ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2639

Г. А. Ососков

ГЕНЕРИРОВАНИЕ НА ЭЛЕКТРОННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЕ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

1966

2639

Г. А. Ососков

ГЕНЕРИРОВАНИЕ НА ЭЛЕКТРОННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЕ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Направлено в ЖВМ МФ

Во многих физических задачах, решаемых методом Монте-Карло (решение кинематического уравнения [1], вычисление эффективности регистрации [2] и т.д.), необходимо многократно моделировать траектории частиц в веществе.

Обычно траектория представляет собой ломаную линию, прямолинейные отрезки которой имеют длины, распределенные по показательному закону с плотностью

$$p_{\lambda}(x) = \xi e^{-\lambda x} \quad (x > 0). \tag{1}$$

В некоторых случаях (тепловые нейтроны) число отрезков траектории может быть очень большим. Время, затрачиваемое на розыгрыш траектории на электронной вычислительной машине (ЭВМ), определяется, в основном, скоростью, с которой мы умеем генерировать случайные числа с законом распределения (1).

Наиболее известным [3] является способ, при котором после розыгрыша случайного числа ξ с равномерным в (0,1) законом распределения находят величину

$$\eta = -\ln \xi . \tag{2}$$

Эта величина и будет иметь распределенне (1) с $\lambda = 1$ (для перехода к произвольной λ нужно взять η/λ).

Вычисление логарифма является одной из медленных стандартных программ и требует 50-60 операций на трехадресной ЭВМ. В связи с этим различными авторами предлагалось несколько более быстрых способов получения случайных чисел с распределением (1).

Часть из них [1,4] дает существенную экономию машинного времени, однако основаны они на использовании больших таблиц распределений, занимающих много места в оперативной памяти ЭВМ.

В [5] описан способ (предложенный, по-видимому, Дж. фон Нейманом), основанный на подсчете случайного числа серий из равномерно распределенных чисел. Для генерации одного числа с распределением (1) требуется, в среднем, получить 4,3 случайных равномерно распределенных числа, что, например, в случае четырехкомандного генератора равномерно распределенных чисел для ЭВМ М-20, приведенного в /6/, дает, в среднем, двойную экономию времени по сравнению с (2).

В настоящей заметке предлагается еще один способ генерации случайных чисел с показательным распределением. Идея метода состоит в розыгрыше целой и дробной частей искомого случайного числа. Экономный алгоритм розыгрыша позволил обойтись без таблиц и сократить время на получение одного числа. Метод удобен для реализации на имеющихся ЭВМ.

Прилагаются результаты проверки качества полученных чисел по системе тестов.

II.

В основу большинства ЭВМ положена двоичная система счисления. Поэтому будет удобно в (1) взять $\lambda = \ln 2$ и перейти к показательному закону с основанием 2.

$$p_{\ln 2}(x) = 2^{-x} \ln 2 \quad (x > 0). \tag{1'}$$

Интегрируя от 0 до x, получим функцию распределения случайной величины η, распределенной с плотностью (1'), т.е. вероятность

$$P\{\eta < x\} = F(x) = 1 - 2^{-x} . \tag{3}$$

Представим η в виде $\eta = \eta_1 + \eta_2$, где $\eta_1 = [\eta]$ – целая часть η, а $\eta_2 = \{\eta\}$ – дробная доля η, и рассмотрим числа $1, 2, \dots [x]$.

Событие $\{\eta < x\} = \{\eta_1 + \eta_2 < x\}$ может осуществиться при выполнении хотя бы одного из следующих событий: $\{\eta_1 = 0; \eta_2 -$ любое$\}$, $\{\eta_1 = 1; \eta_2 -$ любое$\}$, ..., $\{\eta_1 = [x]-1; \eta_2 -$ любое$\}$, $\{\eta_1 = [x]; \eta_2 < x - \eta_1\}$

Отсюда по формуле полной вероятности получаем

$$P\{\eta < x\} = \sum_{k=0}^{[x]-1} P\{\eta_1 = k\} + P\{\eta_2 < x - \eta_1 \mid \eta_1 = [x]\} \; P\{\eta_2 = [x]\}. \tag{4}$$

Целочисленная величина η_1 принимает значение k с вероятностью

$$P\{\eta_1 = k\} = 2^{-(k+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{5}$$

Второе слагаемое в (4) может быть записано в виде

$$2^{-([x]+1)} P\{\eta_2 < \{x\}\} = 2^{-([x]+1)} F_2(\{x\}), \tag{6}$$

где через $F_2(x)$ обозначена функция распределения случайной величины η_2.

Подставляя (5) и (6) в (4) и учитывая (3), получим уравнение для определения $F_2(\{x\})$

$$1 - 2^{-x} = \sum_{k=0}^{[x]-1} 2^{-(k+1)} + 2^{-([x]+1)} F_2(\{x\}). \tag{7}$$

Геометрическую прогрессию в первом слагаемом правой части можно просуммировать

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{[x]-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2^{-[x]}}{1-½} = 1 - 2^{-[x]} .$$

Подставив это в (7) и умножив обе части равенства на $2^{[x]}$, получим

$$F_2(\{x\}) = 2(1 - 2^{-\{x\}})$$

или, обозначая $\{x\}$ через u $(0 \leq u \leq 1)$,

$$F_2(u) = 2(1 - 2^{-u}) \quad (0 \leq u \leq 1). \tag{8}$$

Итак, мы нашли функции распределения как целой, так и дробной частей случайной величины η и можем перейти к выработке алгоритмов для розыгрыша на ЭВМ случайных чисел, имеющих такие функции распределения.

III.

Для того чтобы сформулировать алгоритм получения последовательности случайных целочисленных величин $\eta_1^{(1)}, \eta_1^{(2)}, \dots$ имеющих показательное распределение (5), заметим следующее.

Любое число ξ из отрезка (0,1), если записать его в виде двоичной дроби, будет иметь вид

$$\xi = \epsilon_1 2^{-1} + \epsilon_2 2^{-2} + \epsilon_3 2^{-3} + \dots , \tag{9}$$

где ϵ_k $(k = 1, 2, \dots)$ принимает два значения 0 или 1. Далее, $\epsilon_1 = 1$ для чисел $\xi \subset (½, 1)$. Если $\xi \subset (¼, ½)$, то $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 1$ и т.д. Вообще, если некоторая двоичная дробь ξ принадлежит отрезку $(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}})$, то первые $(k-1)$ коэффициентов ϵ_i в записи (9) будут равны 0, а $\epsilon_k = 1$.

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_{k-1} = 0; \quad \epsilon_k = 1 .$$

Вероятность попадания случайного числа ξ, равномерно распределенного на отрезке (0,1), в какой-либо отрезок $(\alpha, \beta) \subset (0,1)$ по самому определению равномерности равна $\beta - \alpha$. Поэтому вероятность того, что в двоичной записи ξ будет k нулей после запятой, равна

$$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} .$$

Таким образом, целочисленная случайная величина, равная числу нулей после запятой в двоичной записи случайного числа ξ, равномерно распределенного в отрезке (0,1), имеет показательное распределение (5).

На ЭВМ, пользующихся полулогарифмическим представлением чисел с плавающей запятой, подсчитывать нужно число отрицательных единиц в порядке случайного числа ξ. Наиболее экономная реализация этой процедуры на ЭВМ, в которой под порядок отведено n разрядов, может быть проведена с помощью операций, осуществляющих:

1. Арифметический сдвиг порядка (без знака порядка) в первые n разрядов мантиссы; таким образом, порядок полученного числа ξ оказывается нулевым;

2. Присвоение числу $\vec{\xi}$ порядка n. В результате мы получим необходимое нам число η_1 (возможно, в ненормализованном виде, что несущественно для дальнейшего). В некоторых ЭВМ (например, М-20) отрицательные порядки представляются в дополнительном коде. В этом случае перед выполнением операций 1 -2 необходимо с помощью вычитания порядков перейти к прямому коду.

Перейдем далее к выработке алгоритма для розыгрыша числа η_2.

Для розыгрыша произвольной случайной величины α с функцией распределения $F_\alpha(x)$, имеющей обратную функцию $F_\alpha^{-1}(x)$, обычно пользуются известной (см., например, /3/) формулой

$$\alpha = F_\alpha^{-1}(\xi), \tag{10}$$

где ξ - равномерно распределена в отрезке (0,1).

Применяя (10) для розыгрыша η_2, получим с учетом (8) следующую формулу

$$\eta_2 = -\ell g_2 \left(1 - \frac{\xi}{2}\right). \tag{11}$$

Сравнение (11) и (2) показывает, что мы, казалось бы, только проиграли, перейдя от компактной формулы (2) к предлагаемой схеме с подсчетом числа нулей после запятой и вычислением по формуле (11). Но дело в том, что функция распределения (3), определенная на всей полуоси $x > 0$, не допускает сколько-нибудь удовлетворительной аппроксимации функциями, быстро вычисляемыми на ЭВМ, в то время как функция $F_2(x)$ определяется формулой (8) на конечном отрезке $0 \le x \le 1$ и может быть с хорошей точностью приближена, например, полиномом.

В связи с необходимостью обращать в дальнейшем функцию $F(x)$ для розыгрыша η по формуле /11/ приближение $F(x)$ полиномом уже второй степени приводит при вычислении $F(x)$ на ЭВМ к медленным операциям извлечения корня. Поэтому естественно аппроксимировать сразу функцию, обратную к (8)

$$f(x) = F_2^{-1}(x) = -\ell g_2\left(1 - \frac{x}{2}\right) \qquad 0 \le x \le 1. \tag{12}$$

В качестве аппроксимирующего полинома возьмем параболу

$$p(x) = ax^2 + bx + c.$$

Парметры b и c определяются из условия совпадения значений $p(x)$ и $f(x)$ в нуле и в 1.

Так мы получаем выражения для аппроксимирующей параболы в виде

$$p(x) = ax^2 + (1-a)x. \tag{13}$$

Значение параметра a должно быть выбрано так, чтобы разность $g(x;a) = p_{1T}(x) - f(x)$ стала наименьшей.

При чебышевском подходе, когда отыскивается наилучшее приближение $f(x)$ в равномерной метрике, мы должны подобрать такое $a = \hat{a}$, при котором достигается

$$G = \min_a \max_{0 \le x \le 1} |g(x,a)|. \tag{14}$$

Эта задача была решена в два этапа. Сначала, решая уравнение

$$\frac{\partial g(x;a)}{\partial x} = 0,$$

нашли две точки экстремума функции $g(x;a)$ по x.

$$x_{1;2}(a) = \frac{5a - 1 \pm \sqrt{9a^2 - 2a(4\ell g_2 e - 3) + 1}}{4a}.$$

После этого G находится как минимум функции

$$G(a) = \max(|g(x_1(a), a)|; \quad |g(x_2(a); a)|).$$

Значение $\hat{a}$, в котором этот минимум достигается, оказалось равным

$$\hat{a} = 0{,}34655538 \ \ldots,$$

а величина наименьшего уклонения

$$G = 0{,}007636287.$$

Теперь мы можем для розыгрыша случайной величины η_2 использовать аппроксимирующее уравнение (13). Вместо формулы (11) получаем возможность использовать соотношение

$$\eta_2 \approx \xi\,(\hat{a}\,\xi + 1 - \hat{a}),$$

требующее для своего вычисления всего три операции на трех- или двухадресных ЭВМ.

Для проверки того, насколько существенным является выбор метрики, в которой можно минимизировать $g(x;a)$, найдем значение a, минимизирующее $g(x;a)$ в метрике L_2.

Возводя в квадрат и интегрируя $g(x;a)$, нетрудно получить явное выражение для функции

$$G(a) = \int_0^1 g(x;a)\,dx = \frac{1}{30}a + Ba + C, \qquad (15)$$

где B и C являются константами, $B = \frac{3}{2} - \frac{19}{18}\lg_2 e$.

Парабола (15) имеет минимум в точке

$$\hat{a}_1 = \frac{95}{6}\lg_2 e - \frac{45}{2} = 0{,}34267148\ldots$$

Ниже описаны применявшиеся критерии и приведены результаты проверки качества последовательностей случайных чисел, получаемых при значениях параметра a, равных $\hat{a}$ и $\hat{a}_1$ (см. таблицу 1). Различия между этими двумя значениями параметров оказались мало значимыми с точки зрения применяемых тестов. Значения χ^2, определяющие величину уклонения закона распределения получаемых чисел и показательного закона распределения, в обоих случаях укладывались в допустимые пределы.

По этой же причине оказалось ненужным увеличение степени аппроксимирующего полинома.

Дополнительные исследования проводились для последовательности, образованной при значении $a = \hat{a}_1$, дающей несколько более лучшие показатели χ^2.

Итак, объединяя алгоритмы розыгрыша случайных величин η_1 и η_2, получаем следующую формулу для преобразования случайной последовательности чисел $\{\xi_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, равномерно распределенных на интервале $(0,1)$ в случайную последовательность чисел η_k с показательным законом (1)

$$\eta_k = \frac{\ln 2}{\lambda}\left[p_{2k} + \xi_{2k+1}(a\,\xi_{2k+1} + b)\right] \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad (16)$$

где p_{2k} – число отрицательных единиц в двоичном порядке случайного числа ξ_{2k}, $a = 0{,}34267148$, $b = 0{,}657\,32852$.

IV.

Статистическая проверка последовательности случайных чисел, полученных по формуле (16) при $\lambda = 1$, проводилась с помощью следующей группы тестов.

По мере получения случайные числа η_k заносились в гистограмму, состоящую из пятидесяти интервалов, разбивающих отрезок от 0 до 5 с шагом 0,1 и пятьдесят первого интервала для случаев $\eta > 5$. Через каждые 1.000 испытаний вычислялись два значения χ^2

$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^{51} \frac{(\nu_i - 1000\,p_i)^2}{1000\,p_i}, \qquad \chi_2^2 = \sum_{i=1}^{51} \frac{(\nu_i - n \cdot 1000\,p_i)^2}{n \cdot 1000\,p_i} \quad (n = \overline{1,10}).$$

Здесь ν_i – число случаев, когда $\frac{i-1}{10} < \eta < \frac{i}{10}$, $p_i = \exp(-\frac{i-1}{10}) - \exp(-\frac{i}{10})$. Кроме того были найдены значения χ_2^2 для $n = 20$ и $n = 25$.

Во всех случаях выход величин χ^2 за 1%-й уровень значимости, равный 76,2 для χ^2-распределения с 50-ю степенями свободы, не был зафиксирован.

Результаты вычислений, проведенных для последовательностей, полученных при значениях параметра $a = \hat{a}$ и $a = \hat{a}_1$, приведены в таблице 1.

Для проверки случайности последовательности при $a = \hat{a}_1$ по известному критерию серий /7/ исследовалось чередование нулей и единиц в первых десяти двоичных разрядах преобразованной последовательности $\gamma_k = \exp(-\eta_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Первые 10 разрядов двоичного числа γ_k были пронумерованы слева номерами $\ell = 1, 2, \ldots, 10$. В каждом ℓ-м разряде при переходе от γ_k к γ_{k+1} подсчитывалось число переходов от 0 к 1 и от 1 к 0, т.е. число серий R_ℓ, а также максимальное число подряд идущих нулей или единиц, т.е. максимальная длина серии L_ℓ. Кроме этого числа γ_k заносились в гистограмму на 16 интервалов от 0 до 1.

Было выработано 3 блока по 1024 числа γ_k в каждом.

Согласно /7/, для последовательности из 1024 чисел все R_ℓ должны иметь нормальное распределение с параметрами 513 и 16, т.е. величина

$$\chi_R^2 = \sum_{\ell=1}^{10} \left(\frac{R_\ell - 513}{16}\right)^2$$

должна иметь распределение χ^2 с десятью степенями свободы.

В каждом блоке также подсчитывалась величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{16} \frac{(\nu_i - 64)^2}{64}.$$

Полученные значения величин χ_R^2 и χ^2 приведены в таблице 2. Величины L_ℓ при всех ℓ ни в одном блоке не превысили 13, что вполне совпадает с оценками, приведенными в /7/.

Все вычисления проводились с использованием описанного в /6/ четырехкомандного генератора случайных чисел, равномерно распределенных в отрезке (0,1).

Таблица 1

N	$\hat{a} = 0{,}34655538$		$\hat{a}_1 = 0{,}34267148$	
	χ_1^2	χ_2^2	χ_1^2	χ_2^2
1000	43,81	43,81	42,48	42,48
2000	56,25	47,71	56,04	46,80
3000	55,04	53,53	52,19	51,50
4000	57,34	52,15	57,52	51,03
5000	43,84	44,22	46,44	42,21
6000	45,35	43,02	46,10	42,03
7000	49,44	44,42	49,59	43,93
8000	55,39	50,71	54,58	50,67
9000	49,15	57,53	48,87	56,82
10000	57,52	65,17	58,08	64,68
20000	-	73,73	-	72,80
25000	-	65,70	-	64,53

Результаты проверки η_k, полученные по формуле (16). 1% уровень значимости равен 76,2.

Таблица 2

№ блока (n = 1024)	$\hat{a}_1 = 0{,}34267148$	
	χ^2	χ_R^2
1 1	13,56	16,14
2	9,84	4,24
3	15,84	2,14
1% уровень значимости	30,6	23,20

Результат проверки на случайность последовательности $\gamma_k = \exp(-\eta_k)$

Литература

1. А.Д. Франк-Каменецкий. О решении кинетического уравнения методом Монте-Карло. Журн. выч. матем. и мат. физ. т.3, № 4, 1963, 766-768.
2. В.Ф. Вишневский и др. Метод вычисления геометрической эффективности регистрации событий в пузырьковой камере. Препринт ОИЯИ Р-1489, Дубна 1964.
3. Н.П. Бусленко, Ю.А. Шрейдер. Метод статистических испытаний. Физматгиз, М, 1961.
4. Д.И. Голенко. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. Физматгиз, М., 1965.
5. Herman Kahn. Applikations of Monte Carlo. The RAND Corporation RM-1237, AEC Apr. 56 .
6. Г.А. Ососков. Использование методов статистических испытаний для решения задач ядерной физики в Вычислительном центре ОИЯИ. Препринт ОИЯИ 2005, Дубна 1965.
7. И.В. Дунин-Барковский, Н.В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. ГИТТЛ, М., 1955.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 марта 1966 г.