

M-151

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2574



Г.И. Макаренко, Г.А. Ососков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА  
ТОЧЕК, ИЗМЕРЯЕМЫХ НА ТРЕКЕ

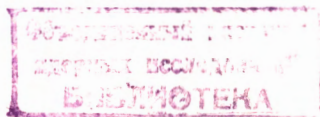
**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР**

**1966**

Г.И. Макаренко, Г.А. Ососков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА  
ТОЧЕК, ИЗМЕРЯЕМЫХ НА ТРЕКЕ

4055/2 up.



## В в е д е н и е

Для экспериментаторов весьма важным является вопрос о том, сколько точек надо измерить на треке для его обработки.

Понятно, что чем большее количество точек измеряется, тем точнее определяется радиус кривизны  $R$  трека, а следовательно, и импульс  $P$  частицы. Однако при обработке экспериментальных данных на электронных вычислительных машинах (ЭВМ) в целях экономии машинного времени желательно обходиться необходимым минимумом данных или, другими словами, измерять на треке, а затем обрабатывать такое количество точек (наименьшее), которое обеспечивало бы с определенным уровнем надежности заданную величину относительной погрешности радиуса кривизны.

Немаловажным также является и вопрос о расположении измеряемых точек на треке (нужно ли их располагать равномерно вдоль трека или как-то группировать?).

Насколько нам известно, до настоящего времени не проводилось статистических исследований по этим вопросам. Экспериментаторы пользуются лишь эмпирическими правилами о числе точек (см. <sup>/1/</sup>) и некоторыми теоретическими соображениями о их расположении (см. <sup>/2-4/</sup>).

В настоящей заметке на основании статистической обработки более чем 1200 треков из пропановой 24-литровой камеры, измеренных на микроскопе УИМ-21, показывается, что при определенном расположении измеряемых точек (аналогично тому, как это предлагается в <sup>/4/</sup>) можно уменьшить их количество. При этом сохраняется уровень надежности в определении относительной погрешности радиуса кривизны. В заключение даются некоторые рекомендации о выборе количества и о расположении измеряемых точек на обрабатываемом треке.

### § 1. Выбор методики

В соответствии с широко распространенным способом (см., например, <sup>/1/</sup>) мы предполагаем, что радиус кривизны трека вычисляется путем замены трека параболой с последующим определением ее параметров методом наименьших квадратов. Считаем,

что радиус кривизны трека, вычисленный после измерения на нем  $N$  точек, является точным. Обозначим его через  $R_0$ . Затем выбрасываем по определенному правилу одну точку за другой, и каждый раз вновь обрабатываем трек вышеупомянутым способом по программе, имеющейся в ВЦ ОИЯИ. Каждый раз находим величину радиуса  $R_k$  (где индекс  $k$  означает количество оставшихся на треке точек), а также величину относительной погрешности  $\frac{\Delta R_k}{R_k}$ , где  $\Delta R_k = |R_0 - R_k|$ .

Сформулируем точно правило выброса точек.

1. Сначала устанавливаем, какие точки должны остаться на треке после всех выбросов (эти точки будем называть неподвижными). В случае, когда  $N$  четно,  $N = 2a$ , и в случае, когда  $N$  нечетно,  $N = 2a + 1$  ( $a = 1, 2, \dots, 9$ ), в качестве неподвижных мы оставляем точки с номерами  $1, a, a + 1$  и  $N$ .

Такое расположение неподвижных точек нам представляется наиболее выгодным, так как даже по трем точкам — двум крайним и средней — можно провести параболу, которая в первом приближении аппроксимирует трек.

2. Далее производится выброс сопряженных точек поочередно с левой и правой половины трека. Точки с номерами  $l$  и  $p$  мы называем сопряженными, если  $l + p = N + 1$ .

Замечание. Если одна из точек пары  $(l, p)$  является неподвижной, то она, естественно, не выбрасывается. Например, при  $N = 15$  неподвижными точками будут 1, 7, 8 и 15. Имеем пары сопряженных точек  $(1, 15)$ ,  $(2, 14)$ ,  $(3, 13)$ ,  $(4, 12)$ ,  $(5, 11)$ ,  $(6, 10)$  и  $(7, 9)$ . Пара  $(1, 15)$  не выбрасывается, так как каждая из двух точек неподвижная, а из пары  $(7, 9)$  выбрасывается только точка с номером 7, а точка с номером 9 остается, так как она неподвижная.

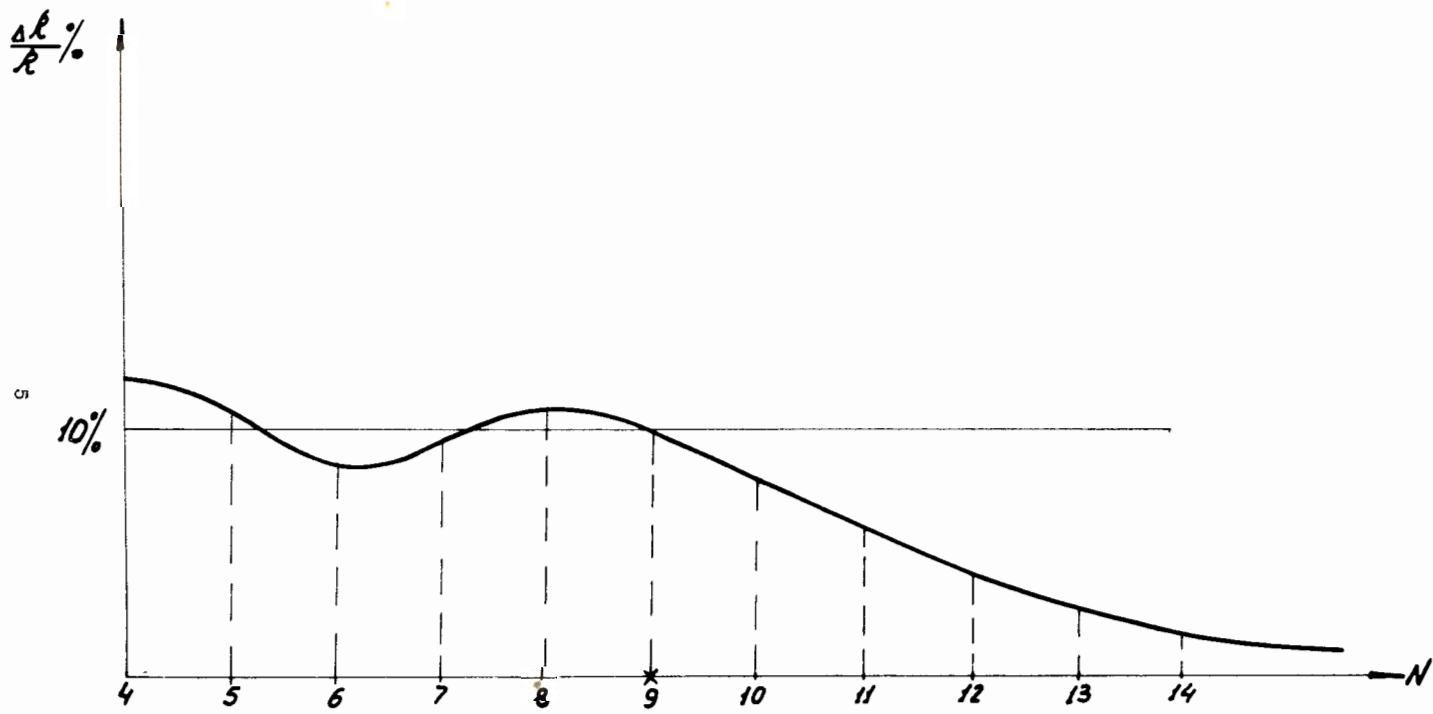
Все треки, прошедшие описанную выше процедуру выброса, мы разбили на 10 групп в зависимости от их длины  $L$  и первоначальной величины радиуса кривизны  $R_0$  (см. таблицу 1).

Далее для каждого трека находим характеристическое число  $M_{jk}$  — это наименьшее число точек на треке, начиная с которого выполняется условие

$$\frac{\Delta R_i}{R} \leq 10\% \quad (1)$$

для всех  $i \geq M_{jk}$ . Здесь  $j$  означает номер трека в  $K$ -й группе ( $K = 1, 2, \dots, 10$ ), так что  $j = 1, 2, \dots, r_k$ , где  $r_k$  — количество треков в  $K$ -й группе.

Рассмотрим пример, приведенный на рис. 1.



Р и с. 1

В этом примере  $M_{jk} = 9$  (но не 9!). Первоначально, не имея никаких сведений о характере распределения величин  $M_{jk}$ , мы предположили его нормальным.

Т а б л и ц а 1

№ гр.	$R_0$	$L$	$r_k$	$m_k$	$P^{(k)}_{90\%}$
1.	$R_0 \leq 100$ см	$L \leq 10$ см	64	6,2	12
2.		$L > 10$ см	38	4,1	5
3.	$100 < R_0 \leq 300$ см	$L \leq 10$ см	40	6,1	10
4.		$L > 10$ см	77	4,8	8
5.	$300 < R_0 \leq 500$ см	$L \leq 15$ см	20	8,4	15
6.		$L > 15$ см	36	4,7	8
7.	$500 < R_0 \leq 1000$ см	$L \leq 15$ см	32	6,8	11
8.		$L > 15$ см	47	4,9	7
9.	$R_0 > 1000$ см	$L \leq 20$ см	71	6,0	9
10.		$L > 20$ см	51	4,6	6

Выборочные оценки параметров, определяющих нормальное распределение - средние значения  $M_k$  и стандартные отклонения  $\sigma_{M_k}$ , - подсчитывались по формулам:

$$M_k = \frac{1}{r_k} \sum_{j=1}^{r_k} M_{jk} \quad (2)$$

$$\sigma_{M_k} = \sqrt{\frac{1}{r_k - 1} \sum_{j=1}^{r_k} M_{jk}^2 - \frac{r_k}{r_k - 1} M_k^2} \quad (3)$$

Результаты вычислений величин  $M_k$  приведены в таблице 1 (см. 5-й столбец).

При подсчете величин  $\sigma_{M_k}$  было обнаружено, что гипотеза о нормальном распре-

делении характеристических чисел  $M_{jk}$  не подтверждается. Для того, чтобы составить представление об истинном распределении  $M_{jk}$ , были построены гистограммы, две из которых (для первой и третьей групп треков) приведены для примера на рис. 2.

Гистограммой мы называем таблицу, показывающую, сколько раз число  $M_{jk}$  принимало значение 4,5 ..., 18. Если через  $\nu_{ik}$  обозначить содержимое  $i$ -й ячейки

$k$ -й гистограммы ( $i = 1, 2, \dots, 15$ ), то это означает, что  $M_{jk}$  приняло значение  $i + 3$  ровно  $\nu_{ik}$  раз. Отметим, что  $\sum_{i=1}^{15} \nu_{ik} = r_k$ . На гистограммах виден резко асимметричный характер распределения. По гистограммам для каждой из 10 групп были найдены  $P_{q\%}^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, 10$ ) - оптимальные числа точек на треке, которые обеспечивают заданную относительную погрешность с уровнем надежности  $q$  %.

Например, пусть подсчеты дали нам  $P_{90\%}^{(k)} = 12$ . Это означает, что если на любом треке

$k$ -й группы взять 12 (или больше 12) точек, то в 90 случаях из 100 мы гарантируем, что относительная погрешность  $\frac{\Delta R}{R}$  не будет превышать 10%.

Числа  $P_{q\%}^{(k)}$  находятся из соотношений

$$\sum_{i=P_{q\%}^{(k)}}^{15} \nu_{ik} \leq \frac{r_k}{100} (100 - q) < \sum_{i=P_{q\%}^{(k)} - 3}^{15} \nu_{ik} \quad (4)$$

При  $q = 90\%$  с помощью десяти гистограмм и соотношения (4) были определены величины  $P_{90\%}^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, 10$ ). Они помещены в последнем столбце таблицы 1.

На рис. 2 наглядно показано, как получаются величины  $P_{q\%}^{(1)}$  и  $P_{q\%}^{(3)}$  для  $q = 90\%$ . Часть каждой гистограммы, составляющая 90% всех случаев, не заштрихована. Абсцисса, с которой начинается заштрихованная часть, и дает нам оптимальное число точек  $P_{90\%}^{(1)}$  и  $P_{90\%}^{(3)}$ .

Сразу же можно отметить, что получающееся количество рекомендаций по оптимальному числу точек слишком велико (десять) и оператору, занимающемуся просмотром фотографий треков, было бы трудно их запомнить.

Кроме того, статистика по группам оказалась бедной (в среднем 48 треков), а распределение треков по группам - неравномерным (от 20 до 77 в группе).

Таким образом, в результате первых расчетов напрашиваются выводы:

1. Надо сократить число групп, например, до 6.
2. Необходимо увеличить статистику в каждой группе.
3. Разбиение треков на группы в зависимости от их длины должно производиться не наугад, а с учетом распределения треков по  $L$ . Для этого необходимо построить гистограммы распределения по  $L$  для каждой из групп выбранных радиусов.

Т а б л и ц а 2

Распределение треков по их длине

$L$ см	$R$ см	$R_0 < 100$	$100 \leq R_0 < 300$	$R_0 \geq 300$
4		41	13	21
5		9	2	12
6		20	7	5
7		11	5	7
8		9	6	20
9		10	15	10
10		18	24	8
11		18	8	8
12		7	7	17
13		12	16	3
14		9	11	17
15		8	13	21
16		6	1	10
17		6	9	16
18		4	2	14
19		-	12	6
20		2	4	9
21		-	-	-
22		-	-	-
23		-	-	-
24		-	-	-
25		-	-	-
26		17	49	146



## § 2. Статистическая обработка материала и выводы

Для очередной группы треков (760 штук) процедура выброса точек была несколько видоизменена, однако основное требование всегда соблюдалось, а именно: неподвижные точки распределялись на треке не равномерно, а так, что часть их оставалась на концах, а часть в середине. Например, если на треке оставалось всего 4 точки, то две из них были в середине и по одной на концах; если оставалось 7 точек, то по две распределялось на концах и 3 в середине трека; при 9 (соответственно при 12) оставшихся точках они располагались по 3 (соответственно по 4) на концах и 3 (соответственно 4) в середине трека.

Была составлена специальная программа на ЭВМ, с помощью которой опробовано несколько вариантов разбиения треков на группы в зависимости от величин  $R_0$  и  $L$ .

Мы остановились на шести группах, которые получились следующим образом: все множество треков было разбито сначала на три группы по  $R_0$ . Затем в каждой группе была подведена статистика распределения треков по их длине  $L$  (см. таблицу 2) и выбрано такое значение  $L$ , чтобы каждая из групп разбивалась этим значением примерно на две равные подгруппы. В таблице 2 напротив таких значений  $L$  проведены пунктирные линии.

Отметим, что при выбранном разбиении группы получились достаточно большими и отличаются одна от другой менее чем в два раза (в наилучшем случае), в то время как при обработке первой партии треков (476 штук) группы 4 и 5, например, отличались почти в 4 раза.

Для каждой группы были построены гистограммы (см. рис. 3), показывающие число случаев  $n_k$ , когда в  $K$ -й группе измерение  $i$  точек на треке приводит к ошибке  $\frac{\Delta R}{R}$ , не превосходящей заданной величины (5%, 10%, 20%). Как и на рис. 2, на каждой гистограмме часть, составляющая  $q = 90\%$  всех случаев, не заштрихована. Подробная характеристика групп приведена в таблице 3.

При внимательном рассмотрении таблицы 3, содержащей результаты расчета оптимального количества точек, можно сделать следующие выводы.

1. Таблица 3 дает количественное указание о том, сколько именно точек надо измерять в различных практических случаях. Например, если на треке I группы будем измерять 10 точек, располагая их по 3 на концах и 4 в середине, то в 90 случаях из 100 относительная ошибка  $\frac{\Delta R}{R}$  не превысит 10%.

Тот же результат следует ожидать, если измерять 6 точек на треках III группы, 8 точек - на треках II группы и т.д. (см. 6-ю колонку таблицы 3).

Т а б л и ц а 3

№№ гр.	$R_0$ (см)	$L$ (см)	КОЛ-ВО ТРЕКОВ В ГРУП.	$q = 90\%$			$q = 95\%$		
				$\frac{\Delta R}{R} \leq 20\%$	10%	5%	20%	10%	5%
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	$R_0 < 100$	$L \leq 9$	99	8	10	12	10	12	12
II	$R_0 < 100$	$L > 9$	108	6	6	10	11	13	13
III	$100 \leq R_0 < 300$	$L \leq 13$	103	7	8	11	8	10	11
IV	$100 \leq R_0 < 300$	$L > 13$	102	4	5	10	4	8	13
V	$R_0 > 300$	$L \leq 17$	171	8	11	12	11	12	14
VI	$R_0 \geq 300$	$L > 17$	177	6	8	10	8	9	15

Итак, таблица 3 при измерениях точек на треках при помощи микроскопа может быть использована следующим образом: сначала совсем грубо измеряем длину трека  $L$  и радиус кривизны  $R$  (например, по шаблону) и далее по таблице 3 определяем количество точек, необходимое для того, чтобы  $\frac{\Delta R}{R}$  не превышало заданной величины относительной ошибки. При практическом использовании таблицу 3 можно сократить (например, из 5-10 колонок оставить только 6-ю и 7-ю).

II. Широко известно положение, что при равномерном распределении точек на треке относительная ошибка  $\frac{\Delta R}{R}$  убывает с ростом числа  $N$  измеренных точек, как  $\frac{C}{\sqrt{N}}$  ( $C = \text{const}$ ) (см., например, [2,3]). Таблица 3 показывает, что в нашем случае ("специальное" неравномерное распределение точек) величина  $\frac{\Delta R}{R}$  убывает с ростом  $N$  быстрее, чем  $\frac{C}{\sqrt{N}}$ .

Таким образом, целесообразно точки на треке измерять не равномерно, а группами: на концах и в середине трека. Это позволит уменьшить количество измеряемых точек, не увеличивая при этом относительной погрешности  $\frac{\Delta R}{R}$ .

III. Для измерения радиуса кривизны треков с высокой относительной точностью (5%) в случае  $R_0 > 300$  см необходимо измерять 14-15 точек. На первый взгляд это число кажется слишком большим, особенно в случае длинных треков. Однако следует учесть, что при  $R > 300$  см трек представляет собой почти прямую линию, и поэтому легко ошибиться в знании радиуса кривизны. Этим и объясняется требование об измерении большого числа точек.

Считаем необходимым сделать следующие замечания:

1. Таблица 3, на основании которой были сделаны наши выводы об оптимальном количестве точек на треке, получена в результате статистической обработки представленных авторам 760 треков различной длины и имеющих различные радиусы кривизны.

Для достижения большей надежности результатов целесообразно обработать по указанной схеме большее количество треков, например, 3-4 тысячи.

2. В связи с переходом от измерений на микроскопах к измерениям на полуавтоматах имеет смысл составить аналогичную таблицу для обработки треков с больших пузырьковых камер.

В заключение мы выражаем благодарность руководителю группы ВЦ Е.А. Логиновой за внимание к работе, К.Н. Давиловой за составление программы по выбросу точек, Г.А. Абрамовой и Н.А. Богачевой за помощь в оформлении результатов.

В процессе работы над этой заметкой мы часто обсуждали различные вопросы с Е.Н. Кладницкой. Мы благодарим ее за ценные советы.

#### Л и т е р а т у р а

1. Е.Н. Кладницкая. Материалы совещания по методике пузырьковых камер. Препринт ОИЯИ, 796, Дубна, 1961.
2. В.Г. Гришин, Э.П. Кистенев, Л.И. Ленилова, В.И. Мороз, Му Цзюнь. Измерение энергетических и угловых характеристик электронов и  $\gamma$ -квантов в пропановой пузырьковой камере. Препринт ОИЯИ Р-2277, Дубна, 1965.
3. L.Michejda. Report No. 386/VI. Institute of Nuclear Research, Warsaw, 1963.
4. R.L. Gluckstern. Nuclear Instruments and Methods, 24, 381-389 (1963).
5. Б.Л. Ван дер Варден. Математическая статистика, ИЛ, М., 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел  
12 февраля 1966 г.

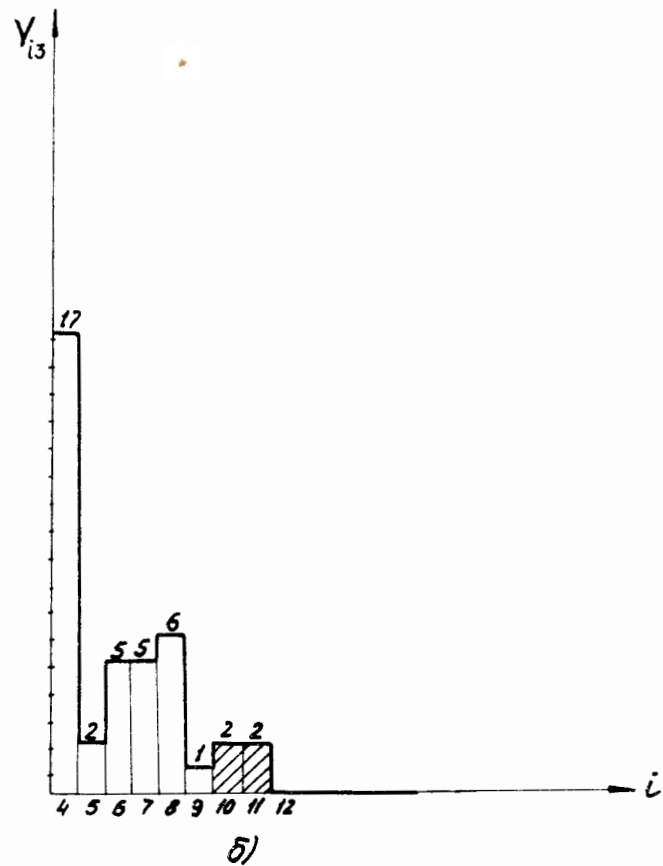
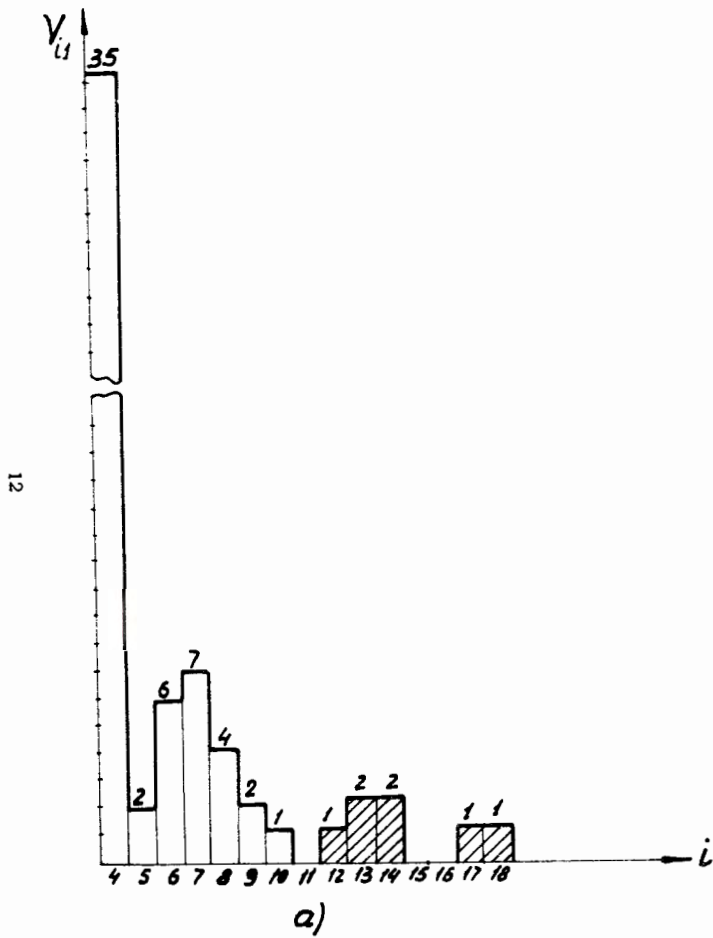


Рис. 2

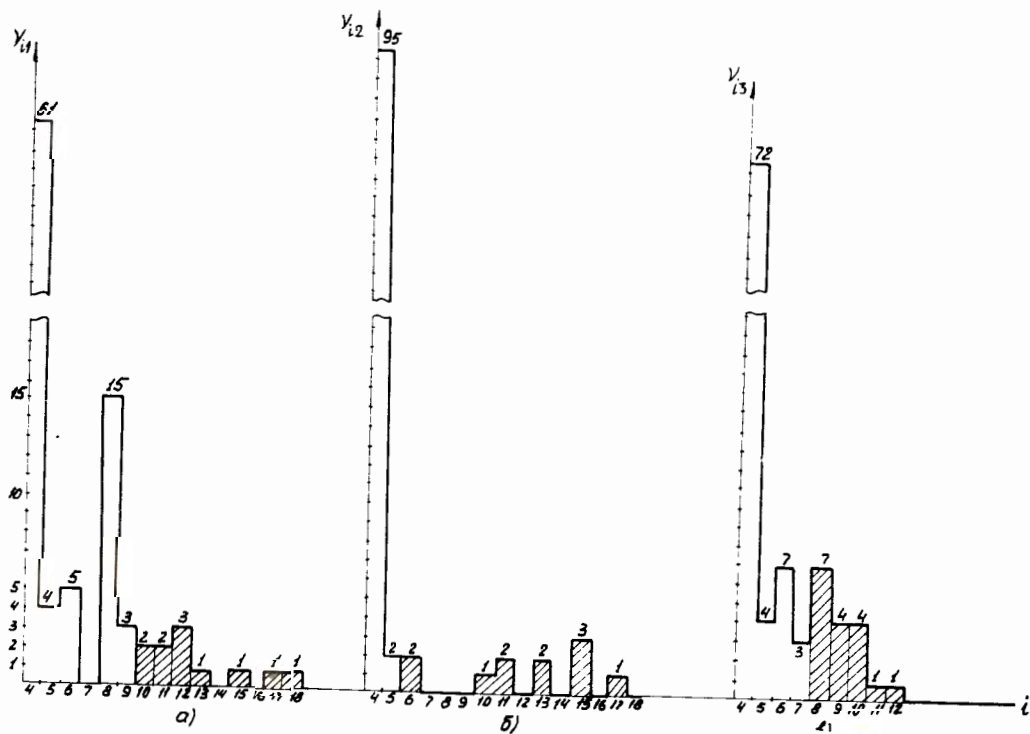


Рис. 3

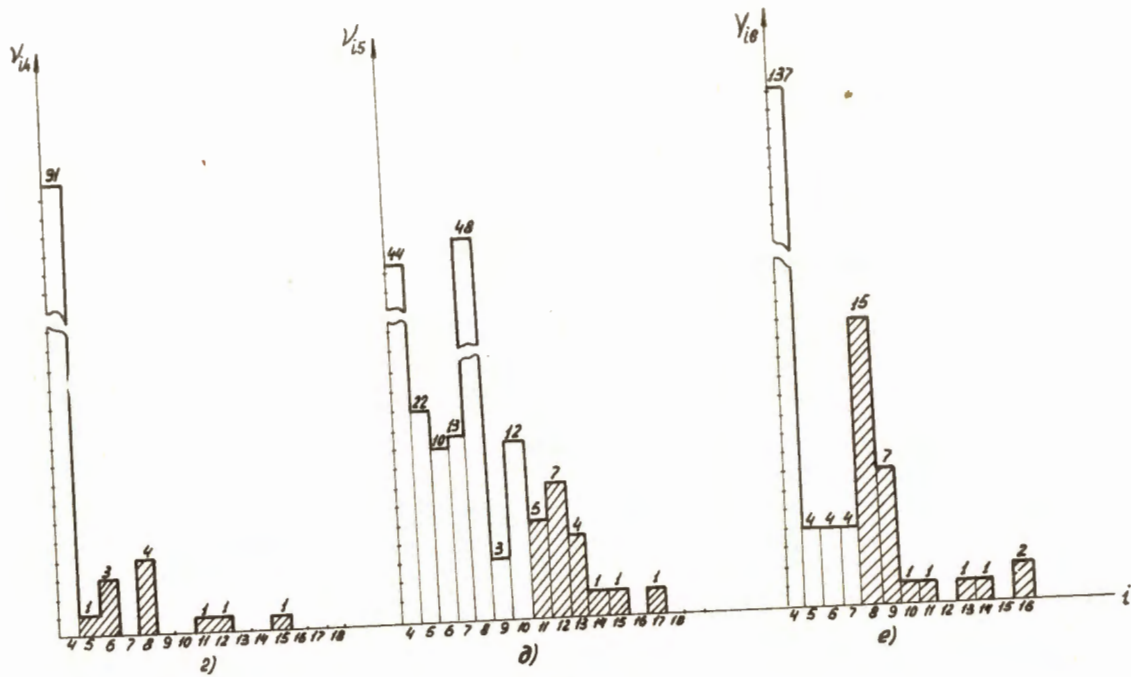


Рис. 3