

с 345 е 1

П-27

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

ЖТФ, 1967, т. 37, в. 9,

с. 1648-1651

27/1



2878

Э.А. Перельштейн

ДИНАМИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЭФФЕКТА
ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАССЫ
В МОДУЛИРОВАННЫХ ПУЧКАХ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

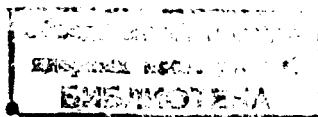
1966

2678

Э.А. Перельштейн

ДИНАМИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЭФФЕКТА
ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАССЫ
В МОДУЛИРОВАННЫХ ПУЧКАХ

Направлено в ЖТФ



42231, 28.

Экспериментальное и теоретическое исследование^{/1-3/} продольной неустойчивости заряженных кольцевых пучков релятивистских частиц (эффект отрицательной массы) указывает на то, что при развитии неустойчивости возможно предельное стационарное состояние в виде сгустков в фазовом пространстве, обладающих значительной устойчивостью.

Так, в работе^{/1/} показано, что при одинаковых энергетических разбросах и равных фазовых плотностях частиц модулированный пучок более устойчив, чем пучок с однородной плотностью.

В данной работе рассматривается устойчивость моноэнергетического заряженного пучка с модулированной по синусоидальному закону плотностью.

В немодулированном пучке с такими же параметрами развивается аперриодическая продольная неустойчивость.

Модуляция пучка приводит к тому, что на частицу, отклонившуюся от равновесного положения, действуют периодические фокусирующие и дефокусирующие силы. Таким образом, видна непосредственная аналогия с задачей о движении перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса^{/4/} и, следовательно, существует возможность динамической стабилизации эффекта отрицательной массы.

Примем уравнения самосогласованного поля работы^{/5/} вместе со всеми, сделанными там ограничениями, за исходные. Ограничиваясь рассмотрением моноэнергетических пучков, используем вместо кинетического уравнения^{/6/} уравнения для первых двух моментов функции распределения:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{R_{cp}} \frac{\partial (vN)}{\partial \theta} = 0. \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{R_{cp}} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{2\pi e \bar{E}}{m}. \quad (2)$$

Здесь $R_{cp} \cdot \theta$ - продольная координата; N - линейная плотность частиц в пучке; v - средняя циклическая скорость частиц; R_{cp} - средний радиус циклических орбит; \bar{E} - продольное электрическое поле \bar{E}_θ , усредненное по сечению камеры.

ограничивающей пучок; $m_1 = (R_{op}^2 \omega \frac{d\omega}{dE})^{-1}$ - эффективная масса частицы, циркулирующей с усредненной частотой, ω и E - соответственно циклическая частота и энергия частицы. Уравнения (1-2) необходимо рассматривать вместе с волновым уравнением

$$\Delta \bar{\epsilon}_\theta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_\theta}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{R_{op}} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial J_\theta}{\partial t} \quad (3)$$

где $\rho = eQN$ - линейная плотность заряда,

$J_\theta = evQN$ - линейная плотность тока,

$Q(x, y)$ - функция, определяющая распределение плотности в плоскости, перпендикулярной θ .

Положив в формулах (1-3) $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, получим систему уравнений, определяющую стационарное состояние пучка. Интегрирование уравнений, полученных из (1) и (3), даст

$$v_0 N_0 = \text{const} = v_{00} N_{00} \quad (4)$$

$$\bar{\epsilon}_0 = - \frac{4\pi e}{R_{op}^2} \sum_{n, J} \frac{g_J^{-2} \text{in}}{k_J + n^2} (N_{en} - N_{n0} \delta_{n0} \delta_{k_J, 0}) e^{in\theta} \quad (5)$$

где g_J и $\frac{k_J}{2}$ - собственные функции и значения соответственно оператора $D\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{R_{op}^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ с однородным граничным условием на стенках камеры; N_n - фурье-образ функции $N(\theta)$; δ_{ik} - символ Кронекера; индексом e отмечаются величины в стационарном состоянии. После исключения v_0 и $\bar{\epsilon}_0$ из последних формул и уравнения (2) для стационарного состояния получаем нелинейное функциональное уравнение:

$$\frac{v_{00}^2 N_{00}^2}{N_0^2} = - \frac{16\pi^2 e^2}{m_1 R_{op}} \sum_{n, J} \frac{g_J^{-2}}{k_J + n^2} (N_{en} - N_{n0} \delta_{n0} \delta_{J0}) e^{in\theta} + v_{00}^2 \quad (6)$$

Решение этого уравнения в предположении о малой глубине модуляции ($\epsilon \ll 1$) можно выбрать в виде

$$N_0 = N_{00} (1 + \epsilon \cos k\theta) \quad (7)$$

что соответствует линейному приближению по ϵ решения уравнения (6), причем глубина модуляции при заданном k определяется параметрами пучка. В общем случае в уравнении (6) следует включить внешние поля, которые можно выбрать так, чтобы компенсировать высшие гармоники по k .

Используя формулу (7), получаем в линейном приближении по ϵ

$$v_0 = v_{00} (1 - \epsilon \cos k\theta) \quad (8)$$

$$\bar{\epsilon}_0 = -\epsilon \frac{km_1 v_0^2}{2\pi e R} \sin k\theta. \quad (8)$$

Рассмотрим нелинейные колебания, возникающие в таком пучке, обусловленные эффектом отряпательной массы. При этом оказывается удобным перейти к лагранжевым переменным: t и ψ /8/, где $\psi(t, \theta)$ определяется из уравнений

$$\frac{1}{R_{op}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{N}{N_{00}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{Nv}{N_{00}}. \quad (10)$$

Функция ψ остается постоянной вдоль траектории частиц, кроме того, как видно из формулы (10), уравнение непрерывности (1) выполняется автоматически.

Учитывая формулы (10), а также уравнение (3) в стационарном состоянии, волновое уравнение (3) можно представить в виде, удобном для последующих вычислений:

$$\Delta(\bar{\epsilon}_\theta - \bar{\epsilon}_{\theta_0}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{\epsilon}_\theta - \bar{\epsilon}_{\theta_0}) = \frac{4\pi e N_{00} Q}{R_{op}^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{R_{op}^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \times \quad (11)$$

$\times (\psi - \psi_0).$

Ограничимся далее рассмотрением продольных волн, для которых $\Delta_{\perp} \bar{\epsilon}_\theta \ll \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_\theta}{R_{op}^2 \partial \theta^2}$, тогда, пренебрегая малым членом в уравнении (11), получим

$$\bar{\epsilon}_\theta = \bar{\epsilon}_{\theta_0} + 4\pi e N_{00} Q (\psi - \psi_0). \quad (12)$$

После усреднения по поперечному сечению камеры S получим

$$\bar{\bar{\epsilon}}_0 = \bar{\bar{\epsilon}}_0 + 4\pi e N_{00} \bar{\epsilon}_0 (\psi - \psi_0), \quad (13)$$

где

$$\bar{\epsilon}_0 = \sum_J \bar{\epsilon}_J^2 = \int_S Q^2 dS.$$

Таким образом, продольные волны в пучке с точностью до различия в знаке массы частиц и фактора $\bar{\epsilon}_0$, учитывающего наличие камеры, описываются теми же уравнениями, что и параметрическое возбуждение волн в модулированных пучках /8/.

Следуя методу работы /8/, с учетом указанных отличий представим смещение частиц в пучке θ в виде

$$\theta = \theta_0 + \delta\theta. \quad (14)$$

Здесь θ_0 — стационарное смещение частиц пучка:

$$\theta_0 = \frac{\psi + v_{00}t}{R_{op}} + \frac{\epsilon}{k} \operatorname{sink} \left(\frac{\psi + v_{00}t}{R_{op}} \right), \quad (15)$$

а $\delta\theta$ — смещение, связанное с нелинейными колебаниями. Изменение $\delta\theta$ во времени дается уравнением

$$\frac{d^2 \delta\theta}{dt^2} + \frac{2\pi\Omega_0^2}{\omega_{00}^2} \delta\theta = \frac{2\pi\epsilon\Omega_0^2}{k\omega_{00}^2} \left(\frac{k^2\omega_{00}^2}{2\pi\Omega_0^2} - 1 \right) [\sin kr - \sin(kr + \delta\theta)], \quad (16)$$

где использованы обозначения

$$r = \frac{\psi + v_{00}t}{R_{op}}; \quad \Omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N_{00} \epsilon_0}{m_1}; \quad \omega_{00}^2 = \frac{v_{00}^2}{R_{op}^2}.$$

Из последнего уравнения, в частности, следует, что при $m_1 < 0$ и отсутствии модуляции пучка ($\epsilon = 0$) развивается продольная неустойчивость с инкрементом $|\Omega_0|$, что эквивалентно ленгмювским колебаниям частиц с отрицательной массой.

Далее, пусть параметры пучка выбраны таким образом, что выполняются неравенства

$$\frac{2\pi|\Omega_0^2|}{\omega_{00}^2 k^2} \ll 1, \quad \frac{\epsilon}{k} \ll 1. \quad (17)$$

Тогда, применяя к уравнению (16) метод усреднения Н.Н. Боголюбова^{/7/}, получаем условие динамической стабилизации продольных волн в модулированных пучках, а именно: квадрат глубины модуляции ϵ^2 должен быть больше $\frac{4\pi|\Omega_0^2|}{\omega_{00}^2}$. Условие устойчивости, совпадающее с найденным, может быть также получено при выполнении условий (17) из линеаризованного уравнения (16), которое имеет вид уравнения Матье^{/8/}. Из неравенства (18) и предположения о малости ϵ следует, что проведенное рассмотрение справедливо только для пучков малой плотности

$$\frac{4\pi|\Omega_0^2|}{\omega_{00}^2} \ll 1. \quad (18)$$

Учитывая, что в ультрарелятивизме $\frac{d\omega}{dE} = -\frac{\omega}{(p+1)E}$ (p — показатель поля)^{/5/}, неравенство (18) запишем в виде

$$\frac{(4\pi)^2 r_0^2 R_{op}^2 \bar{N}}{(p+1)\gamma} \ll 1, \quad (19)$$

где r_0 — классический радиус электрона; $\bar{N} = N_{00} \epsilon_0$ — приблизительно совпадает с плотностью частиц в пучке, т.к. $\epsilon_0 = \frac{1}{S}$, $\gamma = \frac{E}{E_0}$, E_0 — энергия покоя частицы. Из этой формулы, в частности, следует, что допустимая плотность увеличивается с ростом энергии частиц пучка.

Автор благодарен Я.Б. Файнбергу за постановку задачи, В.Д. Шангро, О.И. Яркому и М.Л. Иовновичу за обсуждение работы.

Л и т е р а т у р а

1. M.Q.Barton and C.E.Nielsen. Proceedings of the International Conference on High Energy Accelerators. Brookhaven, 193, 1961.
2. R.A.Dory. Journal of Nuclear Energy: part C, v.6, 513 (1964).
3. И.М. Самойлов и А.А. Соколов. ЖТФ, XXXV, 2021, 1965.
4. П.Л. Капица. ЖЭТФ, 21, 588 (1981).
5. C.E.Nielsen, A.M.Sessler and K.R.Symon. Proceedings of the International Conference on High Energy Accelerators, Geneva, 239, 1959.
(Перевод в сб. "Накопление релятивистских частиц". Госатомиздат, М., 1963).
6. В.Д. Шапиро. Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза, Киев, Наукова думка, 4, 175 (1965).
7. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М., 1958.
8. В.В. Владимиров. ДАН, 162, 785 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
7 апреля 1966 г.