{g}\, dq^1 dq^2 dq^3 . \tag{7}$$

Если взять аналогично [2] $\phi^k = \frac{\partial x^p}{\partial q^m} g^{mk}$, где x^p – одна из четырех галилеевых координат, то для плоского пространства-времени, каковым мы только и будем интересоваться, $\frac{\partial \phi^k}{\partial q^i} + \phi^\ell \Gamma^k_{\ell i} = 0$ и из (7) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}^p}{\partial q^0} &= -\frac{i}{c^2} \int \frac{\partial x^p}{\partial q^m} \tilde{\tilde{F}}{}^{mn} J_n \sqrt{g}\, d\overset{3}{q} = -\frac{i}{c^2} \int \tilde{\tilde{F}}{}^{pn}_{(\text{гал.})} J_n\, d^3x , \\ \mathcal{P}^p &= -\frac{i}{c^2} \int \frac{\partial x^p}{\partial q^m} T^{0m} \sqrt{g}\, d\overset{3}{q} = -\frac{i}{c} \int T^{0p}_{(\text{гал.})} d^3x . \end{aligned} \tag{8}$$

Соотношение (8) выражает изменение во времени полного 4-импульса $\mathcal{P}^p$ системы, состоящей из частиц и их поля, происходящее благодаря действию внешнего электромагнитного поля. Заметим, что постоянный вектор $\mathcal{P}^p$ отнесен к галилеевской системе. Если внешнего поля нет, то (8) дает интегральные законы сохранения [2]. Аналогично, специальным выбором ϕ^k можно получить законы изменения моментов количества движения.

Перейдем к собственно теореме вириала. Опять будем исходить из (7), не конкретизируя ϕ^k, но считая, что эти функции не зависят от времени $t = q^0/ic$. Усредним (7) по времени. Так как при финитном движении T^0_k меняется в конечных пределах, то среднее значение левой части (7) за большой промежуток времени будет равно 0. Положим далее $\phi^0 = 0$ и учтем, что у нас $g_{00} = 1$, $g_{0\alpha} = 0$. Тогда вместо (7) будем иметь:

$$< \int T^\gamma_\beta \left(\frac{\partial \phi^\beta}{\partial q^\gamma} + \phi^\lambda \Gamma^\beta_{\lambda\gamma}\right)\sqrt{g}\, d^3q + \frac{1}{c} \int \phi^\alpha J_n \tilde{\tilde{F}}{}^{\cdot n}_\alpha \sqrt{g}\, d^3q . \tag{9}$$

Пусть $q^i = x^i$ – галилеевы координаты, и $\phi^\beta = x^\beta$. Тогда $\Gamma^\beta_{\lambda\gamma} = 0$, и, поскольку $T^\gamma_\gamma = T^i_i - T^0_0$, найдем

$$< \int T^0_0\, d^3x > = < \frac{1}{c} \int x^\alpha J_n \tilde{\tilde{F}}{}^{\cdot n}_\alpha\, d^3x > + < \int T^i_i\, d^3x > . \tag{10}$$

Если положить, например, $\phi^1 = r$, $\phi^2 = 0$, $\phi^3 = z$, то аналогично (10) получим для цилиндрической системы (отличные от нуля $\Gamma^\beta_{\lambda\gamma}$ есть $\Gamma^r_{\theta\theta} = -r$, $\Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}$)

$$< \int T^0_0\, r\,dr\,d\theta\,dz > = < \frac{1}{c} \int \left[r J_n \tilde{\tilde{F}}{}_r^{\cdot n} + z J_n \tilde{\tilde{F}}{}_z^{\cdot n}\right] r\,dr\,d\theta\,dz > + < \int T^i_i\, r\,dr\,d\theta\,dz > . \tag{11}$$

Последнее уравнение можно получить и из (10) непосредственным переходом в цилиндрическую систему.

Эти соотношения представляют теорему вириала, выражающую среднюю полную энергию системы частиц и возбуждаемого ими поля ($E = -\int T^0_0\, d^3x$) через среднее значение суммы интегралов, один из которых берется от шпура тензора энергии-импульса одних частиц, а другой (если внешнее поле $\neq 0$) включает собственные токи и внешнее поле.

Проанализируем формулу (10). Очевидно, во-первых, что (10) не зависит от выбора начала координат. В самом деле, если взять $x^\alpha = x^{\alpha\prime} + a^\alpha$, где a^α – произвольный постоянный 3-вектор, то в (10) компоненты a^α войдут как коэффициенты при интегралах $\int J'_n \tilde{\tilde{F}}{}'^{\alpha n} d^3x' = ic^2 \frac{\partial \mathcal{P}'^p}{\partial q^0}$ (см. (8) при $x = x'$, $p = \alpha$). При усреднении по времени для финитного движения эти интегралы исчезают, и результат не зависит от a^α.

Далее, ввиду антисимметрии тензора $\overset{\approx}{F}{}_{i}^{\cdot k}$ (система координат галилеева), имеем:

$$J_n \overset{\approx}{F}{}_{\alpha}^{\cdot n} = c\rho\, \overset{\approx}{\mathcal{E}}_{\alpha} + \frac{1}{2} J_{\sigma} (\overset{\approx}{F}{}_{\alpha}^{\cdot\sigma} - \overset{\approx}{F}{}_{\alpha}^{\cdot\sigma}), \tag{12}$$

ρ – пространственная плотность заряда частиц, $\overset{\approx}{\mathcal{E}}_{\alpha}$ – напряженность внешнего электрического поля. Так как $\overset{\approx}{\mathcal{H}}{}^{\sigma} = \frac{1}{2} e^{\sigma\beta\mu} \overset{\approx}{F}_{\beta\mu}$, где $e^{\sigma\beta\mu}$ – совершенно антисимметричный единичный псевдотензор 3-го ранга, $\overset{\approx}{\mathcal{H}}{}^{\sigma}$ – компоненты напряженности внешнего магнитного поля, $[\vec{J}, \vec{\overset{\approx}{\mathcal{H}}}]_{\alpha} = \frac{1}{2} e_{\alpha\sigma\nu} (J^{\sigma} \overset{\approx}{\mathcal{H}}{}^{\nu} - J^{\nu} \overset{\approx}{\mathcal{H}}{}^{\sigma})$,

то непосредственным вычислением с учетом соотношения $e_{\alpha\sigma\nu}\, e^{\beta\mu\nu} = \delta_{\alpha}^{\beta}\delta_{\sigma}^{\mu} - \delta_{\alpha}^{\mu}\delta_{\sigma}^{\beta}$ получаем, что второй член в (12) справа есть компонента векторного произведения $[\vec{J}, \vec{\overset{\approx}{\mathcal{H}}}]_{\alpha}$. Следовательно,

$$\frac{1}{c} J_n \overset{\approx}{F}{}_{\alpha}^{\cdot n} = \rho\, \overset{\approx}{\mathcal{E}}_{\alpha} + \frac{1}{c} [\vec{J}, \vec{\overset{\approx}{\mathcal{H}}}]_{\alpha} . \tag{13}$$

Таким образом, при финитном движении

$$\langle E \rangle = -\langle \int \{ \rho\, \vec{\overset{\approx}{\mathcal{E}}}\, \vec{x} + \frac{1}{c} [\vec{J}, \vec{\overset{\approx}{\mathcal{H}}}]\, \vec{x} + r_i^i \}\, d^3x \rangle , \tag{14}$$

где $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$.

Если перейти от интегрирования к суммированию по частицам, то есть взять

$$\rho = \sum_{a} e_{(a)} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{(a)}), \quad J^{\alpha} = \sum_{a} e_{(a)} v^{\alpha}_{(a)} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{(a)}), \quad r_i^i = -\sum_{a} m_{(a)} c^2 \sqrt{1 - (\frac{v_a}{c})^2}\, \delta(\vec{x} - \vec{x}_{(a)}),$$

где $m_{(a)}$, $v_{(a)}$, $e_{(a)}$ — массы покоя, скорости и заряды частиц соответственно, тогда

$$\langle E \rangle = \langle \sum_{a} m_{(a)} c^2 \sqrt{1 - (\frac{v_{(a)}}{c})^2} - \sum_{a} e_{(a)} \vec{x}_{(a)} \{ \frac{1}{c} [\vec{v}_{(a)}, \vec{\overset{\approx}{\mathcal{H}}}_{(a)}] + \vec{\overset{\approx}{\mathcal{E}}}_{(a)} \} \rangle \tag{15}$$

В отличие от случая, рассмотренного в /1/, здесь имеются дополнительные члены, связанные с внешним электромагнитным полем – сумма скалярных произведений $\vec{x}_{(a)}$ на силы Лоренца, с которыми внешнее поле действует на соответствующие частицы.

Для иллюстрации возьмем простейший пример одной частицы с массой покоя m_0. Если внешних полей нет, то единственное возможное финитное движение такой частицы – покой. Из теоремы вириала при этом получаем, естественно, $E = E_0 = m_0 c^2$. Если, например, одна частица находится во внешнем магнитном поле, то возможен случай, когда ее финитное движение совершается по окружности радиуса R. Из (15) тогда находим $E = \frac{m_0 c^2}{\gamma} - \frac{e}{c} v \overset{\approx}{\mathcal{H}} R$, или так как здесь $pc = E\frac{v}{c} = -e\overset{\approx}{\mathcal{H}} R$, то, естественно, $E^2 = E_0^2 + e^2 \overset{\approx}{\mathcal{H}}{}^2 R^2$. Одним из примеров финитного движения одной частицы в электрическом поле может быть ее вращение в цилиндрическом конденсаторе.

Теорема вириала в форме (10), (11), (15) может найти применение при исследовании различных квазистационарных состояний системы заряженных частиц во внешних полях.

Конечно, если источники внешнего поля включить в систему, тогда теорема вириала будет иметь обычный вид (без последнего члена в (15) справа), но это следует делать лишь тогда, когда такими источниками являются также системы "свободных" частиц, а не, например, токи в проводниках, заряды в диэлектриках[x)]. При рассмотрении этих случаев полезно использовать методику данной работы.

Здесь, однако, надо иметь в виду, что даже при достаточном удалении сторонних источников от системы в материале этих источников будут индуцироваться токи и заряды за счет излучения из системы (сторонние источники находятся внутри области, ограниченной экраном, отражающим излучение).

Корректный учет в <E> такой поляризационной энергии выше не произведен. Поэтому данное рассмотрение годится для случаев, когда эта энергия мала по сравнению с энергией системы, либо когда не учитывается излучение из системы, и сторонние источники достаточно удалены.

Значения внешних полей $\vec{\tilde{\tilde{\mathcal{E}}}}_{(\alpha)}$, $\vec{\tilde{\tilde{\mathcal{H}}}}_{(\alpha)}$, входящие в (15), являются мгновенными и в принципе зависят от "истории" процессов взаимной передачи энергии из внешнего поля в систему частиц и обратно. Практически же в большинстве случаев их можно считать заданными, если речь не идет о так называемой "подсадке" источников поля сгустками находящихся в поле частиц.

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля, ГИФМЛ, М. 1962.
2. В.А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения, ГИТТЛ, М., 1955.
3. В.Д. Шафранов. Равновесие плазмы в магнитном поле, сборник "Вопросы теории плазмы", том 2, М. 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 апреля 1966 г.

---

x) Применительно к магнитной гидродинамике в нерелятивистском случае вопрос о роли сторонних токов при формулировке теоремы вириала кратко обсуждается, например, в работе /3/. Но там иной подход.