

С 345 е 1

Б-817

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2649-2



А. Г. Бонч-Осмоловский, Э. А. Перельштейн,
Н. Б. Рубин, С. Б. Рубин, О. И. Ярковой

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ
МЁЛЛЕРОВЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ
В ТЕОРИИ УСКОРИТЕЛЕЙ

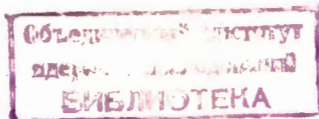
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1966

4294/3 29

А. Г. Бонч-Осмоловский, Э. А. Перельштейн,
Н. Б. Рубин, С. Б. Рубин, О. И. Ярковой

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ
МЕЛЛЕРОВЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ
В ТЕОРИИ УСКОРИТЕЛЕЙ



Общие вопросы, связанные с введением и использованием неинерциальных систем отсчета, разработаны в литературе сравнительно мало; обычно упоминание о таких системах можно встретить лишь при изложении принципа эквивалентности в общей теории относительности^{/1/}

В некоторых работах^{/2.} можно найти утверждение, что применение неинерциальных систем не приводит к упрощению решения физических задач; не отмечалась также и возможность получения более ясной картины физики явлений при выборе определенной координатной системы достаточно широкого класса. С другой стороны, как при рассмотрении общетеоретических вопросов, так и в конкретных задачах широко используется прием перехода в инерциальную сопутствующую систему отсчета, в которой мгновенные характеристики выглядят проще, чем в лабораторной. Распространение этого метода на динамические процессы в общем случае ускоренных движений, происходящих в течение интервалов времени, когда энергия частиц существенно меняется, недопустимо.

В последнее время при решении целого ряда конкретных физических задач применялись неинерциальные координатные системы, при этом весьма успешно. В этой связи следует отметить работы Рорлиха^{/3/}, Брэдбери^{/4/}. Изложение некоторых вопросов теории неинерциальных систем отсчета имеется в мало известной у нас книге Меллера^{/5/}, который еще в своей работе^{/6/}, посвященной разбору парадокса часов, указал на преобразования координат, приводящие, в частности, к равноускоренным системам отсчета.

В настоящей работе ставится цель продемонстрировать на ряде конкретных примеров, часть из которых представляет и самостоятельный физический интерес, продуктивность методики использования неинерциальных систем отсчета с точки зрения как упрощения, при некоторых предположениях, математической стороны дела, так и получения более ясной физической картины соответствующих явлений.

По причинам, изложенным выше, принципиальная сторона дела и математические выкладки разбираются достаточно подробно.

§ 1. Преобразования координат и неинерциальные системы отсчета

Идея перехода в собственную систему координат в общих чертах состоит в следующем: пусть имеется произвольным образом движущаяся частица или группа частиц, любым образом объединенных вокруг некоторого центра – вообще произвольное, но связанное образование. Тогда можно осуществлять переход в систему координат, связанную с частицей или выделенным центром (который в дальнейшем назовем условно движущимся центром), при этом в силу общей ковариантности законов природы существо физических процессов не меняется, конкретное же описание их может, при определенных условиях, оказаться более простым и наглядным. В основном, как будет показано ниже, эти условия сводятся к требованию нерелятивистского характера движения в неинерциальной (собственной) системе отсчета. Такой прием вносит упрощение особенно в тех случаях, когда имеется релятивистская направленная скорость системы частиц как целого.

В дальнейшем буквой I обозначается некоторая выделенная (лабораторная) инерциальная система координат $I = (X^0 = cT, X^1 = X, X^2 = Y, X^3 = Z)$ буквой $S = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ – мгновенная инерциальная система покоя, т.е. лоренцова система координат, в которой в данный момент времени T скорость движущегося центра равна нулю. Обе системы будем считать галилеевыми, т.е. метрика в них задается сигнатурой $(+---)$.

Собственную систему координат (вообще говоря, неинерциальную), в которой центр покоится все время, будем обозначать $R = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. В случае равномерного и прямолинейного движения центра системы S и R совпадают.

Как известно, в общей теории относительности на преобразования координат, а вместе с ними и на свойства системы отсчета накладывается фактически единственное ограничение физического характера, а именно, требование, чтобы такая система отсчета могла быть физически реализуемой. Иначе говоря, скорость любой точки системы отсчета относительно выделенной инерциальной системы в любой момент времени должна быть меньше c (скорость света в вакууме) и в новой системе *должна* быть причинное описание событий.

Пусть преобразования к произвольной системе координат R задаются уравнениями:

$$x^i = x^i(X^k), \quad X^i = X^i(x^k). \quad (1.1)$$

Интервал в новой системе

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k; \quad i, k = 0, 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

причем компоненты g_{ik} метрического тензора связаны с $X^i(x^k)$ следующим образом

$$g_{ik} = g_{ki} = \frac{\partial X^0}{\partial x^i} \frac{\partial X^0}{\partial x^k} - \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^k} . \quad (1.3)$$

Здесь и дальше греческие индексы пробегают значения от 1 до 3, латинские от 0 до 3.

Как нетрудно показать [1], указанные выше требования означают, что на компоненты метрического тензора и, следовательно, преобразования координат, должны быть наложены следующие ограничения:

$$g_{00} > 0, \quad g_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0 . \quad (1.4)$$

Зададим движение центра в системе I уравнениями:

$$x_c^i = \phi^i(\tau_c) , \quad (1.5)$$

где x_c^i - координаты движущегося центра в системе I, τ_c - собственное время. Запись движения в форме (1.5) означает следующее: в обычных трехмерных обозначениях траектория частицы характеризуется тремя функциями $X_c(\tau)$, $Y_c(\tau)$, $Z_c(\tau)$.

Если ввести собственное время

$$\tau_c = \int_0^\tau \frac{d\Gamma}{\Gamma_c(\Gamma)} , \quad \Gamma_c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_c^2}{c^2}}} , \quad (1.6)$$

где V_c - скорость центра относительно системы I, а затем выразить отсюда $\Gamma(\tau_c)$, то мировую линию центра можно характеризовать четырьмя функциями (1.5), где

$$\begin{aligned} \phi^0(\tau_c) &= c\tau_c = c \int_0^{\tau_c} \Gamma_c(\Gamma) d\xi ; & \phi^1 &= X_c(\Gamma(\tau_c)) ; \\ \phi^2 &= Y_c(\Gamma(\tau_c)) , & \phi^3 &= Z_c(\Gamma(\tau_c)) . \end{aligned} \quad (1.7)$$

В дальнейшем все эти зависимости будем представлять просто как в (1.5), в том числе будем писать $\Gamma(\tau)$, а не $\Gamma(\Gamma(\tau))$. Функции (1.5) не независимы. Действительно, вводя 4-скорость центра

$$U_c = \frac{d\phi^i}{d\tau_c} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{V_c^2}{c^2}}}, \frac{V_c^i}{\sqrt{1 - \frac{V_c^2}{c^2}}} \right) \quad (1.8)$$

и учитывая, что

$$(U_c^0)^2 - (U_c^V)^2 = c^2, \quad (1.9)$$

получим:

$$\phi^0(r_c) = c \int_0^{r_c} \sqrt{1 + \frac{(\dot{\phi}^V(r_c))^2}{c^2}} = c \int_0^{r_c} \Gamma_c(\xi) d\xi, \quad (1.10)$$

$$\Gamma_c = \sqrt{1 + \frac{(U_c^V)^2}{c^2}}. \quad (1.11)$$

Точкой обозначаем дифференцирование по собственному времени r_c .

Поставим цель найти систему координат $R = (x^i) = (ct, x, y, z)$ — собственную систему координат движущегося центра — такую, что она непрерывно следует за движущимся центром, находящимся в ее начале, при этом ориентация пространственных осей неизменя во времени относительно системы I и система R является жесткой. Последнее требование по определению означает, что расстояние между двумя любыми фиксированными точками этой системы не изменяется во времени для наблюдателя, покоящегося в ней.

Рассмотрим сопутствующую систему координат $S = (x^{i'})$, определяемую как инерциальная мгновенная система покоя, в которой скорость движущегося центра равна нулю в общем случае лишь в один определенный момент времени T . Преобразование координат и времени от системы I к системе S можно записать в виде:

$$x^{i'} = a^i_k X^k, \quad (1.12)$$

a^i_k — матрица лоренцова преобразования.

Обратное преобразование

$$X^i = \bar{a}^i_k x^{k'}, \quad \bar{a}^i = a^{-1}. \quad (1.13)$$

В частном случае преобразования Лоренца без поворота, который только и будет нас интересовать, коэффициенты преобразования имеют вид:

$$a^{\nu}_{\mu} = \bar{a}^{\mu}_{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} + \frac{\Gamma_c - 1}{(U_c^V)^2} U_c^{\nu} U_c^{\mu}, \quad (1.14)$$

$$a^0_0 = \bar{a}^0_0 = \frac{U_c^0}{c} = \Gamma_c; \quad a^0_{\nu} = \bar{a}^{\nu}_0 = -\frac{U_c^{\nu}}{c}; \quad \bar{a}^{\nu}_0 = \bar{a}^0_{\nu} = \frac{U_c^{\nu}}{c}.$$

Здесь U_c^i есть 4-скорость системы S относительно I , которая по определению сопутствующей системы равна 4-скорости движущегося центра в данный момент времени.

В еще более частном случае специального преобразования Лоренца, когда отлична

от нуля только одна из составляющих скорости, например, U_c^1 , формулы (1.14) приводятся к следующим:

$$\alpha_1^1 = \bar{\alpha}_1^1 = \Gamma_c; \quad \alpha_2^2 = \alpha_3^3 = \bar{\alpha}_2^2 = \bar{\alpha}_3^3 = 1; \quad \alpha_0^0 = \alpha_1^0 = -\frac{U_c^1}{c} = -\frac{V_c}{c} \Gamma_c; \quad (1.15)$$

$$\bar{\alpha}_0^1 = \bar{\alpha}_1^0 = \frac{V_c}{c} \Gamma_c; \quad \alpha_0^0 = \alpha_0^0 = \Gamma_c.$$

Коэффициенты α_k^i и $\bar{\alpha}_k^i$ удовлетворяют соотношениям ортогональности:

$$\alpha_\ell^i \bar{\alpha}_k^j = \alpha_k^\ell \bar{\alpha}_i^j = \delta_k^i. \quad (1.16)$$

Приведем формулы преобразования ко- и контравариантных составляющих 4-вектора:

$$A_i^{\prime} = \alpha_k^i A_k; \quad A^i = \bar{\alpha}_k^i A_k^{\prime}; \quad A_i^{\prime} = \bar{\alpha}_i^k A_k; \quad A_i = \alpha_i^k A_k^{\prime}. \quad (1.17)$$

Напомним также, что в системах с принятой нами сигнатурой

$$A^0 = A_0 \quad \text{и} \quad A^{\nu} = -A_{\nu}. \quad (1.18)$$

Преобразование к сопутствующей системе координат в форме (1.12)–(1.13) является однородным, т.е. фиксирует равенство скоростей системы и центра в определенный момент времени; что касается пространственного положения центра, то он, вообще говоря, не совпадает с началом координат в S .

Потребуем, чтобы в любой момент времени T (в I) движущийся центр попадал в начало координат сопутствующей системы S (каждый раз новой) в начальный момент времени в \bar{S} , т.е. $t^{\prime}=0$. Это соответствует непрерывному сдвигу начала координат и отсчета времени сопутствующих систем, и преобразования (1.12)–(1.13) могут быть записаны теперь следующим образом:

$$x_i^{\prime} = \alpha_k^i (X^k - \phi^k(\tau_c)), \quad (1.19)$$

$$X^i = \phi^i(\tau_c) + \bar{\alpha}_k^i x_k^{\prime}. \quad (1.20)$$

Здесь $\phi^i(\tau_c)$ заданы формулами (1.5). Функциональная зависимость ϕ^i от τ_c в (1.19) и (1.20) отражает тот факт, что для каждого момента времени сдвиг начала координат и времени в S разный.

Если рассматривать все многообразие сопутствующих систем для заданного движения центра, то коэффициенты α_k^i и $\bar{\alpha}_k^i$ в (1.19) и (1.20) можно считать функциями собственного времени движущегося центра (точнее говоря, они зависят от τ_c как от параметра). Эта зависимость определяется в (1.14) или (1.15) функциями $U_c^i(\tau_c)$, при этом $\alpha_k^i(\tau_c)$ и $\bar{\alpha}_k^i(\tau_c)$ удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям, вид которых наиболее просто получается с помощью бесконечно-малых преобразований Лоренца. Соответствующий вывод дан в приложении. Они таковы:

$$\frac{d a_{\ell k}^1}{d \tau_c} = -a_{\ell}^1 \eta_{\bullet k}^{\ell}, \quad (1.21)$$

$$\frac{d \bar{a}_{k c}^1}{d \tau_c} = \bar{a}_{k}^{\ell} \eta_{\bullet \ell}^1, \quad (1.22)$$

Тензор $\eta_{\bullet k}^1$ равен

$$\eta_{\bullet k}^1 = \frac{\dot{U}_c^1 U_{k c} - U_c^1 \dot{U}_{k c}}{c^2}, \quad \dot{U}_c^1 = \dot{\phi}^1(\tau_c), \quad \dot{U}_c^1 U_{1 c} = 0. \quad (1.23)$$

Собственную (мёллерову) систему координат $R=(x^i)$ определим следующим образом: в момент времени $x^0 = 0$ пространственные координаты сопутствующей и собственной систем совпадают, временная координата системы R равна собственному времени движущегося центра:

$$x^0 = 0, \quad x^{\nu} = x^{\nu'}, \quad x^0 = c t = c \tau_c. \quad (1.24)$$

Тогда преобразования к собственной системе в форме (1.20) будут иметь вид:

$$X^i = \phi^i(t) + \bar{a}_{\nu}^i x^{\nu}. \quad (1.25)$$

Что касается мёллеровых преобразований, обратных (1.25), то из (1.19) в общем случае – без задания конкретного вида функций $\phi^i(t)$, определяющих движение центра, получить их в разрешенном относительно всех x^i виде невозможно ($x^0 = ct = c\tau_c$ входит в правую часть (1.19)). Однако это не приводит к затруднениям при любых вычислениях, связанных с переходом к собственной системе, и в конкретных случаях обращение преобразований (1.25) всегда может быть указано.

Вычислим интервал ds в собственной системе:

$$ds^2 = dX^i dX_i = (dX^0)^2 - (dX^{\nu})^2 \quad (1.26)$$

Используя (1.22), имеем:

$$dX^i = (U_c^i + x^{\nu} \bar{a}_{\nu}^i \eta_{\bullet \ell}^1) dt + \bar{a}_{\nu}^i dx^{\nu}. \quad (1.27)$$

Так как $\bar{a}_{\nu}^{\ell} U_{\ell c} = 0$ в силу равенства нулю пространственных компонент 4-скорости в сопутствующей системе, то

$$\bar{a}_{\nu}^{\ell} \eta_{\bullet \ell}^1 = -\frac{1}{c^2} \dot{U}_{\nu c}^1 U_c^1. \quad (1.28)$$

Здесь точка означает дифференцирование по t и

$$\dot{U}_{\nu c}^1 = \bar{a}_{\nu}^{\ell} \dot{U}_{\ell c} \quad (1.29)$$

представляют собой пространственные компоненты 4-ускорения центра в сопутствующей системе. Учитывая (1.28), переписываем выражение для dX^i :

$$dX^i = U_c^i \left(1 - \frac{x^{\nu} \dot{U}_{\nu c}^1}{c^2}\right) dt + \bar{a}_{\nu}^i dx^{\nu}. \quad (1.30)$$

Подставляя (1.30) в (1.26), окончательно получим:

$$ds^2 = c^2 \left(1 + \frac{x^\nu \dot{U}_{\nu'}^{\nu'}}{c^2} \right)^2 dt^2 - (dx^\nu)^2 \quad (1.31)^x$$

Так как в общем случае $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$, то отсюда находим вид метрического тензора в собственной системе координат, определенной преобразованиями (1.25):

$$g_{00} = \left(1 + \frac{x^\nu \dot{U}_{\nu'}^{\nu'}}{c^2} \right)^2, \quad g_{0\nu} = 0, \quad g_{\alpha\alpha} = -1 \quad (1.32)$$

Таким образом, пространственная метрика в собственной системе является евклидовой и не зависит от времени, т.е. система координат обладает свойством "жесткости" в смысле, определенном выше. Такого рода системы ($g_{0\nu} = 0$) называются "время-ортонормальными" и для них элемент пространственного расстояния равен просто $\sqrt{dx^\nu dx^\nu}$.

Время, показываемое стандартными часами, покоящимися в какой-либо точке пространства x^ν системы R , — собственное или истинное время точки r_0 может быть сразу определено при известной метрике системы R . Для покоящихся часов в определенной точке пространства $dx^\nu = 0$ и

$$dr_0 = \frac{1}{c} ds = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 = dt \left(1 + \frac{x^\nu \dot{U}_{\nu'}^{\nu'}}{c^2} \right). \quad (1.33)$$

В начале координат системы $R(x^\nu = 0)$ промежуток истинного времени равен промежутку собственного времени центра, как это и должно быть

$$dr_0 = dt = dr_c.$$

Интервал собственного времени движущегося в собственной системе объекта можно определить следующим образом:

$$dr = \frac{1}{c} ds = dt \sqrt{\left(1 + \frac{x^\nu \dot{U}_{\nu'}^{\nu'}}{c^2} \right)^2 - \left(\frac{\dot{x}^\nu}{c} \right)^2}$$

или, обозначая $\left(\frac{\dot{x}^\nu}{c} \right)^2 = v^2$ — квадрат 3-скорости объекта в собственной системе координат ^{xx)},

$$dr = dt \sqrt{g_{00} - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{g_{00}} dt}{\gamma}, \quad (1.34)$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

x) В выражении $x^\nu \dot{U}_{\nu'}^{\nu'}$ подразумевается суммирование, хотя оба значка ν находятся сверху, иначе $x^\nu \dot{U}_{\nu'}^{\nu'} = -x^\nu \dot{U}_{\nu'}^{\nu'}$.

xx) Таковой скоростью иногда называется величина \bar{v} , где дифференцирование выполняется не по t , а по r_0 — собственному времени данной точки. Тогда $\bar{v} = \frac{v}{\sqrt{g_{00}}}$, $dr = dt \sqrt{g_{00}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2}}$, $\gamma = \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2} \right)^{-1/2}$

γ - аналог релятивистского фактора для мёллеровой системы координат.

Если ускорение центра равно нулю, то (1.34) переходит в обычное выражение интервала собственного времени инерциальных систем отсчета.

Сделаем одно существенное замечание. Преобразования (1.25) имеют ограниченную область применимости, так как на гиперплоскости $1 + \frac{x^\nu \dot{U}_c^\nu}{c^2} = 0$ нарушаются условия (1.4). Это означает, что использование системы координат, определенной согласно (1.25), физически оправдано при значениях пространственных координат, удовлетворяющих условию:

$$\frac{x^\nu \dot{U}_c^\nu}{c} \neq -1. \quad (1.35)$$

Собственная система координат, определенная выше, может применяться при произвольном движении центра. В дальнейшем мы будем рассматривать важный частный случай произвольного прямолинейного движения центра вдоль одной из осей координат системы I , например, $X^1 = X$.

Тогда имеем

$$\phi^1(t) = (\phi^0(t), \phi^1(t), 0, 0). \quad (1.36)$$

4-скорость центра системы R относительно I в момент времени t будет

$U_c^1 = (\dot{\phi}^0, \dot{\phi}^1, 0, 0)$. Так как квадрат U_c^1 равен c^2 , то движение можно охарактеризовать одной произвольной функцией $w(t)$ вместо двух $\phi^0(t)$, $\phi^1(t)$.

Положим

$$U_c^0 = \dot{\phi}^0(t) = c \operatorname{ch} w(t); \quad U_c^1 = \dot{\phi}^1(t) = c \operatorname{sh} w(t). \quad (1.37)$$

Пусть при $t=0$ ($T=0$) скорость центра равна нулю $V_c^\nu(0)=0$, $w(0)=0$, $\phi^0(0)=0$, положим также $\phi^1(0) = X_c(0) = 0$. Тогда

$$\phi^0(t) = c \int_0^t \operatorname{ch} w(t) dt, \quad \phi^1(t) = c \int_0^t \operatorname{sh} w(t) dt. \quad (1.38)$$

Коэффициенты преобразования $a_k^1(t)$ и $\bar{a}_k^1(t)$ даются формулами (1.15); легко проверить, что они удовлетворяют уравнениям (1.21)-(1.22) ($r_c \equiv t$).

В обозначениях (1.37)

$$\frac{V_c^1}{c} = \operatorname{th} w(t), \quad \Gamma_c = \operatorname{ch} w(t) \quad (1.39)$$

и матрица \bar{a}_k^1 выглядит так (a_k^1 определяются из (1.15)):

$$\alpha_{ik}^{-1} = \begin{pmatrix} \text{chw}, & \text{shw}, & 0, & 0 \\ \text{shw}, & \text{chw}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Верхний индекс соответствует строке матрицы.

Преобразования (1.25) будут таковы:

$$\begin{aligned} X &= c \int \text{shw}(t) dt + x \text{chw}(t), \\ Y &= y, \quad Z = z, \\ T &= \int \text{chw}(t) dt + \frac{x}{c} \text{shw}(t). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Преобразования дифференциалов координат выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} dX &= dx \text{chw}(t) + cd t \left(1 + \frac{x \dot{w}}{c} \right) \text{shw}(t), \\ dT &= dx \frac{\text{shw}(t)}{c} + dt \left(1 + \frac{x \dot{w}}{c} \right) \text{chw}(t). \end{aligned} \quad (1.42)$$

и

$$\begin{aligned} dx &= dX \text{chw}(t) - cd T \text{shw}(t), \\ dt &= -dX \frac{\text{shw}(t)/c}{1 + \frac{x \dot{w}}{c}} + dT \frac{\text{chw}(t)}{1 + \frac{x \dot{w}}{c}}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Формулы (1.42) и (1.43) дают выражения для частных производных $\frac{\partial x^i}{\partial x^k}$ и $\frac{\partial x^i}{\partial x^k}$ и позволяют, тем самым, производить преобразования 4-векторов и тензоров к собственной системе координат.

В обозначениях (1.37) выражения для интервала и дифференциала собственного времени (1.31) и (1.33) имеют вид:

$$ds^2 = c^2 \left(1 + \frac{x \dot{w}}{c} \right)^2 dt^2 - dx^\nu dx^\nu \quad (1.44)$$

$$d\tau_0 = dt \left(1 + \frac{x \dot{w}}{c} \right). \quad (1.45)$$

Если мы положим в формулах (1.42) или (1.43) $dx^\nu = 0$, то можно вычислить скорость любой фиксированной точки системы R относительно системы I:

$$V(t) = \frac{dX}{dT} = \text{th} w(t). \quad (1.46)$$

Скорость (1.46) выражена в переменных системы R и она не зависит от x , т.е. скорость различных точек системы R в один момент времени t одна и та же (система жесткая!).

Ту же скорость (1.46) можно выразить в переменных системы I , и результат будет иной в том смысле, что в один и тот же момент времени T скорости различных точек системы R относительно I разные. Это ясно уже из того, что одновременные события в I будут разновременными в R , и по (1.46) величины скоростей различаются.

Выражение V через X и T можно получить, исключая t из формул (1.41), тогда траектория любой точки x системы R в системе I будет:

$$X = f(x, T), \quad (1.47)$$

и скорость $\frac{dX}{dT}$ для определенной точки x уже будет зависеть от x , $V = V(x, T)$. Таким образом, для наблюдателя в системе I система R не является жесткой. Можно получить формулу, аналогичную обычному лоренцову сокращению масштабов. Положим в (1.42) $dT = 0$ (измерение движущегося масштаба производится в один момент времени T), тогда его длина в системе I будет равна:

$$dX = \frac{dx}{ch w(t)} = dx \sqrt{1 - th^2 w} = dx \sqrt{1 - \frac{V^2(x, T)}{c^2}}. \quad (1.48)$$

Последнее равенство в (1.48) показывает, что в отличие от обычного лоренцова сокращения разные части системы R претерпевают различное по величине сокращение.

Рассмотрим частный случай "гиперболического" или равноускоренного движения, когда ускорение центра в соответствующей системе постоянно. Обозначив последнее через a (ускорение вдоль оси x), имеем

$$\dot{U}_c^{i1} = (0, a, 0, 0). \quad (1.49)$$

Отсюда получаем вид функции $w(t)$

$$\dot{U}_c^{i1} = a \cdot 1 U_c^{i1'} = a ch w(t)$$

и (см. (1.37)) $\dot{w}(t) = \frac{a}{c}$.

Так как мы положили $w(0) = 0$, то

$$w(t) = \frac{at}{c}, \quad (1.50)$$

Преобразования (1.41) теперь будут:

$$\begin{aligned} X &= \left(\frac{c^2}{a} + x \right) ch \frac{at}{c} - \frac{c^2}{a}, \\ Y &= y, \quad Z = z, \\ T &= \frac{1}{c} \left(\frac{c^2}{a} + x \right) sh \frac{at}{c}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Теперь нетрудно написать и обратные преобразования

$$x = \begin{cases} -\frac{c^2}{a} + \sqrt{\left(X + \frac{c^2}{a}\right)^2 - c^2 T^2}, & x > -\frac{c^2}{a} \\ -\frac{c^2}{a} - \sqrt{\left(X + \frac{c^2}{a}\right)^2 - c^2 T^2}, & x < -\frac{c^2}{a} \end{cases} \quad (1.52)$$

$$t = \frac{at}{c} = \frac{cT}{X + \frac{c^2}{a}} \quad (1.53)$$

Исключая t из формул (1.51), получаем траекторию некоторой точки x системы R в системе I (1.47):

$$X = \sqrt{\left(\frac{c^2}{a} + x\right)^2 + c^2 T^2} - \frac{c^2}{a} \quad (1.54)$$

и скорость точки x относительно системы I (входящая в (1.48)):

$$V(x, T) = \frac{dX}{dT} \Big|_{x = \text{const}} = \frac{c^2 T}{\sqrt{\left(\frac{c^2}{a} + x\right)^2 + c^2 T^2}} \quad (1.55)$$

Точка $x=0$ (центр) совершает движение

$$X_c = \frac{c^2}{a} (\sqrt{1 + \frac{a^2 T^2}{c^2}} - 1) = \frac{c^2}{a} (\Gamma_c - 1), \quad (1.56)$$

которое совпадает с движением тела и с массой покоя m_0 под действием постоянной приложенной силы (в системе I), равной $m_0 a$.

Вычислим еще 4-ускорение центра в системах I и R . В системе I оно равно (см. (1.15) и (1.17)):

$$\Lambda^i = \bar{a}_k^i a^{k'} = \bar{a}_k^i \dot{U}_c^{k'} = \left(\frac{V_c}{c} \Gamma_c a, \Gamma_c a, 0, 0 \right). \quad (1.57)$$

В системе R a^i вычисляется при помощи (1.43) и (1.50)

$$a^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^k} \Lambda^k = (0, a, 0, 0), \quad (1.58)$$

т.е. совпадает с ускорением в сопутствующей системе (1.49). Так как система R -неинерциальная, то формула для 4-ускорения имеет вид:

$$a^i = \frac{D u^i}{dr} = \frac{d u^i}{dr} + \left(\Gamma_{kl}^i u^k u^l \right)_c, \quad (1.59)$$

где u_c^i - 4-скорость центра в системе R, она равна $u_c^i = (c, 0, 0, 0)$

Γ_{kl}^i - символы Кристоффеля. Положим в (1.59) $i=1$. Вычисляя с помощью метрического тензора (1.32) величину $(\Gamma_{00}^1)_c = \frac{a}{c^2}$ и сравнивая (1.58) и (1.59) для $i=1$, находим, что $\frac{d^2 u_c^1}{dt^2} = 0$, то есть трехмерное ускорение центра равно нулю, как и должно быть. Легко показать, что это же справедливо и для любой другой фиксированной точки системы R.

Рассмотрим в заключение этого раздела приближенный вид преобразований к неинерциальной системе для практически интересного случая малых ускорений (или малой окрестности движущегося центра) и нерелятивистских скоростей в собственной системе. Итак, пусть движение в собственной системе $x = x(t)$ таково, что выполнены следующие два условия

$$\frac{x \dot{w}}{c} \ll 1 \quad (1.60)$$

и

$$\frac{\dot{x}}{c} \ll 1. \quad (1.61)$$

Будем исходить из дифференциальных соотношений (1.42) и (1.43). Разделим первое соотношение (1.42) на второе и используем (1.60)-(1.61), тогда получим приближенно:

$$\frac{1}{c} \frac{dX}{dT} = \text{th } w(t(x)) + \frac{\dot{x}}{c \text{ch}^2 w(t(x)) (1 + \frac{x \dot{w}}{c})}. \quad (1.62)$$

Поскольку последний член (1.62) уже первого порядка малости, в нем можно пренебречь $\frac{x \dot{w}}{c}$ по сравнению с единицей и заменить $w(t(x))$ на $w(t(0))$, при этом $\text{ch}^2 w(t(0)) = \Gamma_c^2(T)$ ($T \equiv T_c$). Функцию $\text{th } w(t(x))$ разложим в ряд по степеням x :

$$\text{th } w(t(x)) = \text{th } w(t(0)) + \left. \frac{\dot{w}}{\text{ch}^2 w(t)} \frac{dt}{dx} \right|_{x=0} x + \dots$$

Отношение $\frac{dt}{dx}$ найдем из (1.43), положив там $dT=0$ (все величины в (1.62) вычисляются для фиксированного, одного и того же момента времени в лабораторной системе)

$$\left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=0} = - \frac{\text{th } w(t)}{c}.$$

Теперь из (1.62) получаем, учитывая (см. (1.39)), что $\text{th } w(t(0)) = \frac{V_c(T)}{c}$:

$$\frac{dX}{dT} = \frac{dX_c}{dT} + \frac{\dot{x}}{\Gamma_c^2(T)} - \frac{x \dot{w}}{c \Gamma_c^2} V_c. \quad (1.63)$$

Второе уравнение (1.42) дает связь дифференциалов dT и dt :

$$\frac{dt}{dT} = \frac{1}{\text{ch } w(t(x)) \left(1 + \frac{x}{c} \text{th } w + \frac{x \dot{w}}{c}\right)} . \quad (1.84)$$

В нулевом приближении, при учете (1.80) и (1.81), получаем просто

$$\frac{dt}{dT} = \frac{1}{\text{ch } w(t)} = \frac{1}{\Gamma_c(T)} . \quad (1.85)$$

С помощью (1.65) легко проинтегрировать (1.83), в результате чего имеем

$$X = X_c + \frac{x(t)}{\Gamma_c(t)} , \quad (1.86)$$

$$t = \int_0^T \frac{dT}{\Gamma_c(T)} . \quad (1.87)$$

Можно показать, что формула (1.86) верна и при $\frac{x}{c} \approx 1$. В пределе $\dot{w} = 0$ Γ_c не зависит от времени и формулы (1.86)– (1.87) совпадают с формулами перехода к сопутствующей системе. При взятом нами нулевом приближении по $\frac{x \dot{w}}{c}$ полученные выражения дают уточнения для перехода в собственную систему и справедливы для любого интервала времени ΔT .

§ 2. Движение частицы в заданных полях

Проиллюстрируем изложенные в предыдущем разделе общие методы введения неинвариальных систем координат на двух примерах.

1. Релятивистский гармонический осциллятор

Под этим названием мы подразумеваем следующую физическую систему: во внешнем поле движется центр сил с произвольной скоростью; в сопутствующей ему системе координат к нему притягивается по квазиупругому закону некоторая частица – собственно осциллятор. В общем случае внешнее поле, ускоряющее центр сил, действует и на осциллятор, причем характер воздействия на центр и осциллятор может быть различным.

Такая модель может служить основой для описания ряда физических явлений в теории ускорителей, если пренебречь влиянием ускорения осциллятора на квазиупругий закон сил в сопутствующей системе. Это влияние, естественно, определяется конкретной

связью осциллятора и центра сил и при практически достижимых ускорениях весьма мало. Например, в случае заряженного осциллятора можно пренебречь реакцией излучения осциллятора в сопутствующей системе.

Мы проведем решение задачи о движении осциллятора в мёллеровой системе координат при следующих несущественных предположениях: масса центра сил гораздо больше массы собственно осциллятора, так что движение центра определяется только внешними силами и прием для определенности, что внешние силы, действующие на центр сил и осциллятор, постоянны, т.е. движение центра является гиперболическим, с постоянным ускорением в сопутствующей системе, равным a . Перейдем в мёллерову систему координат (1.51), центр которой совпадает с центром сил, и запишем уравнение движения осциллятора в собственной системе координат. Ковариантное уравнение движения в неинерциальной системе координат выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = \frac{1}{m_0} \hat{f}^i. \quad (2.1)$$

Здесь τ - собственное время частицы (осциллятора), m_0 - масса покоя частицы в сопутствующей системе координат

и символы Кристоффеля равны:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{ni} \left(\frac{\partial g_{nk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} \right). \quad (2.2)$$

В нашем случае $\Gamma_{00}^1 = \frac{a}{c^2} \left(1 + \frac{ax}{c^2} \right)$; $\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{a}{c^2 \left(1 + \frac{ax}{c^2} \right)}$.

$$(2.3)$$

В формуле (2.2) \hat{f}^i - 4-сила в собственной системе координат, действующая на частицу-осциллятор, в нашем случае она определяется суммой взаимодействий с внешним полем и полем центра сил. Исходными для вычисления \hat{f}^i являются выражения квазиупругой силы в сопутствующей центру системе координат и постоянной внешней силы в лабораторной системе (1).

Квазиупругая 3-сила (для наиболее интересного случая колебаний в направлении движения осциллятора как целого):

$$f'_x = -k x', \quad f'_y = f'_z = 0. \quad (2.4)$$

Здесь k - некоторый постоянный коэффициент, x' - расстояние осциллятора в сопутствующей системе от центра сил. Подчеркнем, что отсчет положения осциллятора x' сделан в момент времени $t'_0 = 0$.

Так как продольная составляющая 3-силы при преобразовании Лоренца не меняется, то в лабораторной системе 3-сила будет

$$F_x = -k \frac{X - \phi^1}{\Gamma_c}, \quad F_y = F_z = 0. \quad (2.5)$$

ϕ^1 - дается (1.56), причем здесь X и ϕ^1 соответствуют различным моментам времени T и $T_c = T(\tau_c)$, Γ_c взято в момент времени, соответствующий положению центра, т.е. T_c . 4-сила Минковского тогда будет иметь вид:

$$\hat{F}^1 = -k \Gamma \frac{X - \phi^1}{\Gamma_c}, \quad \hat{F}^2 = \hat{F}^3 = 0, \quad \hat{F}^0 = -k \Gamma \frac{X - \phi^1}{\Gamma_c} \frac{dX}{c dT}. \quad (2.6)$$

В этих выражениях Γ и $V = \frac{dX}{dT}$ - релятивистский фактор и скорость осциллятора в лабораторной системе.

Теперь с помощью (1.43) мы можем найти x -составляющую квазиупругой силы в собственной системе координат:

$$\hat{f}_{упр.}^1 = \frac{\partial x^1}{\partial X^k} \hat{F}^k = -k \frac{\Gamma}{\Gamma_c} (X - \phi^1) [ch w(t) - \frac{V}{c} sh w(t)]. \quad (2.7)$$

Сила на осциллятор со стороны внешнего поля в лабораторной системе постоянна, мы запишем ее в следующем виде:

$$\hat{f}_a^{вн} = m_0 h a, \quad (2.8)$$

где h - некоторый постоянный коэффициент, a , как и ранее, ускорение центра в сопутствующей системе. Тогда, производя преобразование, аналогичное предыдущему, в собственной системе находим:

$$\hat{f}_{вн}^1 = m_0 h a \Gamma [ch w(t) - \frac{V}{c} sh w(t)]. \quad (2.8)$$

Введем теперь основное предположение о нерелятивистском характере движения осциллятора в собственной системе.

В силу (1.42)

$$\begin{aligned} & \frac{V}{c} = \frac{\sqrt{g_{00}} sh w(t) + \frac{X}{c} ch w(t)}{\sqrt{g_{00}} ch w(t) + \frac{X}{c} sh w(t)}, \quad g_{00} = \left(1 + \frac{ax}{c^2}\right)^2. \\ \text{или, вводя } \bar{V} = \frac{V}{c}, & \\ & \frac{\bar{V}}{c} = \frac{sh w(t) + \frac{\bar{V}}{c} ch w(t)}{ch w(t) + \frac{\bar{V}}{c} sh w(t)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Тогда
$$\operatorname{ch} w(t) - \frac{v}{c} \operatorname{sh} w(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} w(t) + \frac{\bar{v}}{c} \operatorname{sh} w(t)}$$
 (2.11)

и

$$\Gamma = [1 - \frac{1}{c^2} (\frac{dx}{dt})^2]^{-1/2} = (1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2})^{-1/2} [\operatorname{ch} w(t) + \frac{\bar{v}}{c} \operatorname{sh} w(t)].$$
 (2.12)

Считая, что

$$\frac{\bar{v}}{c} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\dot{x}}{c} \ll 1$$
 (2.13)

и учитывая (см. (1.39)), что $\Gamma_c = \operatorname{ch} w(t)$, получим для суммарной силы на осциллятор в собственной системе координат

$$\hat{f}^1 = -k \frac{X - \phi^1}{\Gamma_c} + m_0 h a = -k x + m_0 h a.$$
 (2.14)

X и ϕ^1 взяты в один момент времени t в системе R , поэтому (см. (1.41), $\frac{X - \phi^1}{\Gamma_c} = x$. Таким образом, при условии (2.13) продольная сила не преобразуется при преобразовании Меллера.

С учетом (2.3) и (2.14) уравнение для продольных колебаний осциллятора в собственной системе ((2.1) при $i = 1$) имеет вид:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + a \left(1 + \frac{ax}{c^2}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = -\frac{k}{m_0} x + ha.$$
 (2.15)

При выполнении (2.13) $\tau = \tau_0$ и, используя (1.45), окончательно получим

$$\frac{d^2 x}{d\tau_0^2} + \frac{a}{1 + \frac{ax}{c^2}} + \frac{k}{m_0} x = ha.$$
 (2.16)

В уравнении (2.16) удобно перейти к независимой переменной t - временной координате собственной системы. Связь t и τ_0 дается в случае гиперболического движения формулой (см. (1.45) и (1.50)):

$$d\tau_0 = dt \left(1 + \frac{ax}{c^2}\right),$$

и вместо уравнения (2.16) получим, отбросив малые члены, согласно (2.13):

$$\ddot{x} + \frac{k}{m_0} x \left(1 + \frac{ax}{c^2}\right)^2 + a \left(1 + \frac{ax}{c^2}\right) = ha \left(1 + \frac{ax}{c^2}\right)^2$$
 (2.17)

Мы предположим, что выполняется условие (см. (1.60)):

$$\frac{a|x|_{\max}}{c^2} \ll 1,$$
 (2.18)

где x_{\max} - максимальное отклонение осциллятора от центра.

Ограничиваясь линейными членами по $\frac{ax}{c^2}$, находим

$$\ddot{x} + \Omega'^2 x + \frac{2k}{m_0} \frac{a}{c^2} x^2 = a(h-1), \quad (2.19)$$

$$\Omega'^2 = \frac{k}{m_0} + \frac{a^2}{c^2} (1-2h). \quad (2.20)$$

Таким образом, если $\Omega'^2 > 0$, уравнение (2.19) описывает колебания ангармонического осциллятора, причем отклонение от гармоничности вызвано ускорением. В нулевом приближении, при малом ускорении, когда в (2.18) заключено сильное неравенство, уравнение колебаний в собственной системе будет просто

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = a(h-1), \quad \Omega^2 = \frac{k}{m_0}. \quad (2.21)$$

В этом случае осциллятор совершает в собственной системе чисто гармонические колебания около смещенного положения равновесия (при $h \neq 1$). Смещение положения равновесия вызвано влиянием сил инерции; при $h = 1$, когда ускорение центра и осциллятора внешним полем в сопутствующей системе одинаково, это влияние отсутствует, и осциллятор колеблется около центра сил.

В лабораторной системе движение осциллятора задается $x(T)$, оно определяется формулами (1.66) и (1.67), причем последняя для гиперболического движения дает:

$$t = \frac{c}{a} \operatorname{arsh} \frac{aT}{c}. \quad (2.22)$$

Эти результаты могут быть получены и непосредственно путем решения уравнения движения осциллятора в лабораторной системе, но значительно более громоздким путем.

2. Движение частицы в линейном ускорителе

Рассмотрим теперь переход в мёллерову систему применительно к хорошо известному случаю движения частиц в линейном ускорителе на бегущей волне. При этом сравним приближения, обычно используемые в лабораторной системе, с упрощениями в мёллеровой системе для случая, когда взаимные преобразования уравнений можно осуществлять заменой (1.66)–(1.67). Как будет видно, приближения, используемые в лабораторной системе, найдут себе аналоги в мёллеровой системе, причем последние будут иметь ясный физический смысл. Кроме того, более простой вид уравнений в мёллеровой системе даст возможность сразу выявить преимущества и недостатки того или иного режима настройки параметров ускорителя.

Для перехода в мёллерову систему выберем кратчайший путь. Запишем сначала уравнения в лабораторной системе, затем преобразуем силы к ускоренной системе и подставим их в соответствующие этой системе уравнения движения.

Такой путь даст также возможность обсудить в одном месте все интересующие нас вопросы движения в исходной лабораторной системе координат.

Рассмотрение будем проводить для приосевого движения частиц в линейном ускорителе на бегущей ξ -волне. Примем, что поперечная фокусировка обеспечивается квадрупольными линзами. Поперечное движение частиц в лабораторной системе считается как обычно нерелятивистским:

$$\frac{\Gamma v^x}{c} \approx \frac{\Gamma v^y}{c} \ll 1. \quad (2.23)$$

Уравнениями движения в лабораторной системе тогда будут:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} (m_0 \Gamma v^x) &= -X \left[eG(Z) \frac{v^x}{c} + \frac{e}{2} K(Z) \left(1 - \frac{v^x}{c} \frac{v^\Phi(T,Z)}{c} \right) \xi_0 \sin \Phi \right] = F^1, \\ \frac{d}{dT} (m_0 \Gamma v^y) &= -Y \left[-eG(Z) \frac{v^z}{c} + \frac{e}{2} K(Z) \left(1 - \frac{v^z}{c} \frac{v^\Phi(T,Z)}{c} \right) \xi_0 \sin \Phi \right] = F^2, \\ \frac{d}{dT} (m_0 \Gamma v^z) &= e \xi_0 \cos \Phi = F^3, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\Phi(T, Z) = \int_0^T \Omega(\bar{T}) d\bar{T} - \int_0^Z K(\bar{Z}) d\bar{Z} + \Phi_0.$$

Здесь ξ_0 - амплитудное значение электрического поля ускоряющей волны, $K(Z)$ - модуль волнового вектора, направленного по оси Z , $\Omega(T)$ - частота волны, в общем случае зависящая от времени, (обычно же $\Omega(T) = \text{const}$), $\Phi_0 = \text{const}$ - начальная фаза. Волна замедленная: фазовая скорость волны

$$v^\Phi(T, Z) = \frac{\Omega(T)}{K'(Z)} \ll c. \quad (2.25)$$

При получении (2.24) предполагалось, что выполняются условия применимости геометрической оптики

$$\frac{1}{\Omega^2} \frac{d\Omega}{dT} \ll 1, \quad \frac{1}{K^2} \frac{dK}{dZ} \ll 1. \quad (2.26)$$

$G(Z)$ - знакопеременная функция, такая, что декартовы компоненты поперечного магнитного поля квадрупольных линз соответственно по осям X и Y есть $G(Z)Y$ и $G(Z)X$.

Движение равновесной частицы, которую в дальнейшем будем считать "движущимся центром", определяется так, что для нее $X_c = Y_c = 0$, $\Phi = \Phi_c = \text{const}$, или

^{x)} В данном случае ускорение считается происходящим по оси $Z = X^3$.

$$v_c = \frac{dZ_c}{dT} = V^\Phi(T, Z). \quad (2.27)$$

Следовательно, уравнения равновесного движения имеют вид:

$$\frac{d}{dT} (\Gamma_c v_c) = \frac{e \xi_0}{m_0} \cos \Phi_c, \quad \Gamma_c = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_c/c)^2}}$$

$$X_c = Y_c = 0,$$

$$\Phi_c = \int_0^T \Omega(T) dT - \int_0^{Z_c} K(Z) dZ + \Phi_0 = \text{const}.$$

Если $\xi_0 = \text{const}$, то (2.28) описывает "гиперболическое" движение с постоянным ускорением в сопутствующей системе

$$a = \frac{e \xi_0}{m_0} \cos \Phi_c. \quad (2.29)$$

Последний случай мы в дальнейшем и будем иметь в виду.

Обсудим несколько уравнения (2.24) движения произвольной частицы с физической стороны и выделим приближения, которые обычно используют.

Из третьего уравнения (2.24) при рассмотрении в лабораторной системе координат получают обычно уравнение фазовых колебаний частиц в линейных ускорителях. При этом оказывается, что устойчивой равновесной фазой является $\Phi_c < 0$, удовлетворяющая (2.28). Поперечные силы во втором и третьем уравнениях (2.24) состоят из двух частей, причем обе части пропорциональны отклонениям от положения равновесия. Первые части $-X e G(Z) \frac{V^Z}{c}$, $-Y e G(Z) \frac{V^Z}{c}$, как указывалось, связаны с квадрупольной фокусировкой, а вторые обязаны поперечному "дефокусирующему" действию высокочастотного поля волны^{х)} ускоряющей частицы и дающей продольную фокусировку. Характерной особенностью уравнений (2.24) является то, что продольное уравнение не зависит от поперечных координат, в то время как поперечное движение зависит от продольной координаты Z как от параметра. В частности, эта зависимость входит и в выражение для Φ . Если рассматриваются малые продольные колебания, то в поперечных уравнениях заменяют везде $Z \rightarrow Z_c$, $\Phi \rightarrow \Phi_c$. $V^Z \rightarrow v_c = V^\Phi(T, Z_c)$. Следует подчеркнуть, что дефокусирующие высокочастотные силы не постоянны (даже при $Z \rightarrow Z_c$), так как зависят от изменяющихся в процессе ускорения величин v_c , V^Φ . Зависимость $G(Z)$, то есть расстановка фокусирующих и дефокусирующих по каждому

^{х)} При $\Phi = \Phi_c < 0$ величина $\sin \Phi_c < 0$, и соответствующие силы всегда положительны.

из направлений (X, Y) линз определенной "силы" подбирается из соображений устойчивости поперечных колебаний. Основным малым параметром теории движения частиц в линейном ускорителе ^{1/1} является

$$\epsilon = \frac{e \bar{\epsilon}_0 \lambda_{\max} \cos \Phi_c}{2\pi m_0 c^2 \bar{V}_c} \ll 1, \quad \lambda_{\max} = \frac{2\pi c}{\bar{\Omega}}, \quad (2.30)$$

где λ_{\max} - длина волны в свободном пространстве при $\Omega = \bar{\Omega}$ - наименьшей частоте из выбранного диапазона; \bar{V}_c - наименьшая скорость равновесной частицы; определим также $K_c = \frac{\bar{\Omega}}{\bar{V}_c}$. Учитывая выражение для $\cos \Phi_c$ в (2.28), естественно записать (2.30) в виде двух неравенств

$$\epsilon_1 = \frac{\bar{\Omega} \bar{V}_c \Gamma_c^3}{\bar{\Omega} \bar{V}_c} \frac{1}{K_c} \left| \frac{dK_c}{dZ} \right| \ll 1, \quad \epsilon_2 = \frac{\bar{\Omega} \bar{V}_c \Gamma_c^3}{\bar{\Omega} \bar{V}_c} \frac{1}{\bar{\Omega}^2} \left| \frac{d\bar{\Omega}}{dT} \right| \ll 1 \quad (2.31)$$

В силу этих условий приближение геометрической оптики (2.28) годится всюду.

При аналитическом рассмотрении движения частиц в линейном ускорителе в лабораторной системе получение фазового уравнения и вычисление на основе его возможных продольных размеров устойчивых сгустков связано с предположениями, что

$$\frac{\Gamma_c^2 (V^Z - \bar{V}_c)}{V_c} \ll 1, \quad \epsilon_1 \frac{\bar{\Omega} \bar{V}_c}{\bar{\Omega} V_c} \frac{K_c |Z - Z_{cl\max}|}{\Gamma_c} \ll 1, \quad \epsilon_2 \frac{\bar{\Omega} \bar{V}_c}{\bar{\Omega} V_c} \frac{K_c |Z - Z_{cl\max}|}{\Gamma_c} \ll 1. \quad (2.32)$$

Если эти условия выполняются на начальной стадии ускорения, то в дальнейшем при $\Omega = \text{const}$ последние два неравенства (2.32) выполняются автоматически. Первое же условие (2.32) при достаточно больших Γ_c может нарушаться, так как левая часть будет расти при увеличении Γ_c . Однако это утверждение основывается на расчетах, выполненных с учетом требования адиабатичности фазового движения

$$\frac{1}{\bar{\Omega}_{||}^2} \frac{d\bar{\Omega}_{||}}{dT} \ll 1, \quad \bar{\Omega}_{||} = \sqrt{\frac{e \bar{\epsilon}_0 \bar{\Omega} \sin(-\Phi_c)}{m_0 V_c \Gamma_c^3}}, \quad (2.33)$$

где $\bar{\Omega}_{||}$ - частота малых фазовых $(Z - Z_c)$ -колебаний. При больших Γ_c левая часть неравенства (2.33) растет как $\Gamma_c^{1/2}$ для $\Omega = \text{const}$ и при очень больших Γ_c это неравенство нарушается. В этой области аналитическое рассмотрение затруднено.

Перейдем теперь к мёллеровым уравнениям. Зная 3- силу в лабораторной системе $F = (F^1, F^2, F^3)$ (см. (2.24)), нетрудно записать 4-силу $F^{\hat{1}}$, а затем преобразовать ее к ускоренной системе согласно соотношению $f^{\hat{1}} = \frac{\partial x^{\hat{1}}}{\partial x^k} F^k$. При этом нужно воспользоваться формулой (1.43), где $\text{ch} \frac{at}{c} = \Gamma_c$, $\text{sh} \frac{at}{c} = \frac{\Gamma_c V_c}{c} = \frac{U_c}{c}$.

Далее, выразив 4-скорость частицы $U^{\hat{1}}$, входящую в $F^{\hat{1}}$ через мёллерову 4-скорость $u^{\hat{1}}$ (также согласно преобразованию 4-векторов), найдем

$$\begin{aligned}
 \hat{f}^0 &= \frac{u^3}{\sqrt{g_{00}}c} F^T + \frac{U_c^0}{\sqrt{g_{00}}c} \left(\frac{u^1}{c} F^1 + \frac{u^2}{c} F^2 \right), \\
 \hat{f}^1 &= F^1 \left(\frac{U_c^0}{c^2} \sqrt{g_{00}} u^0 + \frac{U_c}{c^2} u^3 \right), \\
 \hat{f}^2 &= F^2 \left(\frac{U_c^0}{c^2} \sqrt{g_{00}} u^0 + \frac{U_c}{c^2} u^3 \right), \\
 \hat{f}^3 &= \sqrt{g_{00}} \frac{u^0}{c} F^3 - \frac{U_c}{c} \left(\frac{u^1}{c} F^1 + \frac{u^2}{c} F^2 \right),
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

где, очевидно, $u^1 = u^x$, $u^2 = u^y$, $u^3 = u^z$, $u^0 = c\tau$.

В (2.34) 4-скорость равновесной частицы U_c^i рассматривается уже как функция мёллера времени t . Чтобы получить окончательные необходимые нам выражения для \hat{f}^i , надо еще выразить величины, входящие в лабораторные 3-силы F^a , именно $V^Z = V^3$, $G(Z)$, $K(Z)$, $\Phi(T, Z)$, через мёллеровы координаты, время и скорости. Так как $V^a = cU^a/U^0$, то

$$\begin{aligned}
 V^Z &= \frac{(U_c \sqrt{g_{00}} u^0 + U_c^0 u^3)c}{U_c^0 \sqrt{g_{00}} u^0 + U_c u^3}, & V^x &= \frac{c^2 u^1}{U_c^0 \sqrt{g_{00}} u^0 + U_c u^3}, \\
 V^y &= \frac{c^2 u^2}{U_c^0 \sqrt{g_{00}} u^0 + U_c u^3}.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$G(Z) = G(Z_c + \Gamma_c z), \quad K(Z) = K(Z_c + \Gamma_c z). \tag{2.36}$$

Здесь Z_c как и Γ_c (см. выше) есть функции от t .

Займемся теперь фазой $\Phi(T, Z) = \int_0^T \Omega(\tilde{T}) d\tilde{T} - \int_0^Z K(\tilde{Z}) d\tilde{Z}$. Поскольку $\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{Z}} = \frac{\partial K}{\partial \tilde{T}} = 0$, то выражение для Φ можно представить в виде контурного интеграла по любой из кривых \mathcal{L} на плоскости (\tilde{T}, \tilde{Z}) , соединяющей точки $(0, 0)$ и (T, Z) , то есть

$$\Phi = \int_{\mathcal{L}} \Omega(\tilde{T}) d\tilde{T} + [-K(\tilde{Z})] d\tilde{Z} + \Phi_0. \tag{2.37}$$

Отобразим плоскость (\tilde{T}, \tilde{Z}) на (t, z) согласно мёллеровым преобразованиям и заменим

$$\int_{\mathcal{L}} \Omega(\tilde{T}) d\tilde{T} = \int_{\mathcal{L}} \Omega(\tilde{T}(t, z)) \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} dz \right),$$

$$K(\bar{Z}) d\bar{Z} = K(\bar{Z}(\bar{t}, \bar{z})) \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{t}} d\bar{t} + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right).$$

Пусть контур \bar{C} переходит в ℓ , а точки $(0,0)$, (T, Z) в $(0,0)$, (t, z) . Тогда

$$\Phi = \Phi_0 + \int_{\ell} \left[\Omega(\bar{T}(\bar{t}, \bar{z})) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} - K(\bar{Z}(\bar{t}, \bar{z})) \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} + [\Omega(\bar{T}(\bar{t}, \bar{z})) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} - K(\bar{Z}(\bar{t}, \bar{z})) \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{t}}] d\bar{t} \right].$$

Легко проверить, что этот контурный интеграл также не зависит от пути ℓ . Возьмем такой путь: из точки $(0,0)$ — в точку $(t,0)$ по прямой $\bar{z}=0$ и далее — из точки $(t,0)$ в точку (t,z) — по прямой $\bar{t}=t$. Тогда получим вместо последнего контурного интеграла сумму двух обычных:

$$\begin{aligned} \Phi = \int_0^{\pi} \left[\frac{U_c(t)}{c^2} \Omega(\bar{T}_c(t) + \frac{U_c(t)}{c^2} \frac{\bar{z}}{z}) - \Gamma_c(t) K(Z_c(t) + \Gamma_c(t) \frac{\bar{z}}{z}) \right] d\bar{z} + \\ + \int_0^t \left[\Gamma_c(\bar{t}) \Omega(\bar{T}_c(\bar{t})) - U_c(\bar{t}) K(Z_c(\bar{t})) \right] d\bar{t} + \Phi_0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Мы воспользовались здесь мёллеровыми преобразованиями в форме

$$\begin{aligned} T = T_c(t) + \frac{U_c(t)}{c^2} z, \quad T_c(t) = T(t, z) \Big|_{z=0} = \int_0^t \Gamma_c dt, \\ Z = Z_c(t) + \Gamma_c(t) z, \quad Z_c(t) = Z(t, z) \Big|_{z=0} = \int_0^t U_c dt. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Учитывая выражения (2.39) для T_c и Z_c , легко привести весь интеграл по \bar{t} в (2.38) вместе с аддитивной постоянной Φ_0 к форме

$$\int_0^{T_c(t)} \Omega(\bar{T}) d\bar{T} - \int_0^{Z_c(t)} K(\bar{Z}) d\bar{Z} + \Phi_0 = \Phi_c = \text{const}. \quad (2.40)$$

Формальное выражение Φ_c в (2.40) отличается от приведенного в (2.28) лишь тем, что Z_c рассматривается теперь как функция мёллерова времени t , в соответствии с чем вместо T для равновесной частицы стоит $T_c(t)$. Итак,

$$\Phi = \Phi_c + \int_0^z \left[\frac{U_c(t)}{c^2} \Omega(\bar{T}_c(t) + \frac{U_c(t)}{c^2} \frac{\bar{z}}{z}) - \Gamma_c(t) K(Z_c(t) + \Gamma_c(t) \frac{\bar{z}}{z}) \right] d\bar{z}. \quad (2.41)$$

Если теперь подставить (2.35), (2.36), (2.41), а также $V^{\Phi} = V_c(t)$ в \vec{F} (см. (2.24)), то мёллеровы силы (2.34) будут выражены лишь через параметры ускоренной системы.

Далее надо использовать уравнения движения (2.1), которые для пространственных координат в нашем случае могут быть записаны так:

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma \dot{x}}{\sqrt{g_0}} \right) = \frac{1}{m_0} f^1,$$

$$\frac{y}{\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{y \dot{y}}{\sqrt{g_{00}}} \right) = \frac{1}{m_0} \hat{f}^2,$$

$$\frac{y}{\sqrt{g_{00}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{y \dot{z}}{\sqrt{g_{00}}} \right) + \frac{a}{\sqrt{g_{00}}} \gamma^2 = \frac{1}{m_0} \hat{f}^3.$$

(2.42)

Здесь учтено, что $dr = \frac{\sqrt{g_{00}} dt}{\gamma}$ (см. (1.34)) и то, что единственный отличный от нуля символ Кристоффеля в этих уравнениях есть $\Gamma_{00}^1 = \sqrt{g_{00}} \frac{a}{c^2}$.

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - \frac{1}{c^2 g_{00}} (\dot{x}^a)^2}.$$

(2.43)

Будем анализировать наши уравнения при определенных приближениях, аналогично тому, как это делается при рассмотрении в лабораторной системе.

1) Примем, что в ускоренной системе все частицы движутся нерелятивистски.

$$\gamma \approx 1, \quad \frac{u^a}{c} \approx \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\dot{x}^a}{c} \ll 1, \quad \frac{u^0}{c} \approx \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}.$$

(2.44)

Формулы (2.35) при указанных предположениях дают

$$V^z = v_c + \frac{\dot{z}}{\sqrt{g_{00}} \Gamma_c^2}, \quad V^x = \frac{\dot{x}}{\sqrt{g_{00}} \Gamma_c}, \quad V^y = \frac{\dot{y}}{\sqrt{g_{00}} \Gamma_c}.$$

(2.45)

Здесь важно подчеркнуть, что в мёллеровой системе продольная скорость частиц — также нерелятивистская. Сравним первые условия (2.45) и (2.32). При этом учтем, что в (2.45) все величины отнесены к одному моменту t . В лабораторной же системе разным точкам $Z \neq Z_c$ будут отвечать разные моменты T . Первая формула (2.45) при отнесении к единому лабораторному времени T будет выглядеть так

$$V^z(T) = v_c(T) + \frac{1}{\Gamma_c^2(T)} \left(\frac{\dot{z}}{\sqrt{g_{00}}} - \frac{z a V_c(T)}{c^2} \right) \quad (\text{сравните с формулой (1.63)}).$$

Следовательно, неравенство $\Gamma_c^2 \{V^z(T) - v_c(T)\} / v_c \ll 1$ (первое условие (2.32)), введенное для лабораторной системы, эквивалентно требованию, чтобы в ускоренной системе продольная скорость была нерелятивистской (2.44), а также чтобы $\frac{az}{c^2} \ll 1$ (последнее условие мы особо введем ниже). Для поперечных скоростей (2.45) имеет аналог (2.23), причем (2.45) опять "слабее" "лабораторного условия".

В приближении (2.44) 4-силы в мёллеровой системе принимают вид:

$$\hat{f}^0 = 0, \quad \hat{f}^1 = \frac{1}{c} U_c^0 F^1, \quad \hat{f}^2 = \frac{1}{c} U_c^0 F^2, \quad \hat{f}^3 = F^3. \quad (2.46)$$

$$2) \text{ Положим } \frac{\Gamma_c |z|}{K_c} \left| \frac{dK}{dZ} \right|_{Z=Z_c(t)} \ll 1, \quad \frac{\Gamma_c |z|}{\Omega_c c} \left| \frac{d\Omega}{dT} \right|_{T=T_c(t)} \ll 1,$$

$$K_c = K(Z_c), \quad \Omega_c = \Omega(T_c). \quad (2.47)$$

Если использовать (2.31), тогда неравенства (2.47) сведутся к требованиям

$$1) \frac{\bar{\Omega} \bar{V}_c}{\Omega_c V_c} \frac{K_c |z|_{\max}}{\Gamma_c^2} \ll 1, \quad (2.48)$$

$$2) \frac{V_c^2}{c^2} \frac{\bar{\Omega} \bar{V}_c}{\Omega_c V_c} \frac{K_c |z|_{\max}}{\Gamma_c^2} \ll 1.$$

В силу (2.47) можно заменить в подынтегральном выражении (2.41)

$\Omega(T_c + \frac{U_c}{c^2} z) \rightarrow \Omega(T_c)$, $K(Z_c + \Gamma_c z) \rightarrow K(Z_c)$. После взятия этого элементарного интеграла получим

$$\Phi = \Phi_c - \frac{K_c}{\Gamma_c} z. \quad (2.49)$$

В основе такой простой связи между разностью фаз равновесной и неравновесной частиц и мёллеровой координатой z неравновесной частицы лежит требование достаточной малости $|z|$ (см. (2.48)). Аналог последних условий при учете того, что $|z|_{\max} = \Gamma_c |Z - Z|_{\text{ст max}}$ есть (2.32).

3) Будем считать, что

$$\epsilon_{00} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{a |z|_{\max}}{c^2} \ll 1, \quad \text{или} \quad \frac{e \bar{\epsilon}_0 \cos \Phi_c}{m_0 c^2} |z|_{\max} \ll 1. \quad (2.50)$$

С учетом (2.30) получим

$$\frac{\epsilon \bar{\Omega} \bar{V}_c |z|_{\max}}{c^2} \ll 1. \quad (2.51)$$

В нерелятивистской области это выполняется в силу (2.48). В релятивистской же области (2.51) будет удовлетворяться всюду только, если $|z|_{\max}$ не растет в процессе ускорения.

В дальнейшем мы еще на этом вопросе остановимся. С учетом взятых приближений на основе (2.42), (2.48), (2.24), (2.38), (2.45), (2.49) уравнения движения запишутся в виде:

$$\ddot{x} + \frac{1}{m_0} \left[e \frac{V_c}{c} \Gamma_c G(Z_c + \Gamma_c z) + \frac{e}{c} \frac{1}{\Gamma_c} K(Z_c + \Gamma_c z) \epsilon_0 \sin \Phi \right] x = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{1}{m_0} \left[-e \frac{V_c}{c} \Gamma_c G(Z_c + \Gamma_c z) + \frac{e}{c} \frac{1}{\Gamma_c} K(Z_c + \Gamma_c z) \epsilon_0 \sin \Phi \right] y = 0 \quad (2.52)$$

$$\ddot{z} + \frac{e \epsilon_0}{m_0} (\cos \Phi_c - \cos \Phi) = 0,$$

(Во избежании недоразумений отметим, что в первом и втором уравнениях (2.52) величины $(Z_c + \Gamma_c z)$ являются аргументами функций G и K , а не множителями).

Рассмотрим третье уравнение (2.52). В нем необходимо выразить либо Φ через z , либо z через Φ . Сделаем сначала последнее. Из (2.48) найдем

$$\dot{z} = -\frac{\Gamma_c}{K_c} \dot{\Phi} - \frac{\Gamma_c}{K_c} \frac{d}{dt} \left(\frac{K_c}{\Gamma_c} z \right). \quad (2.53)$$

Отсутствие в этой формуле постоянной составляющей типа V_c является причиной того, что нам было достаточно учесть лишь линейные члены в (2.48), тогда как в лабораторной системе требуется более "длинное" разложение^{х)}. Вообще надо отметить, что малость продольных скоростей частиц в мёллеровой системе существенно облегчает рассмотрение и получение различных приближенных уравнений.

Дифференцируя (2.53) еще раз, из третьего уравнения (2.52) в используемом приближении получим:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Gamma_c}{K_c} \dot{\Phi} \right) - \dot{\Phi} \frac{\Gamma_c^2}{K_c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{K_c}{\Gamma_c} \right) + \frac{e \epsilon_0}{m_0} (\cos \Phi_c - \cos \Phi) = 0. \quad (2.54)$$

Это - фазовое уравнение в мёллеровой системе. Частота малых фазовых колебаний отсюда

$$\omega_{||} = \sqrt{\frac{e \epsilon_0 \Omega_c \sin(-\Phi_c)}{m_0 V_c \Gamma_c}}. \quad (2.55)$$

При замене независимой переменной t на T , согласно $dt = \frac{dT}{\Gamma_c}$, последнее уравнение, как и должно быть в рассматриваемом приближении (см. (1.66) (1.67)) перейдет в обычное фазовое уравнение лабораторной системы:

х) Кстати, в книге А.Д. Власова /8/ в разложении для $\Phi - \Phi_c$ в лабораторной системе присутствует лишь член $-K_c (Z - Z_c)$ типа нашего, из-за чего в дальнейшем в этой работе получается неточное выражение для коэффициента при $d\Phi/dT$ в фазовом уравнении (правильное выражение для этого коэффициента получено в /7/, у нас - это уравнение (2.56), приведенное дальше, в котором для обычного варианта $\frac{d\Omega}{dT} = 0$).

$$\frac{d^2\Phi}{d\Gamma^2} + \frac{d\Phi}{d\Gamma} \left[-\frac{2}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\Gamma} + \frac{1}{V_c} \frac{dV_c}{d\Gamma} (2 + 3\Gamma_c^2 \frac{V_c^2}{c^2}) \right] + \frac{e\epsilon_0\Omega}{m_0 V_c \Gamma_c^3} (\cos\Phi - \cos\Phi_c) = 0, \quad (2.56)$$

Наиболее "красивым" в мёллеровой системе является уравнение малых фазовых z -колебаний

$$\ddot{z} + \omega_{\parallel}^2 z = 0. \quad (2.57)$$

В лабораторной системе, если обозначить $\xi = Z - Z_c$, вместо (2.57) будет

$$\frac{d^2\xi}{d\Gamma^2} + 3\Gamma_c^2 \frac{V_c^2}{c^2} \cdot \frac{1}{V_c} \frac{dV_c}{d\Gamma} \frac{d\xi}{d\Gamma} + \Omega_{\parallel}^2 \xi = 0. \quad (2.58)$$

Вид (2.57) предпочтительнее. Из него, в частности, сразу очевидно, при каких параметрах линейного ускорителя, входящих в ω_{\parallel} z -колебания частиц в мёллеровой системе будут затухать, раскачиваться или сохранять свою амплитуду. Поведение же ξ -колебаний устанавливается по формуле $\xi = \frac{z}{\Gamma_c}$.

Вернемся теперь к условию (2.51). Если частота высокочастотного поля в линейном ускорителе $\Omega = \text{const}$, то, как нетрудно установить из (2.57) и (2.55), продольный размер сгустка в мёллеровой системе растет при больших Γ_c пропорционально $\Gamma_c^{3/4}$. Следовательно, условие (2.51), будучи выполненным вначале, при достаточно больших Γ_c может нарушиться. Но это безусловно справедливо лишь при выполнении требования адиабатичности

$$\frac{1}{\omega_{\parallel}^2} \frac{d\omega_{\parallel}}{dt} \ll 1. \quad (2.59)$$

Из (2.55) легко установить, что при больших Γ_c величина $\frac{1}{\omega_{\parallel}^2} \frac{d\omega_{\parallel}}{dt}$ растет пропорционально Γ и, следовательно, адиабатичность также может нарушиться.

Рассмотрение при нарушении (2.59) надо проводить особо. Нам представляется, что соответствующий более детальный анализ в этом случае и учет процессов излучения приведут к тому, что при больших Γ_c условие (2.51) для устойчивых образований частиц будет удовлетворяться всюду (во всяком случае параметр ϵ_{00} не сможет оказаться близким к 0). Впрочем, если менять частоту волны во времени ($\Omega(\Gamma) \neq \text{const}$), то, как далее будет показано, возможен случай, когда (2.51) и (2.59) выполняются всегда с очевидностью.

Уравнения поперечного движения в ускоренной системе выпишем для случая, когда z -колебания малы и не влияют на таковые в перпендикулярной плоскости:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{1}{m_0} \left[e \frac{V_c}{c} \Gamma_c G(Z_c) - \frac{e}{c} \frac{\Omega_c}{\Gamma_c V_c} \epsilon_0 \sin(-\Phi_c) \right] x &= 0, \\ \ddot{y} + \frac{1}{m_0} \left[-e \frac{V_c}{c} \Gamma_c G(Z_c) - \frac{e}{c} \frac{\Omega_c}{\Gamma_c V_c} \epsilon_0 \sin(-\Phi_c) \right] y &= 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \chi^x &= \frac{1}{m_0} \left[e \frac{V_c \Gamma_c}{c} G(Z_c) - \frac{e}{c} \frac{\Omega_c}{\Gamma_c V_c} \mathcal{E}_0 \sin(-\Phi_c) \right] \left[q^x = -\chi^x m_0 \dot{x} \right]; \\ \chi^y &= \frac{1}{m_0} \left[-e \frac{V_c \Gamma_c}{c} G(Z_c) - \frac{e}{c} \frac{\Omega_c}{\Gamma_c V_c} \mathcal{E}_0 \sin(-\Phi_c) \right], \quad q^y = -\chi^y m_0 \dot{y}; \\ q^z &= -\omega_{\parallel}^2 m_0 z. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Тогда будем иметь уравнения "нерелятивистского" вида

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{q^x}{m_0}, \quad \ddot{y} = \frac{q^y}{m_0}, \quad \ddot{z} = \frac{q^z}{m_0}; \\ \ddot{x} + \chi^x(t) \dot{x} &= 0, \quad \ddot{y} + \chi^y(t) \dot{y} = 0, \quad \ddot{z} + \omega_{\parallel}^2 z = 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Рассмотрим один любопытный пример. Предположим, что

1) Частота Ω меняется во времени по закону

$$\frac{\Omega_c}{\Gamma_c V_c} = \text{const} = \bar{K} = \frac{\bar{\Omega}}{V}. \quad (2.83)$$

2) Функция $K(Z)$ такова, что

$$\frac{K_c}{\Gamma_c} = \text{const} = \bar{K} \quad (2.84)$$

(кстати тогда, как и должно быть, $\frac{\Omega_c}{K_c} = V_c$).

3) Магнитные линзы и их "сила" подобраны так, чтобы параметр $V_c \Gamma_c G(Z_c(t))$ являлся точной периодической знакопеременной функцией мёллерова времени t . В этом случае частота продольных колебаний в мёллеровой системе $\omega_{\parallel} = \text{const}$, z - колебания - чисто гармоническое с фиксированной амплитудой, а x и y - колебания описываются точным уравнением Хилла.

Тогда достаточно взять $|z|_{\text{max}} \approx \frac{\Gamma_c}{K_c} = \frac{1}{\bar{K}}$, и условие (2.51) даст $\epsilon \frac{\bar{V}_c^2}{c^2} \ll 1$, что всегда верно. При этом

$$\omega_{\parallel} = \sqrt{\frac{\bar{K} e \mathcal{E}_0 \sin(-\Phi_c)}{m_0}} = \text{const}, \quad (2.85)$$

и условие адиабатичности (2.59) всегда выполняется. Легко показать, что аналогичное условие (2.33) для лабораторной системы в этом случае также всюду^{x)} верно.

x) Конечно, при условии $\sin(-\Phi_c) \neq 0$, иначе автофазировка отсутствует.

Рассмотрим несколько подробнее вопрос о структуре $G(Z_c(t))$ для приведенного примера. Для того чтобы та часть $\chi(t)$, которая связана с квадрупольной фокусировкой, была периодической знакопеременной функцией t , достаточно, например, выбрать $G(t)$ ступенчатой знакопеременной функцией постоянного периода, но такой, что ее "столы" появляются $\approx \frac{1}{V_c \Gamma_c}$. Если это представить в функции лабораторного времени, то будут меняться еще и Γ_c , "периоды" этой функции $= \Gamma_c$, что запишем так: $T_G = \Gamma_c \bar{T}_G$, где $\bar{T}_G = \text{const}$. Можно построить и другую, эквивалентную систему, если учесть известное положение, что при ступенчатых функциях в уравнениях Хилла фокусирующее действие зависит от произведений типа $\sqrt{Q} \Gamma_G$, где Q - высоты "столов". Следовательно, за эквивалентную систему можно взять такую, что $T_G = \bar{T}_G = \text{const}$, а Q растет пропорционально $\frac{\Gamma_c}{V_c}$.

§ 3. Электромагнитное поле заряженных сгустков в меллеровой

системе координат

Для получения общих выражений четырехпотенциала в неинерциальных системах координат будем исходить из известных формул, определяющих четырехпотенциал в инерциальной системе координат /1,9/ (запаздывающие потенциалы)

$$A^i = \int \frac{j^i}{R} d^2 \bar{X}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad \bar{T} = T - R \quad (3.1)$$

(в этой главе здесь и в дальнейшем принимается $c = 1$).

Эти выражения могут быть переписаны в ковариантном виде

$$A^i = 2 \int j^i(\bar{X}^p) \delta(s^2) d^4 \bar{X}, \quad (3.2)$$

где s^2 - квадрат интервала, вычисленного по геодезической, соединяющей точки X^i и \bar{X}^i , т.е. s^2 по определению есть инвариант относительно общих преобразований координат. При этом в инерциальной системе координат интегрирование должно вестись по той области четырехпространства, для которой событие X лежит в будущем относительно \bar{X} , что соответствует запаздывающим потенциалам.

Используя известные правила преобразования векторов, перейдем в произвольную систему, связанную с инерциальной соотношением:

$$X^i = X^i(x^j). \quad (3.3)$$

Тогда четырехпотенциал в этой системе A^i определяется через ток j^i , заданный в этой же системе, следующим образом:

$$A^i(x^k) = 2 \frac{\partial x^i}{\partial \bar{X}^n} \int \frac{\partial \bar{X}^n}{\partial \bar{x}^m} j^m(\bar{x}^p) \delta(s^2) \sqrt{-g(\bar{x}^q)} d^4 \bar{x}. \quad (3.4)$$

Здесь $g(\bar{x}^\alpha)$ — определитель метрического тензора в неинерциальной системе координат. Выполняя в (3.4) интегрирование по \bar{x}^α , получим:

$$A^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial X^a} \int \frac{\partial \bar{X}^n}{\partial \bar{x}^m} j^m(\bar{x}^\alpha) G(\bar{x}^k, \bar{x}^\beta) \sqrt{-g} d^3 \bar{x}, \quad (3.5)$$

где

$$G = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{\partial s^2}{\partial \bar{x}^\alpha}} \quad (3.5a)$$

и везде вместо \bar{x}^α подставляя $\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^k, \frac{m}{x} a)$ — корень уравнения $s^2 = 0$, при нахождении которого учитывается условие запаздывания.

Воспользуемся теперь выражением (3.5) для нахождения четырехпотенциала в мёллеровой системе координат, считая, что ускоренная система координат движется по оси Z , и направления осей координат инерциальной и ускоренной систем совпадают. Тогда, используя преобразования Мёллера (см. формулы 1.41), получим четырехпотенциал в виде:

$$A^0 = \int \left[\frac{h}{h} \operatorname{ch}(w - \bar{w}) j^0 - \frac{1}{h} \operatorname{sh}(w - \bar{w}) j^3 \right] G h d^3 \bar{x} \quad (3.6)$$

$$A^3 = \int \left[\operatorname{ch}(w - \bar{w}) j^3 - h \operatorname{sh}(w - \bar{w}) j^0 \right] G h d^3 \bar{x}$$

$$A^{1,2} = \int j^{1,2} G h d^3 \bar{x}$$

$$h = \sqrt{+g_{00}}.$$

(в этой формуле знаком $\bar{}$ у всех величин отмечаются функции точки \bar{x}^α).

Как видно, (3.6) не зависит от выбора исходной инерциальной системы координат, что, естественно, и должно иметь место.

Следует отметить также, что G по определению инвариантно относительно выбора исходной системы координат.

Перейдем теперь к определению явного вида G . В инерциальной системе координат квадрат интервала, вычисленного по геодезической линии, записывается в виде

$$s^2 = (X^0 - \bar{X}^0)^2 - (X^a - \bar{X}^a)^2.$$

Поскольку s^2 — инвариант, его вычисление сводится к замене переменных в этом выражении. Используя преобразования Мёллера (1.41), получаем

$$s^2 = I_c^2 - I_b^2 + 2 I_c (z \operatorname{sh} w - \bar{z} \operatorname{sh} \bar{w}) - 2 I_b (Z \operatorname{ch} w - \bar{Z} \operatorname{ch} \bar{w}) + 2 z \bar{z} [\operatorname{ch}(w - \bar{w}) - 1] - r^2. \quad (3.7)$$

Здесь

$$r^2 = (z - \frac{z}{\alpha})^2 + (x_1^2 - \frac{x_1^2}{\alpha^2})^2 + (x_2^2 - \frac{x_2^2}{\alpha^2})^2$$

$$I_c(t, \bar{t}) = \int_{\bar{t}}^t \text{ch } w(t) dt$$

$$I_s(t, \bar{t}) = \int_{\bar{t}}^t \text{sh } w(t) dt .$$

Из формул (3.7) и (3.5а) следует, что

$$G = \frac{1}{\bar{h} [I_c \text{ch } \bar{w} - I_s \text{sh } \bar{w} + z \text{sh } (w - \bar{w})]} . \quad (3.8)$$

Заметим, что \bar{t} , входящее в эти формулы, — корень уравнения $s^2 = 0$, выбираемый с ограничением, накладываемым условием запаздывания.

Для равноускоренного движения после интегрирования в I_c и I_s выражение (3.8) можно записать в виде

$$G^{-1} = h \bar{h} \frac{\text{sh } a(t - \bar{t})}{a} ,$$

где $h = 1 + az$. В этом случае удобно представить G как функцию r , решая уравнение

$$s^2 = 2[\text{ch } a(t - \bar{t}) - 1] \frac{h \bar{h}}{a^2} - r^2 = 0$$

относительно $\text{ch } a(t - \bar{t})$

$$G = \frac{1}{r(h \bar{h})^{1/2} \sqrt{1 + \frac{a^2 r^2}{4 h \bar{h}}}} . \quad (3.9)$$

Приведем теперь в качестве иллюстративного примера вычисление четырехпотенциала в меллеровой системе координат для равномерно-заряженного в собственной системе вытянутого по направлению движения сфероида, предполагая, что токи внутри него отсутствуют

$$j^0 = \frac{3eN}{4\pi R^2 h} \sigma \left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{R^2} - \frac{z^2}{\ell^2} \right), \quad j^{1,2,3} = 0, \quad (3.10)$$

где $\sigma(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, R и ℓ — соответственно малая и большая полуоси

сфероида, N — полное число частиц в сгустке.

Формулы (3.6) переписываются для равноускоренного движения в виде

$$A^0 = \int \frac{\hbar^2}{h} \text{cha}(t-t) j^0 G d^3x,$$

$$A^3 = - \int \hbar^2 \text{sha}(t-t) j^0 G d^3x. \quad (3.11)$$

Ограничиваясь рассмотрением поля сфероида на близких расстояниях от него (либо внутри), проведем разложение "функции Грина" G в ряд по малому параметру $\frac{az}{2}$:

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} r^{2n-1} (\hbar\hbar)^{\frac{-2n+1}{2}}. \quad (3.12)$$

Представим теперь $\text{cha}(t-t)$ и $\text{sha}(t-t)$ как функции r в формулах (3.11).

Тогда, с учетом (3.9) и (3.10), получим

$$A^0 = \frac{3eN}{4\pi R^2 \ell h} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} \hbar \left(1 + \frac{a^2 r^2}{2h\hbar}\right) (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} r^{2n-1} (\hbar\hbar)^{\frac{-2n+1}{2}} d^3x$$

(3.13)

$$A^3 = - \frac{3eN}{4\pi R^2 \ell h} a \int_{\mathcal{C}} d^3x = - \frac{eNa}{h},$$

$A^{1,2} = 0$, где \mathcal{C} - объем сфероида.

Как видно из последней формулы, z -ая компонента 4-х потенциала не дает вклада в напряженности поля и может быть обращена в нуль градиентным преобразованием.

Ограничимся далее вычислением полей в области, ограниченной условием $(2az)_{\text{max}} \ll 1$, предполагая, естественно, что размеры сгустка выбраны в соответствии с ним. Тогда, оставляя первые два члена ряда в (3.13), и раскладывая функции h и $\tilde{\text{h}}$ с точностью до членов первого порядка по az , получим

$$A^0 = \frac{3eN}{4\pi R^2 \ell h} \left\{ \int_{\mathcal{C}} \frac{d^3x}{r} + \frac{a}{2} \int_{\mathcal{C}} \frac{(z-z) d^3x}{r} \right\}. \quad (3.14)$$

Первый интеграл в формуле (3.14) дает поле равномерно заряженного сфероида в инерциальной системе координат, второй интеграл определяет добавочные силы, связанные с неинерциальностью системы отсчета.

Приведем результат вычисления этих интегралов для внутренней области сфероида:

$$I_1 = \int_{\mathcal{C}} \frac{d^3x}{r} = \frac{\pi(1-\ell_1^2)\ell^2}{\ell_1^2} \ell_n \frac{1+\ell_1}{1-\ell_1} + \frac{\pi}{\ell_1^2} \left(\frac{1-\ell_1^2}{2\ell_1} \ell_n \frac{1+\ell_1}{1-\ell_1} - 1 \right) (\kappa_1^2 + x_2^2) - \frac{\pi(1-\ell_1^2)}{\ell_1^3} (\ell_n \frac{1+\ell_1}{1-\ell_1} - 2\ell_1) z^2$$

$$I_2 = \int_{\mathcal{C}} \frac{z-z}{r} d^3x = \frac{2\pi(1-\ell_1^2)\ell^2}{\ell_1^2} \left(\frac{1-\ell_1^2}{2\ell_1} \ell_n \frac{1+\ell_1}{1-\ell_1} - 1 \right) z +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi(1-\ell_1^2)}{\ell_1^4} \left(\frac{3-\ell_1^2}{2\ell_1} \ln \frac{1+\ell_1}{1-\ell_1} - 3 \right) (x_1^2 + x_2^2) z - \\
& - \frac{\pi(1-\ell_1^2)^2}{\ell_1^5} \left[\ln \frac{1+\ell_1}{1-\ell_1} - \frac{2\ell_1(3-2\ell_1^2)}{3(1-\ell_1^2)} \right] z^3 \\
\ell_1^2 & = 1 - \frac{R^2}{\ell^2} .
\end{aligned}$$

Как видно из приведенных выше выражений для четырехпотенциала, в собственной системе заряженного сгустка, движущегося равноускоренно, имеется только электростатическое поле.

Излучение в собственной системе отсутствует, что естественно совпадает с аналогичным результатом, полученным в ^{/4/} для равномерноускоренного точечного заряда.

В заключение отметим, что при вычислении полей в собственной системе можно провести разложение четырехпотенциала по малому параметру $2 \alpha \gamma_{\max}$; с другой стороны, можно показать, что в сопутствующей системе координат требования, необходимые для подобного разложения, более жесткие. Это обстоятельство, а также простота получаемых выражений, являются безусловными достоинствами собственной системы.

§ 4. Элементы кинетики и гидродинамики системы заряженных частиц в неинерциальной (мёллеровской) системе координат

1.

Как обычно, состояние частицы определяется совокупностью пространственно-временного положения и импульса; четырехмерный импульс есть

$$p^i = m_0 \frac{dx^i}{dr} = m_0 u^i . \quad (i=0,1,2,3). \quad (4.1)$$

В заданной в пространстве событий системе координат с временной частью метрического тензора $g_{00}(t, x^1, x^2, x^3)$ и пространственной $g_{\alpha\alpha}(x^1, x^2, x^3)$, ($g_{ik}=0, i \neq k$) элемент собственного времени движущейся частицы есть

$$dr = dt \sqrt{g_{00} + \frac{1}{c^2} \sum_{a=1}^3 g_{aa} \dot{x}^a{}^2} = \sqrt{g_{00}} \frac{dt}{\gamma}, \quad (4.2)$$

где

$$\gamma = \left[1 + \frac{1}{c^2} \sum_{a=1}^3 g_{aa} \dot{x}^a{}^2 \right]^{-1/2}. \quad (4.3)$$

Вместо p^i (или соответствующего ковариантного импульса p_i) при рассмотрении движения заряженных частиц часто удобно использовать величины \mathcal{P}_i , канонически сопряженные с переменными x^i . Как известно, обобщенный импульс \mathcal{P}_i вводится с помощью функции Лагранжа, которая при наличии электромагнитного поля, заданного 4-потенциалом $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, имеет следующий вид:

$$L = L(\dot{x}^a, x^i) = -m_0 c^2 \sqrt{g_{00} + \frac{1}{c^2} \sum_{a=1}^3 g_{aa} \dot{x}^a{}^2} + \frac{e}{c} \alpha_1 \frac{dx^1}{dt}. \quad (4.4)$$

Тогда $\mathcal{P}_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = -\frac{m_0 \gamma}{\sqrt{g_{00}}} g_{aa} \dot{x}^a + \frac{e}{c} \alpha_a$

$$\mathcal{P}_0 = -\frac{m_0 c \gamma}{\sqrt{g_{00}}} g_{00} + \frac{e}{c} \alpha_0. \quad (4.5)$$

Величины \mathcal{P}_i связаны соотношением

$$\sum_{i=0}^3 \frac{1}{g_{ii}} (\mathcal{P}_i - \frac{e}{c} \alpha_i)^2 = (m_0 c)^2 \quad (4.6)$$

Уравнения Лагранжа дают

$$\frac{d\mathcal{P}_a}{dt} - \frac{\partial L}{\partial x^a} = \frac{\sqrt{g_{00}}}{\gamma} \frac{d\mathcal{P}_a}{dr} - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{d\mathcal{P}_0}{dt} = \frac{\sqrt{g_{00}}}{\gamma} \frac{d\mathcal{P}_0}{dr} = \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Последнее соотношение в (4.7) - следствие первых трех. В стационарном случае имеет место закон сохранения

$$\mathcal{P}_0 = \text{const}. \quad (4.8)$$

х) В отличие от (1.34), здесь в пространственной области система координат вообще криволинейна, но ортогональна.

При рассмотрении задач кинетики инвариантную бoльцмановскую функцию распределения частиц одного сорта f можно ввести, исходя из инвариантных элементов фазового пространства /10,11,12/.

$$\sqrt{-g} p^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad \text{и} \quad \frac{1}{p^0 \sqrt{-g}} d\mathcal{P}_1 d\mathcal{P}_2 d\mathcal{P}_3 \quad (4.9)$$

в случае обобщенных импульсов и

$$\sqrt{-g} p^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{-g}}{p_0} dp^1 dp^2 dp^3. \quad (4.10)$$

- в случае обычных импульсов - следующим образом: 1)

$$\int f(x^i, \mathcal{P}_\alpha) dx^1 dx^2 dx^3 d\mathcal{P}_1 d\mathcal{P}_2 d\mathcal{P}_3 = \quad (4.11)$$

$$= \int \bar{f}(x^i, p^\alpha) \frac{p^0}{p_0} (-g) dx^1 dx^2 dx^3 dp^1 dp^2 dp^3 = N$$

- определяет полное число частиц в системе, 2) 4-х векторы

$$j_k = \frac{c e g_{00}}{\sqrt{-g}} \int \frac{\mathcal{P}_k - \frac{e}{c} \mathcal{A}_k}{\mathcal{P}_0 - \frac{e}{c} \mathcal{A}_0} f(x^i, \mathcal{P}_\alpha) d\mathcal{P}_1 d\mathcal{P}_2 d\mathcal{P}_3, \quad (4.12)$$

или

$$j^k = c e \sqrt{-g} \int \frac{p^k}{p_0} \bar{f}(x^i, p^\alpha) dp^1 dp^2 dp^3$$

- представляют среднюю плотность 4-тока в системе. Плотность заряда

$$\rho = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} j^0 = \frac{1}{c \sqrt{g_{00}}} j_0. \quad (4.13)$$

Очевидно,

$$N = \frac{1}{e} \int \frac{j^0}{c} \sqrt{-g} d^3x = \frac{1}{e} \int \frac{j_0}{c} \frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} d^3x = \frac{1}{e} \int \rho \sqrt{-g_{np}} d^3x, \quad (4.13a)$$

где $g_{np} = g/g_{00}$ - детерминант пространственной части метрического тензора.

В "бесстолкновительных" задачах при следовании вдоль фазовой траектории частицы величина f не изменяется, поэтому

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathcal{P}_\alpha}{\partial \tau} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{P}_\alpha} = 0, \quad (4.14)$$

или

$$\frac{\bar{d}f}{d\tau} = \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^i} + \frac{dp^\alpha}{d\tau} \frac{\partial \bar{f}}{\partial p^\alpha} = 0. \quad (4.15)$$

В (4.14) производные обобщенных импульсов удовлетворяют уравнениям (4.7), для

(4.15) уравнения движения могут быть записаны в форме

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = - \frac{1}{m_0} \Gamma_{ik}^\alpha p^i p^k - \frac{e}{c} g^{\alpha i} p^k \left(\frac{\partial \mathcal{A}_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x^k} \right). \quad (4.16)$$

В некоторых случаях возможен более простой гидродинамический подход. Обычно гидродинамика строится на основе функции распределения, которая, в частности, в бездиссипативном случае может выбираться в виде обобщенного на релятивизм максвелловского распределения /10, 13, 14, 15, 16/.

Если внутренняя тепловая энергия в элементах объема системы частиц невелика, распределение тепловых скоростей изотропно и диссипация "отсутствует", то тензор энергии импульса частиц определяется обычными соотношениями

$$T^{\ell k} = w u^{\ell} u^k + p g^{\ell k}, \quad (4.17)$$

где тепловая функция и давление есть:

$$\begin{aligned} w &= n (m_0 c^2 + \frac{5}{2} k T) \\ p &= n k T, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$n = \frac{\rho}{m_0} = \ln v_0$ - собственная плотность частиц, u^k - гидродинамическая 4-х скорость, γ - определяется в (4.3), но также для гидродинамических \dot{x}^a . Гидродинамические уравнения движения частиц записываются как обычно: приравнявая 4-дивергенцию тензора $T^{\ell k}$ величинам $\frac{1}{c}(F_{ik} + F_{ik}^{(0)})j^k$, где F_{ik} - тензор собственного поля системы частиц, $F_{ik}^{(0)}$ - внешнего поля, j^k - 4-х-вектор тока, который теперь определяется соотношениями

$$j^k = e n u^k = e n \frac{\gamma}{\sqrt{g_{00}}} \dot{x}^k = \frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}} \dot{x}^k. \quad (4.19)$$

К гидродинамическим уравнениям, помимо уравнения непрерывности и уравнений Максвелла, для замыкания системы необходимо добавить еще уравнение, выражающее собой адиабатичность движения. Это уравнение можно записать в виде равенства нулю 4-дивергенции потока энтропии σu^i /17/

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} \sigma u^i) = 0. \quad (4.20)$$

В данном случае

$$\sigma = k n \ell n \frac{T^{3/2}}{n}. \quad (4.21)$$

Как и в кинематике, в стационарном случае ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$) общие гидродинамические уравнения допускают интеграл (аналог интеграла Бернулли /18/).

$$\frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} + e \sqrt{g_{00}} \Phi = \text{const}, \quad (4.22)$$

где $\Phi = -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \hat{q}_0$ - обычный "скалярный" потенциал. Постоянная в (4.22) берется вдоль линии тока и на разных линиях тока может быть различна.

Представляет интерес перечисленные выше общие соотношения рассмотреть в важном частном случае, когда система является аксиально-симметричной.

В цилиндрических координатах (в пространственной области $r = x^1$, $\phi = x^2$, $z = x^3$), если центр системы совершает прямолинейное движение вдоль оси oz , компоненты метрического тензора равны $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = 1$ и, согласно (1,45), $g_{00} = g_{00}(z, t)$ ^{х)}.

Так как ϕ — теперь циклическая координата, то уравнения (4.7) дают закон сохранения

$$\frac{m_0 \gamma}{\sqrt{g_{00}}} r^2 \frac{d\phi}{dt} + \frac{e}{c} r a_\phi = \text{const} . \quad (4.23)$$

В (4.23) вместо ковариантной компоненты \bar{G}_2 4-потенциала введена "физическая компонента" $a_\phi = \frac{1}{\sqrt{|g_{22}|}} \bar{G}_2$.

В гидродинамике выражению (4.23) соответствует "интеграл момента":

$$\frac{w}{n c^2} \frac{\gamma}{\sqrt{g_{00}}} r^2 \frac{d\phi}{dt} + \frac{e}{c} r a_\phi = \text{const} \quad (4.24)$$

(конечно, в (4.24) w и $\frac{d\phi}{dt}$ соответствуют средней (гидродинамической) скорости).

В стационарном аксиально-симметричном случае наличие двух законов сохранения позволяет написать класс частных решений кинетического уравнения (4.14) в виде произвольной функции первых интегралов $\mathcal{P}_0 = \text{const}$, $\mathcal{P}_2 = \text{const}$, т.е.

$$f = f(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_2) . \quad (4.25)$$

5.

Значительные упрощения гидродинамических уравнений получаются в представляющем интерес частном случае, когда в стационарной аксиально-симметричной системе имеется только ϕ -й ток. То есть $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \phi} \equiv 0$, $j^1 = j^3 \equiv 0$, $\bar{G}_1 = \bar{G}_3 \equiv 0$. Тогда гидродинамические уравнения движения частиц принимают следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} (n k T) = \frac{\theta n (\gamma^2 - 1)}{r} + en \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (a_\phi + a_\phi^{(0)})] \sqrt{\gamma^2 - 1} - \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\} \quad (4.26)$$

х) В (1,45) центр совершает движение по оси ox^1 .

$$\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{g_{00}} nkT) + \frac{\gamma^2 \theta_n}{\sqrt{g_{00}}} \frac{d(\sqrt{g_{00}})}{dz} = \text{en} \left\{ \frac{\partial a_\phi \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\partial z} - \frac{\gamma}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial z} [\sqrt{g_{00}} (\Phi + \Phi^{(0)})] \right\}. \quad (4.27)$$

В (4.26), (4.27) учтено, что

$$v_\phi = r \frac{d\phi}{dt} = \frac{c}{\gamma} \sqrt{g_{00}} \sqrt{\gamma^2 - 1}, \quad (4.28)$$

($v_r = v_z = 0$) , и введено обозначение

$$\theta = \frac{w}{n} = \frac{mc^2}{n} + \frac{5}{2} kT, \quad (4.29)$$

$a_\phi^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$ - потенциалы внешнего поля.

В данном случае в замкнутой самосогласованной системе уравнений гидродинамики и Максвелла уравнения непрерывности и адиабатичности выполняются тождественно. Так как кроме того, линиями тока являются окружности, то интегралы типа (4.22), (4.24) не дают новых соотношений. Поэтому полная самосогласованная система сводится только к (4.26), (4.27) и еще двум уравнениям Максвелла для потенциалов a_ϕ , Φ . Таким образом, в рассматриваемом случае пять неизвестных функций n , γ , Φ , a_ϕ , T связаны только четырьмя уравнениями, т.е. допустим значительный произвол в выборе классов частных решений.

В (4.22), (4.24) константы изменяются при переходе от одной линии тока к другой, т.е. фактически являются функциями (r, z) . Используя это, можно с помощью (4.22), (4.24), учитывая (4.28), (4.29), ввести новые неизвестные f , ψ вместо a_ϕ , Φ :

$$ef(r, z) = \sqrt{g_{00}} [\theta\gamma + e(\Phi + \Phi^{(0)})] \quad (4.30)$$

$$\frac{e}{r} \psi(r, z) = \alpha \sqrt{\gamma^2 - 1} + e(a_\phi + a_\phi^{(0)})]. \quad (4.31)$$

После исключения a_ϕ , Φ , уравнения (4.26), (4.27) принимают более простой вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} (nkT) = \text{en} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1} \partial \psi}{r \partial r} - \frac{\gamma}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{e} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right\} \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{g_{00}} nkT) = \text{en} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1} \partial \psi}{r \partial z} - \frac{\gamma}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{e} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\}. \quad (4.33)$$

Легко получить несколько классов частных решений уравнений (4.32), (4.33). Например, полагая $T=0$ и

$$\frac{v_\phi}{cr} = \frac{\sqrt{g_{00}} \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \frac{dF(\psi)}{d\psi}, \quad (4.34)$$

где $F(\psi)$ - произвольная функция, получаем решение (4.32), (4.33) в виде:

$$f = F(\psi). \quad (4.35)$$

Из (4.35) при выборе $\frac{dF}{d\psi} = \omega = \text{const}$ следует возможность "твёрдого вращения" системы частиц около оси z с постоянной угловой скоростью ω .

К другому равносному случаю приводит выбор:

$$\Gamma = \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{g_{00}}}, \quad \psi = \text{const}, \quad \text{где } \alpha = \text{const}. \quad (4.36)$$

Тогда (4.32), (4.33) интегрируются в виде

$$n\gamma^{-3/2} = \text{const} \left(g_{00} \right)^{-5/4} \exp\left(-\frac{e}{ak} f\right). \quad (4.37)$$

Возможны и другие случаи интегрируемости уравнений (4.32), (4.33). Необходимо, однако, отметить, что полученные частные равновесные состояния могут иметь окончательный физический смысл только после определения пространственных границ системы, в частности, в случае "твёрдого вращения" система должна быть ограниченной по радиусу.

§ 5. О самосогласованной задаче движения сгустка частиц в линейном ускорителе в мёллеровой системе координат

1.

В § 2 было показано, что движение частиц ускоренного сгустка под действием внешних сил (ускоряющих, фокусирующих и дефокусирующих) удобно рассматривать в системе координат, ускоренно движущейся вместе с выделенной равновесной частицей. В такой "собственной" системе движение всех частиц в сгустке является, как правило, нерелятивистским.

Ниже собственная система координат используется для решения задачи о приближенно самосогласованном движении сгустка частиц в линейном жесткофокусирующем ускорителе. Подобная задача в предположении постоянной скорости сгустка в лабораторной системе рассматривалась, например, в работах ^{/19,20/}.

При рассмотрении в ускоренной системе координат приближение постоянства скорости сгустка в исходной лабораторной системе не используется. При этом оказывается, что для одного возможного варианта линейного ускорения поведение сгустка в ускоренной системе описывается уравнениями того же вида, что и в указанных работах. Помимо этого изучается адиабатическое поведение сгустка в линейном ускорителе для общего случая, что проще сделать именно по отношению к ускоренной системе. Имеются и другие отличия, о которых будет сказано далее.

Предположим, так же как в § 2, что равновесная частица совершает "гиперболическое движение" по оси $Z = X^3$; величина ускорения a и максимальный размер сгустка ρ_{max} таковы, что

$$\frac{a \rho_{max}}{c^2} \ll 1, \quad (5.1)$$

и частицы в сгустке в мёллеровой системе - нерелятивистские. При этих условиях

$$p \approx m_0 \dot{x}^{\alpha}, \quad \tilde{f}(x^i, p^{\alpha}) \approx \tilde{f}(x^i, m_0 \dot{x}^{\alpha}). \quad (5.2)$$

Упрощение величин $\frac{dp^{\alpha}}{dt} \approx \frac{d p^{\alpha}}{dt}$ было выполнено в § 2, где показано, что они могут быть сведены к некоторой нерелятивистской силе (q^1, q^2, q^3 (в которую включена и сила инерции-символы Кристоффеля не все равны нулю)).

В интересующем нас приближении уравнения продольных и поперечных колебаний во внешних полях линейного ускорителя являются линейными и не связанными между собой. Соответственно силы q^{α} линейно зависят от одноименных координат (2.62).

Для решения самосогласованной задачи к действующим силам необходимо добавить еще собственные кулоновские силы расталкивания в сгустке. Предположим, что в каждый данный момент мёллерова времени t сгусток в ускоренной системе представляет собой эллипсоид с равномерно распределенной плотностью. В приближении (5.1) из (3.14) получаем, что поле заряженного эллипсоида в мёллеровой и в инерциальной системах координат имеет один и тот же вид. Поэтому наше последнее предположение соответствует тому случаю, когда сгусток считают эллипсоидом и в сопутствующей или лабораторной системах ^{/8,21}.

При этих условиях проекции сил расталкивания электрического поля на координатные оси пропорциональны одноименным координатам. Таким образом, и при учете кулоновских сил линейность уравнений и независимый характер колебаний в собственной системе сохраняется. Следуя методике самосогласования, для окончательного решения задачи необходимо показать существование функции распределения \tilde{f} , обеспечивающей предполагаемое распределение заряда сгустка. С помощью $\tilde{f}^{(x)}$ далее могут быть найдены числовые характеристики сгустка.

Уравнения движения частиц (2.62) с учетом собственных сил расталкивания принимают вид

$$\ddot{x} + \tilde{\chi}^x x = 0, \quad \ddot{y} + \tilde{\chi}^y y = 0, \quad \ddot{z} + \tilde{\chi}^z z = 0; \quad (5.3)$$

^{x/} Далее везде $\tilde{\chi}^{\alpha}$ опускается.

$$\begin{aligned}
x \ddot{\chi}^x &= -\frac{\bar{q}^x}{m_0} \equiv -\frac{q^x + q_{\text{кул}}^x}{m_0} = x \chi^x - x \chi_{\text{кул}}^x, \\
y \ddot{\chi}^y &= -\frac{\bar{q}^y}{m} \equiv -\frac{q^y + q_{\text{кул}}^y}{m_0} = y \chi^y - y \chi_{\text{кул}}^y, \\
z \ddot{\chi}^z &= -\frac{\bar{q}^z}{m_0} \equiv -\frac{q^z + q_{\text{кул}}^z}{m_0} = z \omega_{\parallel}^2 - z \chi_{\text{кул}}^z,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

где $\chi^x, \chi^y, \omega_{\parallel}$ определены в (2.81), (2.55); $q_{\text{кул}}^x, q_{\text{кул}}^y, q_{\text{кул}}^z$ — кулоновские силы расталкивания частиц, причем $\chi_{\text{кул}}^x, \chi_{\text{кул}}^y, \chi_{\text{кул}}^z$ — положительны, возможно, зависят от времени, но не зависят от x, y, z .

Кинетическое уравнение при сделанных предположениях имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + x^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\bar{q}^{\alpha}}{m_0} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^{\alpha}} = 0, \tag{5.5}$$

где f — рассматривается как функция $t, x^{\alpha}, \dot{x}^{\alpha}$.

Формальное решение (5.5) может быть представлено в виде произвольной функции первых интегралов уравнений движения (5.3).

2.

В этом пункте будет рассмотрен частный пример (см. конец § 2, начиная с формулы (2.83)), когда коэффициенты при x, y и z в (5.3) — точные периодические функции времени (теперь с учетом кулоновских сил).

Воспользуемся решениями Флоке уравнений типа Хилла. Пусть

$$\eta(t) = S(t) e^{i\psi(t)}, \quad \eta^*(t) = S(t) e^{-i\psi(t)} \tag{5.6}$$

— два комплексно сопряженных линейно-независимых нормальных решения уравнений (5.3). Как известно, нормальные решения таковы, что $S(t)$ — периодическая положительная функция с периодом, определяемым периодичностью коэффициента при x (или y, z) в уравнениях (5.3); $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{S^2(t)}, \tag{5.7}$$

вронская $W(\eta, \eta^*) = -2i$. Определенная выше $S(t)$ называется функцией Флоке.

Любое действительное решение уравнений Хилла

$$\begin{aligned}
x(t) &= I_x S_x(t) \sin(\psi_x(t) + \theta_x), \\
y(t) &= I_y S_y(t) \sin(\psi_y(t) + \theta_y).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Величины I_x , I_y , θ_x , θ_y зависят от начальных значений величин x, y, \dot{x}, \dot{y} и остаются постоянными в процессе движения, то есть являются интегралами движения. Выражение этих постоянных через (x, \dot{x}) и (y, \dot{y}) есть

$$I_x^2 = (S_x \dot{x} - \dot{S}_x x)^2 + \left(\frac{x}{S_x}\right)^2, \quad I_y^2 = (S_y \dot{y} - \dot{S}_y y)^2 + \left(\frac{y}{S_y}\right)^2, \quad (5.9)$$

$$\theta_x = \arcsin \frac{x}{I_x S_x} - \psi_x, \quad \theta_y = \arcsin \frac{y}{I_y S_y} - \psi_y. \quad (5.10)$$

Для третьего уравнения (5.3) интегралы движения могут быть записаны аналогичным образом. Вместе с тем, ввиду наличия в z -ой силе большой и положительной постоянной составляющей $\omega_{||}^2$, без существенной ошибки можно заменить $\bar{\chi}^2 \rightarrow \omega_{||}^2 > 0$, где

$$\bar{\omega}_{||}^2 = \omega_{||}^2 - \langle \chi_{кул}^2 \rangle, \quad (5.11)$$

знак $\langle \rangle$ означает усреднение по периоду фокусирующего поля. Такое упрощение в одном случае будет использовано. Тогда интегралы движения

$$I_x^2 = \bar{\omega}_{||}^2 z^2 + \frac{1}{\omega} \dot{z}^2, \quad (5.12)$$

$$\theta_x = \arcsin \frac{z \sqrt{\bar{\omega}_{||}}}{I_x} - \bar{\omega}_{||} t.$$

Очевидно, $I_x^2 = \bar{\omega}_{||}^2 A_x^2$, где A_x — амплитуда продольных колебаний, являющихся в данном приближении гармоническими. Займемся теперь функцией распределения. Подобрать функцию распределения так, чтобы в случае "хилловских" колебаний пучок представлялся бы точно в виде эллипсоида, затруднительно. Рассмотрим два приближенных случая. Первый из них соответствует замене эллипсоида равномерно заряженным эллиптическим цилиндром, поперечные размеры которого следует взять много меньшими продольных. Во втором случае мы получим эллипсоид, но решения Хилла (5.8) возьмем в приближенно упрощенном виде.

Итак, первый случай. Выберем функцию распределения

$$f = D \frac{\delta(a_1 - I_x^2 - I_y^2) \sigma(a_2 - I_x^2)}{\sqrt{a_2 - I_x^2}}, \quad (5.13)$$

где величина I_x берется из (5.12) (δ — функция, входящая в (5.13), была использована Капчинским в качестве функции распределения в работе /10/, см. также /22/).

Здесь D, a_1, a_2 — положительные константы, а σ — функция определяется как обычно

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < 0, \\ 1 & \text{при } \xi \geq 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

Очевидно, (5.13) является решением кинетического уравнения (5.5), поскольку эта функция зависит только от интегралов движения.

Покажем, что плотность частиц, вычисленная на основе (5.13), будет константой в пределах цилиндра, размеры которого зависят от a_1 , a_2 , $S_x(t)$, $S_y(t)$, $\bar{\omega}_{\parallel}$, и равной нулю вне этого цилиндра.

В соответствии с (4.13), с учетом приближений (5.1), (5.2) (принимая во внимание, что в соответствии с (5.2) распределение (5.15) не содержит частиц с достаточно большими \dot{x} , \dot{y} , \dot{z}), пространственная плотность заряда может быть представлена так

$$\rho = \frac{\sqrt{\epsilon_0} j_0}{c} = e \sqrt{\frac{\epsilon_0}{g_{00}}} \iint f(x^1, \dot{x}^a) \frac{\partial(p^1, p^2, p^3)}{\partial(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)} d^3 \dot{x} = e m_0^3 \iint f(x^1, \dot{x}^a) dx^1 dy^1 dz^1. \quad (5.15)$$

Подстановка функции (5.13) даст

$$\rho = e m_0^3 D \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[\alpha_1 - (S_x \dot{x} - \dot{S}_x x)^2 - (S_y \dot{y} - \dot{S}_y y)^2 - \left(\frac{x}{S_x}\right)^2 - \left(\frac{y}{S_y}\right)^2] \frac{\sigma[\alpha_2 - \bar{\omega}_{\parallel} z^2]}{\sqrt{\alpha_2 - \frac{z^2}{\bar{\omega}_{\parallel}} - \bar{\omega}_{\parallel} z^2}} dx dy dz. \quad (5.16)$$

После замены переменных

$$\begin{aligned} S_x \dot{x} - \dot{S}_x x &= \lambda \cos \phi, & \frac{\partial(\dot{x}, \dot{y})}{\partial(\lambda, \phi)} &= \frac{\lambda}{S_x S_y}; \\ S_y \dot{y} - \dot{S}_y y &= \lambda \sin \phi, \\ \bar{z} &= \sqrt{\bar{\omega}_{\parallel}} (\alpha_2 - \bar{\omega}_{\parallel} z^2) \sin \zeta, & dz &= \sqrt{\bar{\omega}_{\parallel}} (\alpha_2 - \bar{\omega}_{\parallel} z^2) \cos \zeta d\zeta \end{aligned} \quad (5.17)$$

и последующего интегрирования найдем

$$\rho = D e m_0^3 \pi^2 \frac{\sqrt{\bar{\omega}_{\parallel}}}{S_x S_y} \sigma[\alpha_2 - \bar{\omega}_{\parallel} z^2] \sigma[\alpha_1 - \left(\frac{x}{S_x}\right)^2 - \left(\frac{y}{S_y}\right)^2]. \quad (5.18)$$

Из (5.18) видно, что $\rho \neq 0$ только тогда, когда точка лежит внутри области, определяемой неравенствами

$$\frac{x^2}{(\sqrt{\alpha_1} S_x)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\alpha_1} S_y)^2} < 1, \quad |z| < \sqrt{\frac{\alpha_2}{\bar{\omega}_{\parallel}}}. \quad (5.19)$$

Таким образом, сгусток действительно является отрезком цилиндра эллиптической формы, длиной $2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\bar{\omega}_{\parallel}}}$ и поперечными размерами $\sqrt{\alpha_1} S_x(t)$, $\sqrt{\alpha_1} S_y(t)$, периодически изменяющимся с частотой фокусирующего поля. Плотность заряда внутри сгустка

во всех точках одинакова (определяется величиной D), однако также является периодической функцией времени. Такая пульсация во времени свойственна данной самосогласованной задаче, ибо силы расталкивания частиц также будут пульсировать, что и было заложено вначале, когда мы исходили из уравнения Хилла. Конечно, токи, возникающие за счет пульсации цилиндра и дающие в принципе магнитное поле, не учитываются.

Если $a_2 \rightarrow \infty$, то решение отвечает (если не интересоваться вопросом, в какой системе координат ведется рассмотрение) случаю Капчианского^{/19/}.

Построим теперь другую функцию распределения, соответствующую простейшей модели Власова-Бондарева^{/20/}, когда при некотором упрощении решений Хилла ступок можно представить в виде эллипсоида, поперечные оси которого определенным образом связаны между собой. Хотя указанные авторы не используют кинетического уравнения, а ограничиваются фактически только вычислением моментов от функции распределения, однако, имея физическую модель, нетрудно восстановить вид функций.

Возьмем приближенно

$$\begin{aligned} x(t) &= I_x S_x(t) \sin(\bar{\omega}_\perp t + \theta_x), & y(t) &= I_y S_y(t) \sin(\bar{\omega}_\perp t + \theta_y), \\ \dot{x}(t) &= \frac{I_x}{S_x(t)} \cos(\bar{\omega}_\perp t + \theta_x), & \dot{y}(t) &= \frac{I_y}{S_y(t)} \cos(\bar{\omega}_\perp t + \theta_y). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Мы учли, что $\frac{d\psi}{dt} = 1/S^2$ и пренебрегли "дрожанием" фаз (см. (5.7), (5.8)), являющихся аргументами \sin и \cos в выражениях для x и \dot{x} , y и \dot{y} , оставив лишь секулярные части. Если определить, как обычно,

$$\int_{t_0}^{t_0 + \bar{\chi}} \frac{1}{S^2(t)} dt = \mu, \quad (5.21)$$

где $t_{\bar{\chi}}$ - период функций $\bar{\chi}(t)$, а величина t_0 - произвольное начало (μ от t_0 не зависит), и считать параметр μ одинаковым для x и y -колебаний, то

$$\bar{\omega}_\perp = \frac{\mu}{t_{\bar{\chi}}} = \left\langle \frac{d\psi}{dt} \right\rangle. \quad (5.22)$$

Отметим, что равенство $\mu_x = \mu_y$ обеспечивается условием

$$\bar{\chi}^x(t) = \bar{\chi}^y(t + \frac{t_{\bar{\chi}}}{2}). \quad (5.23)$$

^{x)} Разность между фазами колеблющихся величин x и \dot{x} (соответственно y, \dot{y}) в решениях Хилла колеблется в окрестности $\pi/2$, причем эта разность фаз точно равна указанному значению в периодически повторяющихся точках, где $\dot{S}(t) = 0$. В (5.20) такая разность фаз взята всюду, что соответствует "гладкому приближению".

При этом

$$S_x(t) = S_y \left(t + \frac{t\gamma}{2} \right). \quad (5.24)$$

Что касается той части \bar{X}^{xy} , которая обязана внешним силам, то выбором G (см. (2.61)) равенству (5.23) всегда можно удовлетворить. В самосогласованной задаче для сил, обязанных действию пространственного заряда, условие типа (5.23) в выбранном частном случае также должно выполняться.

Тогда интегралы движения (5.9) и (5.10) запишутся так

$$\begin{aligned} I_x^2 &= S_x^2 \dot{x}^2 + \frac{x^2}{S_x^2}, & I_y^2 &= S_y^2 \dot{y}^2 + \frac{y^2}{S_y^2}, \\ \theta_x &= \arcsin \frac{x}{I_x S_x} - \bar{\omega}_\perp t, & \theta_y &= \arcsin \frac{y}{I_y S_y} - \bar{\omega}_\perp t. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Эти выражения совпадут с выражениями (5.9), (5.10), если там пренебречь членами \dot{S}_x , \dot{S}_y , и заменить $\psi(t) \rightarrow \langle \frac{d\psi}{dt} \rangle t = \bar{\omega}_\perp t$. Функцию распределения берем в виде

$$f = D \frac{\alpha_1 - I_x^2 - I_y^2 - \alpha_2 I_x^2 \delta(I_x - I_y)}{\sqrt{\alpha_1 - I_x^2 - I_y^2 - \alpha_2 I_x^2} \sqrt{I_x^2} I_y^2} \delta \left(\arcsin \frac{x}{I_x S_x} - \arcsin \frac{y}{I_y S_y} - \frac{\pi}{2} \right), \quad (5.26)$$

где D , α_1 , α_2 - положительные константы, и здесь аналогично (5.25)

$$I_x^2 = S_x^2 \dot{z}^2 + \frac{z^2}{S_x^2}. \quad (5.27)$$

Подчеркнем, что аргумент δ - функции, стоящей в (5.26) на последнем месте, есть интеграл движения, так как он равен (см. (5.25)) $\theta_x - \theta_y - \frac{\pi}{2}$. Выбор такой разности фаз соответствует вращению частиц в поперечной плоскости, если за переменные взять $x/S_x, y/S_y$.

С помощью (5.15) на основе (5.26) получим выражение для плотности заряда в сгустке. При вычислении интеграла удобно от переменных $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ перейти к I_x, I_y, I_x (5.25), (5.27). Тогда после интегрирования (5.26) по переменной I_x , которое сведется к замене $I_x \rightarrow I_y$, вторая δ - функция в выражении для f может быть представлена в виде

$$\delta \left(\arcsin \frac{x}{I_y S_x} - \arcsin \frac{y}{I_y S_y} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\delta \left(I_y - \frac{x^2}{S_x^2} - \frac{y^2}{S_y^2} \right) |xy|}{S_x S_y \sqrt{x^2/S_x^2 + y^2/S_y^2}}.$$

Произведя затем элементарное интегрирование по I_y , придем при интегрировании по I_x к выражению

$$\rho = D \frac{8 e m_0^3}{\sqrt{2\alpha_2} S_x S_y S_z} \sigma \left[Q^2 - \frac{z^2}{S_x^2} \right] \int_R^Q \frac{I_x d I_x}{\sqrt{Q^2 - I_x^2} \sqrt{I_x^2 - R^2}};$$

$$Q = \sqrt{\frac{a_1}{a_2} - \frac{2}{a_2} \left(\frac{x^2}{S_x^2} + \frac{y^2}{S_y^2} \right)}, \quad R = \frac{|z|}{S_x}.$$

Характерно, что последний интеграл не зависит от Q и R и равен π . Окончательно получим

$$\rho = D \frac{8\pi e m_0^3}{\sqrt{2} a_2 S_x S_y S_x} \sigma \left[1 - \frac{x^2}{(S_x \sqrt{a_1/2})^2} - \frac{y^2}{(S_y \sqrt{a_1/2})^2} - \frac{z^2}{(S_x \sqrt{a_1/a_2})^2} \right], \quad (5.28)$$

то есть плотность заряда действительно постоянна внутри эллипсоида и равна 0 вне его. Полуоси $\frac{\sqrt{a_1}}{2} S_x(t)$, $\frac{\sqrt{a_1}}{2} S_y(t)$ и $\frac{\sqrt{a_1}}{a_2} S_x(t)$ периодически изменяются с периодом фокусирующей системы. Выражений для сил, обусловленных полем эллипсоидного сгустка общего типа, можно найти, например, в [8]. С их помощью нетрудно показать, что условия (5.23) выполняются, причем $\chi_{кул.}^x(t) = \chi_{кул.}^x(t + \frac{t_0}{2})$, то есть сила по x имеет период в два раза меньший, чем по x и y .

3.

Единый "нерелятивистский" вид сразу всех трех уравнений движения в мёллеровой системе позволяет без каких-либо дополнительных замен переменных рассмотреть вопрос об адиабатическом изменении параметров сгустка. Такие изменения всегда происходят, если речь не идет о специальном режиме $\Omega = V_c \Gamma_c \neq \text{const}$, когда в мёллеровой системе сгусток стационарен.

Для рассмотрения общего случая построим адиабатические инварианты уравнений (5.3), где теперь коэффициенты $\bar{\chi}(t)$ не являются строго периодическими, а их "амплитуды" и "периоды" медленно меняются при изменении энергии равновесной частицы $m_0 c^2 \Gamma_c$; частота фазовых колебаний $\omega_{||} \neq \text{const}$ и также постепенно изменяется. Адиабатические инварианты возьмем за приближенные интегралы движения при построении функции распределения.

Искомым инвариантом для уравнения "гармонических" колебаний является, как известно, I_z из (5.12). Адиабатические выражения в случае уравнений (5.3) можно определить на основе приближенных решений, приведенных в работе [23]. Возьмем уравнение для x - колебаний (для y и z - колебаний из (5.3) будет все в точности так же). За исходное принимается предположение, что ввиду малого отличия коэффициентов уравнений на двух соседних периодах элементы "матрицы периода" b^{ik} , определяемой так, что значения x и \dot{x} в начале и конце n -го периода связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n1}^{11} & b_{n1}^{12} \\ b_{n21} & b_{n22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

являются медленно меняющимися функциями номера периода n .

Занявшем решение (5.3) для какого-либо периода в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= I S(t) \sin(\psi(t) + \theta), \\ \dot{x}(t) &= I \kappa(t) S(t) \cos(\psi(t) + \zeta(t) + \theta), \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\sin \zeta(t) = -\dot{S} / \kappa S, \quad \cos \zeta(t) = 1/S^2,$$

где "частота" $\kappa(t)$, другие введенные уже "частоты" $\frac{d\psi}{dt}$, $\bar{\omega}_1$ и обычно вводимая "частота" ν выражаются через функцию Флоке так:

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{1+S^2\dot{S}^2}}{S^2}, \quad \nu = \kappa(t_0), \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{S^2}; \quad \bar{\omega}_1 = \frac{\mu}{t_{\bar{X}}} = \frac{1}{t_{\bar{X}}} \int_{t_0}^{t_0+t_{\bar{X}}} \frac{dt}{S^2(t)} = \left\langle \frac{1}{S^2(t)} \right\rangle. \quad (5.31)$$

Согласно смыслу t_0 , параметр ν есть значение κ в точке начала периода.

Определим также для этой точки

$$\epsilon = \zeta(t_0). \quad (5.32)$$

Тогда легко показать, что матрица b^{ik} будет ^{/19/}

$$b^{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\mu-\epsilon)}{\cos \epsilon} & \frac{\sin \mu}{\nu \cos \epsilon} \\ -\frac{\nu \sin \mu}{\cos \epsilon} & \frac{\cos(\mu+\epsilon)}{\cos \epsilon} \end{pmatrix}, \quad \frac{b^{11} + b^{22}}{b} = \cos \mu. \quad (5.33)$$

В случае, если начало периода взято в точке, где $\dot{S} = 0$, то $\epsilon = 0$ и $b^{11} = b^{22} = \cos \mu$.

При изучении адиабатического поведения решений уравнения Хилла параметры μ , ϵ , ν считаются не константами, а медленными функциями номера периода n (они будут помечаться ниже индексом "n").

В работе ^{/23/} значения x_n , \dot{x}_n в конце $(n-1)$ или начале n периода выражаются довольно компактной приближенной формулой через значения x_0 , \dot{x}_0 в начале нулевого периода. Эту связь для рассматриваемого случая ($\text{Det} = b^{11}b^{22} - b^{12}b^{21} = 1$) запишем в выражении через параметры ϵ, μ, ν так

^{x)} Ради краткости индексы "n" при I, S, θ опущены.

$$\begin{aligned}
 x_n &= \left(\frac{\nu_0 \cos \epsilon_0}{\nu_n \cos \epsilon_n} \right)^{1/2} \left[x_0 \cos \Psi_n + \left(\frac{x_0}{\nu_0} + x_0 \operatorname{tg} \epsilon_0 \right) \sin \Psi_n \right] = \\
 &= \frac{1}{(\nu_n \cos \epsilon_n)^{1/2}} \sqrt{\left[\frac{x_0}{(\nu_0 \cos \epsilon_0)^{1/2}} + \frac{x_0 \nu_0 \sin \epsilon_0}{(\nu_0 \cos \epsilon_0)^{1/2}} \right]^2 + x_0^2 \nu_0 \cos \epsilon_0} \sin(\Psi_n + \Theta), \\
 \bar{x}_n &= \left(\frac{\nu_n \cos \epsilon_n}{\nu_0 \cos \epsilon_0} \right)^{1/2} \left[\bar{x}_0 \cos \bar{\Psi}_n - \left(\bar{x}_0 \operatorname{tg} \epsilon_0 + \frac{x_0 \nu_0}{\cos \epsilon_0} \right) \sin \bar{\Psi}_n \right] = \\
 &= \left(\frac{\nu_n}{\cos \epsilon_n} \right)^{1/2} \sqrt{\left[\frac{\bar{x}_0}{(\nu_0 \cos \epsilon_0)^{1/2}} + \frac{x_0 \nu_0 \sin \epsilon_0}{(\nu_0 \cos \epsilon_0)^{1/2}} \right]^2 + x_0^2 \nu_0 \cos \epsilon_0} \cos(\bar{\Psi}_n + \bar{\Theta}); \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

$$\Psi_n = \int_0^n \left\{ \mu_n - \frac{d\mu_n}{dn} - \frac{1}{2\nu_n \cos \epsilon_n} \frac{d(\nu_n \sin \epsilon_n)}{dn} \right\} dn,$$

$$\bar{\Psi}_n = \int_0^n \left\{ \mu_n - \frac{d\mu_n}{dn} + \frac{\nu_n}{2 \cos \epsilon_n} \frac{d(\sin \epsilon_n / \nu_n)}{dn} \right\} dn.$$

$$\sin \Theta = \frac{x_0 (\nu_0 \cos \epsilon_0)^{1/2}}{\sqrt{\left[\frac{x_0}{(\nu_0 \cos \epsilon_0)^{1/2}} + \frac{x_0 \nu_0 \sin \epsilon_0}{(\nu_0 \cos \epsilon_0)^{1/2}} \right]^2 + x_0^2 \nu_0 \cos \epsilon_0}}, \quad \cos \Theta = \frac{\frac{x_0}{\nu_0} + x_0 \operatorname{tg} \epsilon_0}{\sqrt{\left[\frac{x_0}{(\nu_0 \cos \epsilon_0)^{1/2}} + \frac{x_0 \nu_0 \sin \epsilon_0}{(\nu_0 \cos \epsilon_0)^{1/2}} \right]^2 + x_0^2 \nu_0 \cos \epsilon_0}}. \quad (5.35)$$

Из сравнения соответствующих выражений для $\sin \bar{\Theta}$ и $\cos \bar{\Theta}$ с (5.35) нетрудно установить, что

$$\bar{\Theta} = \Theta + \epsilon_0. \quad (5.36)$$

Видно, что Θ и $\bar{\Theta}$ — константы, определяемые начальными условиями. Взяв разность интегралов $\Psi_n - \bar{\Psi}_n$, найдем

$$\bar{\Psi}_n = \Psi_n + \epsilon_n - \epsilon_0. \quad (5.37)$$

Значит, аргумент функции \cos во второй формуле (5.34) отличается от аргумента \sin в первой формуле (5.34) на аддитивный член ϵ_n :

$$(\bar{\Psi}_n + \bar{\Theta}) = (\Psi_n + \Theta) + \epsilon_n \quad (5.38)$$

Непосредственным вычислением из (5.34) с использованием (5.38) найдем

$$\left[\frac{x_n}{(\nu_n \cos \epsilon_n)^{1/2}} + \frac{x_n \nu_n \sin \epsilon_n}{(\nu_n \cos \epsilon_n)^{3/2}} \right]^2 + x_n^2 \nu_n^2 \cos^2 \epsilon_n = \left[\frac{x_0}{(\nu_0 \cos \epsilon_0)^{1/2}} + \frac{x_0 \nu_0 \sin \epsilon_0}{(\nu_0 \cos \epsilon_0)^{3/2}} \right]^2 + x_0^2 \nu_0^2 \cos^2 \epsilon_0 = \text{Inv.} \quad (5.39)$$

Поскольку $\nu_n = \nu(t_{on})$, $\epsilon_n = \zeta(t_{on})$ (см. (5.31), (5.32)), то (5.30) даст

$$\frac{1}{(\nu_n \cos \epsilon_n)^{1/2}} = S(t_{on}), \quad \frac{\nu_n \sin \epsilon_n}{(\nu_n \cos \epsilon_n)^{3/2}} = -\dot{S}(t) \Big|_{t=t_{on}}. \quad (5.40)$$

Сравним (5.39) с учетом последних выражений с (5.9). Ясно, что инвариантность (5.39) означает, что (5.9) является адиабатическим инвариантом для точек $t = t_{on}$, отвечающих началам последовательных периодов. Данное рассмотрение основано однако на представлении о том, что все параметры меняются небольшими скачками от периода к периоду, а внутри каждого из них все неизменно (в смысле "адиабатики"), и верны инварианты (5.9). Следовательно, (5.9) являются адиабатическими инвариантами для произвольного t . Заметим, что в (5.34) множители $\frac{1}{(\nu_n \cos \epsilon_n)^{1/2}}$ и $\left(\frac{\nu_n \sin \epsilon_n}{\cos \epsilon_n} \right)^{1/2}$ соответствуют множителям $S(t)$ и $\dot{S}(t)$ в (5.30). Аналогично найдем, что адиабатическим инвариантом будет

$$\theta = \arcsin \frac{x}{IS} - \Psi(t), \quad (5.41)$$

где $\Psi(t)$ - непрерывная функция, совпадающая с выражением Ψ_n в точках стыков периодов. Приближенно можно взять $\Psi(t) = \psi(t)$, учитывая, конечно, что $\psi(t) - \sum_{l=0}^{n-1} \mu_l$ при $\sum_{l=0}^{n-1} t_{\bar{X}_l} < t < \sum_{l=0}^n t_{\bar{X}_l}$ от периода к периоду несколько изменяется^{х)}.

Учитывая все сказанное, придем к выводу, что полученные в п. 2 настоящего параграфа результаты останутся верными и при медленном изменении параметров S_x , S_y , S_z (или $\vec{\omega}_{\parallel}$) от периода к периоду.

З а к л ю ч е н и е

Как показывает анализ, проведенный выше, использование метода неинерциальных систем отсчета может в ряде случаев оказаться полезным для упрощения математической стороны задач и выяснения физической картины процессов. В сущности говоря, это упрощение связано с исключением релятивистского направленного движения и сведением задачи к нерелятивистской. Как известно, для равномерного движения такое упрощение всегда может быть выполнено применением преобразований Лоренца; в данной работе показано, что аналогичные результаты для динамических процессов с

^{х)} При отсутствии адиабатического изменения параметров разность $\psi(t) - \sum_{l=0}^{n-1} \mu_l$ при $(n-1)t_{\bar{X}} < t < nt_{\bar{X}}$ для всех периодов одна и та же.

ускорением получаются, если использовать мёллеровы преобразования к собственной системе, причем характер движения таков, что отклонения от псевдоевклидовой метрики малы ($\epsilon_{00} = 1$).

Могут быть указаны преобразования к собственной системе и другого типа, нежели мёллеровы, например, класс конформных преобразований^{/24/}. Однако, по моему мнению, преобразования, использованные в настоящей работе, наиболее просты, наглядны и удобны в приложениях.

Необходимо отметить, что всем известным типам преобразований к неинерциальной системе присуща трудность, связанная с сингулярностью метрики, которая обходится требованием исключения соответствующих областей 4-пространства из рассмотрения, но не анализируется по существу.

Этот вопрос требует дальнейшего изучения. То же относится и к некоторым тонким моментам, связанным с приближением гиперболического движения, например, отсутствию излучения в собственной системе для этого случая. Эти принципиальные вопросы в работе не рассматривались.

Основное внимание было уделено прямолинейному движению, но как уже отмечалось, методика может быть обобщена и на другой важный для приложений случай вращательного движения центра. Необходимо подчеркнуть при этом, что полученная таким образом собственная система координат не совпадает с вращающейся системой координат (см. например^{/8/}), которая используется как в теоретических, так и в прикладных вопросах. Можно ожидать, что мёллерова система окажется несколько удобнее ввиду ее "времени-ортогональности".

Наконец, необходимо подчеркнуть, что применение преобразований к неинерциальной системе не имеет исключительно методологического характера, как это может показаться. Помимо этой важной стороны дела, они являются полезным инструментом для исследования влияния ускорения на физические процессы. Наглядный пример тому - релятивистский гармонический осциллятор.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность В.И. Векслеру за внимание и интерес к данной работе и товарищам по работе за многочисленные обсуждения.

Вывод уравнений (1.21) - (1.22)

В момент времени $t = t_c$ преобразования от системы I к системе S суть:

$$x'^i = a^i_k(r) X^k. \quad (1)$$

Перейдем от S к S^* , сдвинутой во времени на dr ,

$$x^{*i} = a^{*i}_k X'^k. \quad (2)$$

Переход от X^i к X'^i можно записать в виде:

$$x'^i = a^{*i}_k a^k_\ell X^\ell = a^i_\ell(r+dr) X^\ell, \quad (3)$$

$a^i_\ell(r+dr)$ - матрица преобразования Лоренца к сопутствующей системе в момент времени $t+dr$.

Но, по условию, a^{*i}_k есть матрица бесконечно-малого преобразования Лоренца без поворота, т.е. (см., например, /1/),:

$$a^{*i}_k = \delta^i_k + \epsilon^i_k, \quad (4)$$

Здесь ϵ^i_k - антисимметричный тензор, не равные нулю компоненты которого равны

$$\epsilon^i_k = -\frac{dv^i}{c}, \quad \epsilon^j_j = \frac{dv^j}{c}, \quad (5)$$

dv^i - скорость системы S^* относительно системы S .

Нетрудно видеть, что тензор ϵ^i_k можно представить в общем виде так

$$\epsilon^i_k = \frac{u'^i du'_k - u'_k du'^i}{c^2}, \quad (6)$$

учитывая, что $u'^i = u'_i = (c, 0, 0, 0)$ - 4 - скорость системы S относительно нее самой и определяя du'^i так: $du'^i = (c, dv^{*i})$.

Теперь имеем

$$a^i_\ell(r+dr) = a^{*i}_k a^k_\ell = a^i_\ell(r) + a^k_\ell \epsilon^i_k,$$

или

$$\begin{aligned} a^i_\ell(r+dr) - a^i_\ell(r) &= \frac{1}{c^2} [u'^i (a^k_\ell du'_k) - du'^i (a^k_\ell u'_k)] = \\ &= \frac{1}{c^2} (u'^i du'_\ell - du'^i u'_\ell) = \frac{1}{c^2} a^i_k (U^k du'_\ell - du'^k u'_\ell). \end{aligned}$$

Деля обе части этого равенства на dr , окончательно получаем:

$$\frac{d a^i_\ell}{dr} = -a^i_k \dot{u}^k_\ell, \quad \dot{u}^k_\ell = \frac{1}{c^2} (\ddot{U}^k u'_\ell - \dot{U}^k u'^k). \quad (7)$$

Так как соотношения ортогональности (1.18) выполняются для любого момента времени τ , то уравнения для коэффициентов \bar{a}_k^{-1} легко получить, если продифференцировать по τ соотношения ортогональности $a_\rho^i \bar{a}_k^\ell = \delta_k^i$. Используя при этом (7), находим:

$$\frac{d \bar{a}_k^{-1}}{d\tau} = \bar{a}_k^{-\ell} \gamma_\rho^i. \quad (8)$$

Л и т е р а т у р а

1. В.А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. ГИФМЛ, М., 1961 г.
2. В. Паули. Теория относительности, ОГИЗ ГИТТЛ, М., 1947 г.
3. T.Fulton, F.Rohrlich. Ann. Phys. (N.Y.), 9, 499 (1960).
F.Rohrlich. Nuovo Cim., 21, 811 (1961).
4. C.Bradbury. Ann. Phys. (N.Y.), 19, 323 (1962).
5. C.Möller. The Theory of Relativity, Oxford, 1952.
6. C.Möller. On Homogenous Gravitational Fields in the General Theory of Relativity and the Clock Paradox, Copenhagen, 1943 (Труды Датской Академии Наук, 2, № 18).
7. Сборник "Теория и расчет линейных ускорителей". Госатомиздат, М., 1962 (Я.Б.Файнберг. Динамика заряженных частиц в линейном ускорителе с бегущей волной).
8. А.Д.Власов. Теория линейных ускорителей. Атомиздат, М., 1965.
9. Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц. Теория поля. Физматгиз. М., 1960.
10. С.Т.Беляев, Г.И.Будкер. ДАН, 107, № 2, стр. 807 (1956).
11. Н.А.Черников. ДАН, 144, № 1, стр. 89 (1962).
12. Plasma Physics (под ред. Drummond'a), New York, Toronto, London, 1961 (ch.7, O.Buneman, The Bennett Pinch).
13. Г.М.Заславский, С.С.Моисеев. ПМТФ, № 1, стр. 20 (1962).
14. Г.М.Заславский. ПМТФ 5, стр. 42 (1962).
15. Н.Б.Рубин. ЖТФ, т. XXXIУ, в. 4, стр. 676 (1964). Преприят ОИЯИ № 1236, Дубна 1963.
16. Н.А.Черников. Преприят ОИЯИ № Р-1281, Дубна 1963.
17. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика сплошных сред, ГИТТЛ, Москва, 1954 г.
18. С.Б. Рубин, В.Н.Цытович. ЖТФ т. XXXIУ, в. 1 стр. 3 (1964).
19. И.М.Капчинский. Динамика частиц в резонансных линейных ускорителях, АН СССР, Радиотехнический институт, Н.Т.Д.-641, Москва, 1964 г.
20. Б.И.Бондарев, А.Д.Власов. Атомная энергия, т. 19, вып. 5, стр. 423 (1965).
21. Сборник "Теория и расчет линейных ускорителей", Госатомиздат, М., 1962 г. (Я.Б. Файнберг, Н.П. Селиванов. Исследование начальной части линейного электронного ускорителя).

22. О.И. Ярковой. Преприят ОИЯИ № 2183, Дубна 1965.
23. Э.Л. Бурштейн, Л.С. Соловьев. ДАН, 109, № 4, стр. 721 (1966).
24. T.Fulton, F.Rohrlich, L.Witten, Nuovo Cim., 26, 652 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 марта 1966 г.