

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2571

Экз. чит. зала



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Нгуен Ван Хъеу

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ СИММЕТРИИ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

ЧАСТЬ I

ТЕОРИЯ ГРУПП.
КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ СИММЕТРИИ

1966

2571

Нгуен Ван Хьеу

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ СИММЕТРИИ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ
ЧАСТЬ I
ТЕОРИЯ ГРУПП.
КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ СИММЕТРИИ

**Научно-техническая
библиотека
ОИЯИ**

О г л а в л е н и е

Стр.

Г л а в а I

Группы и представления групп

I . Основные понятия из теории групп	
§ 1. Определение групп	7
§ 2. Подгруппы	12
§ 3. Прямое произведение	13
§ 4. Инвариантные подгруппы и фактор-группы	16
§ 5. Гомоморфизм, изоморфизм и автоморфизм	17
II . Группы Ли и алгебры Ли.	
§ 1. Топологические группы. Компактные и некомпактные группы	22
§ 2. Группы Ли	25
§ 3. Алгебра Ли	29
III . Представления групп Ли	
§ 1. Определение представлений групп Ли	32
§ 2. Унитарные представления	34
§ 3. Неприводимые представления	36
§ 4. Инфинитезимальные операторы. Сопряженные и контраградиентные представления. Произведение представлений	39
IV . Группа $SU(n)$ и ее представления	
§ 1. Генераторы группы $SU(n)$ и ее основные представления	45
§ 2. Спиноры высших рангов	47
§ 3. Неприводимые представления	49
Литература	55

Г л а в а II

Группа $SU(2)$ и изотопическая инвариантность

I . Неприводимые представления группы $SU(2)$	
§ 1. Группа вращений и состояния с определенными моментами	56
§ 2. Некоторые спиноры низших рангов	59
§ 3. Векторы, тензоры и спин-тензоры	64
§ 4. Разложение произведения неприводимых представлений на неприводимые. Коэффициенты Клебша-Гордана	66

II .	Изотопическая инвариантность сильных взаимодействий	
§ 1.	Изотопические мультиплеты	68
§ 2.	Изотопическая инвариантность лагранжиана взаимодействий	72
§ 3.	Изотопическая инвариантность и распады резонансов	75
§ 4.	Изотопическая инвариантность амплитуд рассеяния	80
§ 5.	G - четность	83
III.	Изотопические свойства электромагнитных взаимодействий	
§ 1.	Электромагнитный ток	84
§ 2.	Форм-факторы и амплитуды электромагнитных процессов	85
§ 3.	Нарушение изотопической инвариантности электромагнитным взаимодействием	87
IV.	Изотопические свойства слабых взаимодействий	
§ 1.	Сохранение векторного тока и изотопические свойства тока с $\Delta S=0$	89
§ 2.	Изотопические свойства тока с $\Delta S = \pm 1$	93
§ 3.	Изотопические свойства нелептонных слабых взаимодействий с $\Delta S \neq 0$	96
	Литература	99
Г л а в а III		
	Группа $SU(3)$ и классификация элементарных частиц в унитарной симметрии	
	Введение	100
I .	Группа $SU(3)$ и ее представления	
§ 1.	Генератор группы $SU(3)$	101
§ 2.	Неприводимые представления группы $SU(2)$	103
§ 3.	Некоторые спиноры низших рангов	106
§ 4.	Подгруппы $SU(2)$	110
§ 5.	Дискретные преобразования	113
II .	Классификация элементарных частиц и резонансов в унитарной симметрии	
§ 1.	Унитарные мультиплеты	115
§ 2.	Мультиплеты подгрупп $SU(2)$ и дискретные преобразования	118
§ 3.	Массовая формула и смешивание	122
III .	Модель кварков с дробными зарядами и модели унитарной симметрии без дробных зарядов	
§ 1.	Модель с триплетом фундаментальных частиц	127
§ 2.	Модели с четырьмя фундаментальными частицами	130

§ 3.	Модели с несколькими триплетами кварков	133
	Л и т е р а т у р а	136
Г л а в а IV		
Унитарная симметрия и сильные взаимодействия		
I .	Трехлинейные лагранжианы и трехчастичные вершины	
§ 1.	Трехлинейные лагранжианы взаимодействия	137
§ 2.	Соотношения между константами распадов резонансов	141
§ 3.	Соотношения между вероятностями	144
§ 4.	Следствия сохранения U -спина и V -спина	148
II .	Амплитуды процессов рассеяния и рождения частиц	
§ 1.	Унитарная структура амплитуд процессов рассеяния и рождения частиц в сильных взаимодействиях	149
§ 2.	Соотношения между амплитудами процессов	158
§ 3.	Сохранение U -спина и V -спина	163
§ 4.	Сравнение некоторых соотношений между сечениями с опытом	165
	Л и т е р а т у р а	169
Г л а в а V		
Электромагнитные и слабые взаимодействия в унитарной симметрии		
I .	Электромагнитные взаимодействия	
§ 1.	Электромагнитный ток в унитарной симметрии	170
§ 2.	Электромагнитные вершины	172
§ 3.	Соотношения между вероятностями распадов	178
§ 4.	Соотношения между амплитудами фоторождения	182
§ 5.	Электромагнитное расщепление масс частиц в изотопических мультиплетах	183
II .	Слабые взаимодействия	
§ 1.	Токи слабых взаимодействий в унитарной симметрии	185
§ 2.	Лептонные распады барионов	191
§ 3.	Рождение мезонов и барионов при столкновении нейтрино и анти-нейтрино с нуклоном	196
§ 4.	Нелептонные распады гиперонов и мезонов	200
	Л и т е р а т у р а	206
Г л а в а VI		
Спиновая и унитарная симметрия $SU(6)$		
I .	Группа $SU(6)$ и ее неприводимые представления	
§ 1.	Группа $SU(6)$ и подгруппы $SU(3) \times SU(2), SU(4) \times SU(2)$	208
§ 2.	Генераторы	211

§ 3. Некоторые неприводимые представления группы $SU(6)$	213
§ 4. Разложение неприводимых представлений группы $SU(6)$ на неприводимые представления подгрупп $SU(3) \times SU(2)$	215
§ 5. Разложение неприводимых представлений группы $SU(6)$ на неприводимые представления подгруппы $SU(4) \times SU(2)$	218
§ 6. Классификация барионов и мезонов в симметрии $SU(6)$	221
II . Некоторые следствия симметрии $SU(6)$	
§ 1. Электромагнитные свойства барионов	224
§ 2. Электромагнитные распады мезонных резонансов	228
§ 3. Мезон-барионное и барион-барионное рассеяния	230
III . Возможные интерпретации симметрии $SU(6)$	
§1. Симметрия $SU(6)$ как динамическая симметрия	232
§ 2. Симметрия $SU(6)$ и модель кварков	233
IV . Классификация новых мезонных и барионных резонансов по высшим представлениям группы $SU(6)$.	
§ 1. Мезонные резонансы	235
§ 2. Барионные резонансы	239
Л и т е р а т у р а	240

ГЛАВА I.
ГРУППЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП
I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИЗ ТЕОРИИ ГРУПП

§ I. Определение групп

Группой называется всякое множество G элементов, в котором определена групповая операция, называемая также групповым действием или групповым умножением, ставящая в соответствие каждой паре элементов a и b из множества G некоторый элемент из G , обозначаемый через ab , причем эта групповая операция удовлетворяет следующим аксиомам:

I. Ассоциативность: для любых трех элементов a , b и c из G имеет место соотношение

$$(ab)c = a(bc);$$

2. Существование левой единицы: существует такой элемент e , что $ea = a$ для любого элемента a из G .

3. Существование левого обратного: для любого элемента a из G существует такой элемент a^{-1} , что

$$a^{-1}a = e.$$

Можно показать (см. /1,2/), что левая единица является также правой единицей: $ae = a$, и левый обратный элемент является одновременно и правым обратным: $aa^{-1} = e$.

Если множество G конечно, т.е. содержит конечное число элементов, то группа G называется конечной и число элементов группы называется её порядком. В противном случае группа G называется бесконечной.

Если для любых элементов a и b из группы G выполняется равенство $ab = ba$, то группа называется коммутативной или абелевой. В этом случае вместо произведения ab пишется сумма $a + b$, групповая операция называется сложением, обратный элемент a^{-1} обозначается через $-a$, а единичный элемент — через 0.

Примеры

I. Совокупность всех перестановок n целых чисел $1, 2, \dots, n$ образует группу, причем, если g_1 и g_2 обозначают некоторые перестановки, то произведением $g_1 g_2$ является перестановка, которая получается, если сначала произвести перестановку g_2 , а затем перестановку g_1 . Эта группа конечна и называется группой перестановок или симметрической группой. Её порядок равен $n!$.

2. Совокупность всех действительных чисел образует коммутативную группу, причем групповой операцией служит обычное сложение чисел. Мы говорим при этом, что действительные числа образуют группу относительно сложения. Аналогично, векторы в n -мерном векторном пространстве образуют коммутативную группу относительно векторного сложения. Совокупность всех трансляций в n -мерном векторном пространстве

$$x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = x_\alpha + a_\alpha \quad (1)$$

также образует коммутативную группу, причем произведением двух трансляций на векторы a_α и b_α является трансляция на вектор $a_\alpha + b_\alpha$.

3. Совокупность всех ортогональных вещественных матриц $n \times n$, т.е. матриц O с вещественными элементами $O_{\alpha\beta}$, $1 \leq \alpha, \beta \leq n$, удовлетворяющими условию

$$O_{\alpha\beta} O_{\beta\gamma}^T = O_{\alpha\beta} O_{\beta\gamma} = O_{\alpha\beta}^T O_{\beta\gamma} = O_{\beta\alpha} O_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}, \quad (2)$$

или в матричном виде:

$$O O^T = O^T O = I, \quad (2')$$

где I - единичная матрица, образует группу относительно умножения матриц, так как если O_1 и O_2 - ортогональные матрицы, то произведение $O_1 O_2$ и обратные матрицы O_1^{-1} , O_2^{-1} также ортогональны. Эта группа называется ортогональной группой $O(n)$.

Рассмотрим теперь связь между группой $O(n)$ и группой вращений в некотором вещественном n -мерном евклидовом пространстве E . Пусть \vec{x} и \vec{y} - два вектора в E с компонентами x_α и y_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Их скалярное произведение определяется соотношением

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_\alpha y_\alpha, \quad (3)$$

а длина вектора \vec{x} по определению равна

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_\alpha x_\alpha}. \quad (4)$$

Вращением в пространстве E называется любое линейное преобразование векторов этого пространства

$$x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = O_{\alpha\beta} x_\beta, \quad (5)$$

которое сохраняет длины векторов и, следовательно, сохраняет скалярные произведения любых

двух векторов. Эти вращения образуют группу, причем произведением $g_1 g_2$ двух вращений g_1 и g_2 является вращение, которое получается в результате последовательного действия вращений g_2 и g_1 . Можно показать (см^{3/}), что матричные элементы $O_{\alpha\beta}$ вращения (5) удовлетворяют условию (2) (или (2')), т.е. представляют собой матричные элементы ортогональных матриц. Если O_1 и O_2 - матрицы вращений g_1 и g_2 , то матрицей вращения $g_1 g_2$ является произведение $O_1 O_2$. Таким образом, группа вращений в вещественном n -мерном пространстве отождествляется с ортогональной группой $O(n)$.

4. Совокупность унитарных матриц $n \times n$, т.е. матриц с комплексными элементами $U_{\alpha\beta}$, $1 \leq \alpha, \beta \leq n$, удовлетворяющими условию

$$U_{\alpha\beta} U_{\beta\gamma}^* = U_{\alpha\beta} U_{\beta\gamma}^* = U_{\alpha\beta}^* U_{\beta\gamma} = U_{\beta\alpha}^* U_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}, \quad (6)$$

или в матричном виде:

$$U U^* = U^* U = I, \quad (6')$$

образует группу относительно умножения матриц, так как если матрицы U_1 и U_2 унитарны, то унитарны и обратные U_1^{-1} , U_2^{-1} и произведение $U_1 U_2$. Эта группа называется унитарной группой $U(n)$.

Рассмотрим теперь связь между группой $U(n)$ и группой линейных преобразований в комплексном n -мерном векторном пространстве E , в котором скалярное произведение двух векторов \vec{x} и \vec{y} с компонентами x_α и y_α , $1 \leq \alpha \leq n$ определяется следующим образом:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_\alpha^* y_\alpha = (\vec{y}, \vec{x})^*, \quad (7)$$

а норма вектора \vec{x} равна

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{|x_\alpha|^2}. \quad (8)$$

Линейные преобразования в данном комплексном пространстве

$$x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = U_{\alpha\beta} x_\beta, \quad (9)$$

сохраняющие норму (8) и, следовательно, скалярное произведение (7), выражаются унитарными матрицами (см^{3/}). Они образуют группу унитарных преобразований или унитарную группу $U(n)$.

5. Совокупность всех невырожденных линейных преобразований (с ненулевыми определителями) в комплексном n -мерном векторном пространстве

$$x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = A_{\alpha\beta} x_\beta, \quad (10)$$

т.е. совокупность всех несобственных матриц $n \times n$, для которых существуют обратные, образует группу, называемую однородной линейной группой $GL(n)$.

6. Унимодулярные линейные преобразования в комплексном n -мерном векторном пространстве, т.е. преобразования вида (10) с определителем, равным 1, или, что то же самое, матрицы A с единичным определителем

$$\det A = 1, \quad (II)$$

образуют группу, так как

$$\det(A_1 A_2) = (\det A_1)(\det A_2), \\ \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

Она называется унимодулярной группой $SL(n)$.

7. Унитарные унимодулярные преобразования в комплексном n -мерном векторном пространстве или, что то же самое, унитарные унимодулярные матрицы $n \times n$

$$U^+ U = U U^+ = I, \quad \det U = 1 \quad (I2)$$

образуют так называемую унитарную унимодулярную группу $SU(n)$.

8. В вещественном четырехмерном пространстве Минковского со скалярным произведением

$$(\vec{x} \cdot \vec{y}) = g_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \quad (I3)$$

где

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta = 0 \\ -1 & \alpha = \beta = 1, 2, 3 \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (I4)$$

и нормой $\|\vec{x}\|$, определяемой соотношением

$$\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x} \cdot \vec{x}) = g_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \quad (I5)$$

линейные преобразования

$$x'_\alpha \rightarrow x_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta} x'_\beta, \quad (I6)$$

сохраняющие норму (I5) и, следовательно, скалярное произведение (I3), образуют группу.

Эта группа называется однородной группой Лоренца. Если обозначим через Λ матрицу преобразования (I6), а через G - матрицу с элементами (I4), то из условия сохранения скалярного произведения (I3) следует, что Λ удовлетворяет соотношению:

$$\Lambda^T G \Lambda = G. \quad (I7)$$

Рассмотрим более общие преобразования пространства Минковского

$$x'_\alpha \rightarrow x_\alpha = a_\alpha + \Lambda_{\alpha\beta} x'_\beta. \quad (I8)$$

Каждое такое преобразование, обозначаемое через $\{a, \Lambda\}$, есть комбинация однородного преобразования Лоренца (I6) и трансляции (I). Эти преобразования образуют так называемую неоднородную группу Лоренца или группу Пуанкаре. Можно проверить, что групповая операция для этой группы дается правилом

$$\{a_1, \Lambda_1\} \{a_2, \Lambda_2\} = \{a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2\}, \quad (I9)$$

а обратный к $\{a, \Lambda\}$ элемент равен

$$\{a, \Lambda\}^{-1} = \{-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1}\}. \quad (I20)$$

§ 2. Подгруппы

Множество H элементов некоторой группы G называется подгруппой группы G , если оно само есть группа в силу того же группового умножения, которое действует в группе G . Очевидно, что для того чтобы множество H являлось подгруппой группы G , необходимо и достаточно, чтобы наряду с любыми двумя элементами a и $b \in H$ содержало также произведение ab и обратный a^{-1} (или b^{-1}). Символически мы пишем:

$$ab \in H, \quad a^{-1} \in H, \quad b^{-1} \in H \quad \text{если} \quad a \in H, \quad b \in H,$$

или

$$HH = H, \quad H^{-1} = H.$$

Примеры

1. Сама группа G и подгруппа группы G , состоящая из одного единичного элемента e , являются тривиальными подгруппами группы G .
2. Группа целых чисел представляет собой подгруппу группы действительных чисел.
3. Группа вращений вокруг некоторой оси является подгруппой группы вращений в трехмерном пространстве.
4. Рассмотрим ортогональные (или унитарные) преобразования в вещественном (комплексном) n -мерном векторном пространстве со скалярным произведением (3) (или (7), соответственно), оставляющие неизменными последние $n-m$ компонент любого вектора, т.е. ортогональные (унитарные) матрицы вида:

$$\begin{pmatrix} O_{\alpha\beta} & & & \\ & \dots & & \\ & & 1 & \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & & \dots \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} U_{\alpha\beta} & & & \\ & \dots & & \\ & & 1 & \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & & & & \dots \end{pmatrix}$$

элементы $O_{\alpha\beta}$ ($U_{\alpha\beta}$) которых равны 1, если $\alpha = \beta > m$, и равны нулю, если $\alpha \neq \beta$ и один из индексов больше m . Эти преобразования образуют группу $O(m)$ (или $U(m)$) ортогональных (унитарных) преобразований в m -мерном пространстве, порожденном первыми m базисными векторами. Группа $O(m)$ (или $U(m)$) является подгруппой группы $O(n)$ (или $U(n)$). Аналогично, группа вращений в евклидовом трехмерном пространстве является подгруппой однородной группы Эйлера.

§ 3. Прямое произведение

Пусть заданы две группы G_1 и G_2 . Рассмотрим множество G , образованное парами $\{x_1, x_2\}$, где $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$, и введем в G групповую операцию, определяемую следующим образом: если $\{x_1, x_2\} \in G$, $\{y_1, y_2\} \in G$, то полагаем $\{x_1, x_2\}\{y_1, y_2\} = \{x_1 y_1, x_2 y_2\}$. Очевидно, что $\{x_1, x_2\}\{y_1, y_2\} \in G$. Множество G с этой групповой операцией удовлетворяет всем аксиомам определения групп, причем единичным элементом группы G служит пара $\{e_1, e_2\}$, где e_1 и e_2 - единичные элементы групп G_1 и G_2 , соответственно, а элементом в G , обратным к $\{x_1, x_2\}$, является пара $\{x_1^{-1}, x_2^{-1}\}$. Эта группа G называется прямым произведением групп G_1 и G_2 и обозначается через $G_1 \otimes G_2$.

Рассмотрим теперь две подгруппы группы G , образованные элементами вида $\{x_1, e_2\}$ и $\{e_1, x_2\}$, где x_1 пробегает элементы всей группы G_1 , а x_2 - всей группы G_2 . Эти подгруппы могут быть отождествлены с группами G_1 и G_2 , соответственно. По определению произведения в группе G мы имеем

$$\{x_1, e_2\}\{e_1, x_2\} = \{x_1, x_2\} = \{e_1, x_2\}\{x_1, e_2\}.$$

Это означает, что элементы группы G_1 , рассматриваемые как элементы группы G , коммутируют с элементами из G_2 , рассматриваемыми также как элементы группы G .

Примеры

1. Пусть E_1 и E_2 - n_1 -мерное и n_2 -мерное векторные пространства. Рассмотрим теперь $(n_1 + n_2)$ -мерное векторное пространство E , каждый вектор \vec{x} которого может быть представлен однозначно в виде суммы $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$, где \vec{x}_i принадлежит E_i . Это пространство E называется прямой суммой пространств E_1 и E_2 , а E_1 и E_2 называются подпространствами пространства E . Рассмотрим в E линейные преобразования A , оставляющие инвариантными подпространства E_1 и E_2 , т.е. такие линейные преобразования, которые переводят каждый вектор \vec{x}_1 (\vec{x}_2) пространства E_1 (E_2) в вектор \vec{x}'_1 (\vec{x}'_2) этого же пространства. Каждое такое преобразование представляет собой пару независимых преобразований A_1 и A_2 в E_1 и E_2 , соответственно, и мы пишем $A = \{A_1, A_2\}$, причем порядок осуществления преобразований A_1 и A_2 не существенен. Если $A = \{A_1, A_2\}$, $B = \{B_1, B_2\}$, то $AB = \{A_1 B_1, A_2 B_2\}$. Если преобразования в E_1 и E_2 образуют группы G_1 и G_2 , соответственно, то множество всех рассматриваемых преобразований в E является группой $G_1 \otimes G_2$. Элементы вида $\{A_1, I\}$ (или $\{I, A_2\}$) являются преобразованиями в E_1 (или E_2). Поэтому группы G_1 и G_2 могут быть отождествлены с подгруппами группы G , образованными элементами вида $\{A_1, I\}$ и $\{I, A_2\}$, соответственно.

Если G_1 и G_2 являются унитарными унимодулярными группами $SU(n_1)$ и $SU(n_2)$, например, элементы группы $G = SU(n_1) \otimes SU(n_2)$ также являются унитарными унимодулярными преобразованиями в E . Это означает, что группа $SU(n_1) \otimes SU(n_2)$ является подгруппой группы $SU(n_1 + n_2)$.

2. Пусть задано $(n_1 \times n_2)$ - мерное векторное пространство, каждый вектор \vec{x} которого имеет $n_1 \times n_2$ компонент $x_{\alpha_1 \alpha_2}$, нумерующихся парами индексов α_1, α_2 , $1 \leq \alpha_1 \leq n_1$, $1 \leq \alpha_2 \leq n_2$. Линейное преобразование в этом пространстве имеет вид:

$$x_{\alpha_1 \alpha_2} \rightarrow x'_{\alpha_1 \alpha_2} = A_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2} x_{\beta_1 \beta_2}. \quad (21)$$

Унитарные преобразования имеют матричные элементы $U_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2}$, удовлетворяющие условию

$$U_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2} U_{\gamma_1 \gamma_2, \rho_1 \rho_2}^* = U_{\beta_1 \beta_2, \alpha_1 \alpha_2}^* U_{\rho_1 \rho_2, \gamma_1 \gamma_2} = \delta_{\alpha_1 \gamma_1} \delta_{\alpha_2 \gamma_2}. \quad (22)$$

Эти унитарные преобразования образуют группу $U(n_1 \times n_2)$. Рассмотрим теперь линейные преобразования специального вида с матричными элементами

$$U_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2} = U_{\alpha_1 \beta_1}^{(1)} U_{\alpha_2 \beta_2}^{(2)}, \quad (23)$$

где $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ — унитарные матрицы $n_1 \times n_1$ и $n_2 \times n_2$, соответственно, или символически

$$U = U^{(1)} \otimes U^{(2)}. \quad (23')$$

Произведением двух преобразований $U = U^{(1)} \otimes U^{(2)}$ и $V = V^{(1)} \otimes V^{(2)}$ является преобразование с матрицей

$$(UV)_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2} = U_{\alpha_1 \alpha_2, \gamma_1 \gamma_2} V_{\gamma_1 \gamma_2, \beta_1 \beta_2} = U_{\alpha_1 \gamma_1}^{(1)} U_{\alpha_2 \gamma_2}^{(2)} V_{\gamma_1 \beta_1}^{(1)} V_{\gamma_2 \beta_2}^{(2)} = (U^{(1)} V^{(1)})_{\alpha_1 \beta_1} (U^{(2)} V^{(2)})_{\alpha_2 \beta_2}, \quad (24)$$

или символически

$$UV = (U^{(1)} \otimes U^{(2)}) (V^{(1)} \otimes V^{(2)}) = (U^{(1)} V^{(1)}) \otimes (U^{(2)} V^{(2)}). \quad (24)$$

Это соотношение показывает, что группа преобразований вида (23) (или (23')) является прямым произведением $U(n_1) \otimes U(n_2)$ групп $U(n_1)$ и $U(n_2)$, образованных унитарными преобразованиями $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$. Так как преобразования вида (23) (или (23')) являются частными случаями унитарных преобразований в $(n_1 \times n_2)$ - мерном пространстве, удовлетворяющих (22), то рассматриваемое прямое произведение $U(n_1) \otimes U(n_2)$ является подгруппой группы $U(n_1 \times n_2)$. Элементы групп $U(n_1)$ и $U(n_2)$ отождествляются с элементами вида $U^{(1)} \otimes I$ и $I \otimes U^{(2)}$ группы $U(n_1) \otimes U(n_2)$, которые коммутируют друг с другом.

3. Одним из основных законов физики является принцип релятивистской инвариантности, согласно которому любая физическая теория должна быть инвариантной относительно преобразований группы Лоренца \mathcal{L} с матрицами λ , удовлетворяющими условию (17). С другой стороны, для теоретического описания свойств симметрии элементарных частиц предполагают, что кроме пространственно-временных динамических величин, связанных с пространством-временем (энергия — импульс, спин, момент импульса и т.д.), состояния систем элементарных частиц характеризуются также и другими квантовыми числами и величинами, связанными с внутренними свойствами частиц (изотопический спин, гиперзаряд и т.д.), причем сохранение этих величин связано с инвариантностью теории относительно некоторой группы внутренней симметрии S . Таким образом, на векторы состояния систем элементарных частиц действует две группы преобразований: группа Лоренца \mathcal{L} и группа внутренней симметрии S . Если преобразования из этих групп коммутируют, то они вместе образуют группу $\mathcal{L} \otimes S$.

§ 4. Инвариантные подгруппы и фактор-группы

Пусть задана некоторая группа G и её подгруппа H . Рассмотрим множество элементов вида $x a$, где x - любой фиксированный элемент группы G , а a пробегает значения всей подгруппы H . Это множество обозначим через xH и назовем его левым смежным классом элемента x по подгруппе H . Если x и y - различные элементы группы G , то левые смежные классы xH и yH либо не имеют общих элементов, либо полностью совпадают. Аналогично определяется правый смежный класс Hx . Так как $eH = He = H$, то сама подгруппа H есть смежный класс. Правые и левые смежные классы, вообще говоря, отличаются. Они совпадают для любого элемента $x \in H$, если подгруппа H удовлетворяет условию $xH = Hx$ или $xHx^{-1} = H$ для любого $x \in G$. Элемент xax^{-1} называем сопряженным к a элементом. Итак, для того, чтобы левые и правые смежные классы по подгруппе H совпали, необходимо и достаточно, чтобы для любого $a \in H$ и $x \in G$ сопряженный к a элемент xax^{-1} также являлся бы некоторым элементом подгруппы H . Такая подгруппа называется инвариантной подгруппой или нормальным делителем. В коммутативной группе каждая подгруппа является инвариантной подгруппой.

Рассмотрим теперь множество, элементами которого являются смежные классы группы G по инвариантной подгруппе H . Если $A = aH$ и $B = bH$ - два смежных класса, то их произведением AB является смежный класс $aH \cdot bH = abH$, а обратным к A является смежный класс $A^{-1} = (aH)^{-1} = a^{-1}H$. Это означает, что смежные классы группы G по инвариантной подгруппе H образуют группу, называемую фактор-группой G/H группы G по инвариантной подгруппе H . Сама инвариантная подгруппа H как смежный класс является единичным элементом этой фактор-группы.

Пример

Мы рассмотрели в примере 8 из § I неоднородную группу Лоренца, элементами которой являются преобразования

$$x_a \rightarrow x'_a = a_x + \lambda_{ab} x_b$$

Эти преобразования обозначаем через $\{a, \lambda\}$. Трансляционные преобразования

$$x_a \rightarrow x'_a = a_x + x_a$$

образуют подгруппу неоднородной группы Лоренца и обозначаются через $\{a, I\}$. Пусть $\{b, \lambda\}$ - любой элемент неоднородной группы Лоренца. Рассмотрим сопряженный элемент $\{b, \lambda\} \{a, I\} \{b, \lambda\}^{-1}$. Мы имеем, согласно формулам (19) и (20),

$$\begin{aligned} \{b, \lambda\} \{a, I\} \{b, \lambda\}^{-1} &= \{b + \lambda a, \lambda\} \{-\lambda^{-1} b, \lambda^{-1}\} = \{b + \lambda a - \lambda \lambda^{-1} b, \lambda \lambda^{-1}\} \\ &= \{\lambda a, I\}. \end{aligned}$$

Итак, преобразование $\{b, \lambda\} \{a, I\} \{b, \lambda\}^{-1}$, сопряженное к трансляции $\{a, I\}$, является также трансляцией, и трансляционная подгруппа является инвариантной группой.

§ 5. Гомоморфизм, изоморфизм и автоморфизм

Пусть заданы две группы G_1 и G_2 . Если существует соответствие между элементами группы G_1 и элементами группы G_2 , то мы говорим, что существует отображение одной группы в другую. Если, например, в соответствии с каждым элементом $x_1 \in G_1$ существует единственный элемент $x_2 \in G_2$, который мы обозначаем через $f(x_1)$, $x_2 = f(x_1)$, то говорим, что существует однозначное отображение f группы G_1 в группу G_2 . Это однозначное отображение f называем гомоморфным отображением или гомоморфизмом группы G_1 в группу G_2 , если оно сохраняет групповую операцию, т.е. удовлетворяет условию

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad f(x^{-1}) = f(x)^{-1}.$$

Группы G_1 и G_2 называются гомоморфными.

Взаимно однозначное гомоморфное отображение одной группы в другую называется изоморфным отображением или изоморфизмом, а эти группы называются изоморфными. С групповой точки зрения все изоморфные группы можно считать одинаковыми. Изоморфизм группы G в себя называется автоморфизмом. Примером автоморфизма является отображение вида:

$$x \rightarrow f_a(x) = axa^{-1},$$

где a - некоторый элемент из G . Автоморфизмы такого типа называются внутренними.

Рассмотрим гомоморфизм группы G_1 в группу G_2

$$x_1 \rightarrow x_2 = f(x_1).$$

В этом гомоморфизме единичный элемент e_1 группы G_1 превращается в единичный элемент e_2 группы G_2

$$f(e_1) = e_2,$$

так как

$$x_2 e_2 = f(x_1) f(e_1) = f(x_1 e_1) = f(x_1) = x_2$$

для любых $x_2 = f(x_1)$. Множество K элементов y_1 из группы G_1 , превращающихся в e_2 при данном гомоморфизме

$$f(y_1) = e_2, \quad y_1 \in K,$$

называется ядром гомоморфизма. Пусть $y_1 \in K$ и x_1 - любой элемент из G_1 . Тогда

x_i, y_i, x_i^{-1} также принадлежит K , так как

$$f(x_i, y_i, x_i^{-1}) = f(x_i) f(y_i) f(x_i^{-1}) = f(x_i) e_2 f(x_i)^{-1} = e_2.$$

Аналогично можно проверить, что, если y_i и x_i принадлежат K , то $y_i x_i$ и y_i^{-1} также принадлежат K . Итак, ядро гомоморфизма является инвариантной подгруппой.

Пример

В § I мы рассмотрели однородную группу Лоренца \mathcal{L} , элементами которой являются преобразования в вещественном четырехмерном пространстве Минковского, оставляющие инвариантной квадратичную форму (13). Сопоставим каждому четырехмерному вектору x_α матрицу 2×2

$$\hat{x} = x_\alpha \tau_\alpha, \quad (25)$$

где

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Нетрудно проверить, что $\hat{x}^+ = \hat{x}$, если x_α — вещественный вектор. Из соотношения

$$sp(\tau_\alpha \tau_\beta) = 2\delta_{\alpha\beta}$$

следует, что компоненты вектора x_α выражаются через матрицу \hat{x} следующим образом

$$x_\alpha = \frac{1}{2} sp(\tau_\alpha \hat{x}), \quad (27)$$

а квадрат вектора x_α равен

$$\vec{x}^2 = (\vec{x} \cdot \vec{x}) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \det \hat{x}. \quad (28)$$

Любое линейное преобразование вектора x_α , т.е. матрицы \hat{x} , имеет вид:

$$\hat{x} \rightarrow \hat{x}' = A \hat{x} B, \quad (29)$$

где A и B — произвольные матрицы 2×2 . Мы будем рассматривать вещественные преобразования, для которых компоненты x'_α вещественны, если x_α вещественны, т.е.

$\hat{x}'^+ = \hat{x}'$, если $\hat{x}^+ = \hat{x}$. С другой стороны, мы имеем

$$\hat{x}'^+ = B^+ \hat{x}^+ A^+ = B^+ \hat{x} A^+.$$

Сравнивая полученное выражение с (29), имеем $B = A^+$. Итак, вещественные линейные

преобразования вектора x_α , т.е. матрицы \hat{x} , имеют вид:

$$\hat{x} \rightarrow \hat{x}' = A \hat{x} A^+ \quad (30)$$

Для преобразований Лоренца $\vec{x}'^2 = \vec{x}^2$, т.е. $\det \hat{x}' = \det \hat{x}$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \det \hat{x}' &= \det(A \hat{x} A^+) = \det A \det \hat{x} \det A^+ \\ &= |\det A|^2 \det \hat{x}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для преобразований Лоренца

$$|\det A| = 1.$$

Так как в преобразование (30) входят одновременно A и A^+ , то всегда можно выбрать фазу матрицы A так, чтобы

$$\det A = 1. \quad (31)$$

Таким образом, существует соответствие между однородными преобразованиями Лоренца и унитарными матрицами 2×2 , причем две матрицы $\pm A$ соответствуют одному и тому же преобразованию Лоренца. Если матрицам A_1 и A_2 соответствуют преобразования Лоренца Λ_1 и Λ_2 , то матрице $A_1 A_2$ соответствует преобразование Лоренца $\Lambda_1 \Lambda_2$. Действительно, пусть

$$x' = \Lambda_2 x, \quad x'' = \Lambda_1 x' = \Lambda_1 \Lambda_2 x.$$

Тогда

$$\hat{x}' = A_2 \hat{x} A_2^+, \quad \hat{x}'' = A_1 \hat{x}' A_1^+ = A_1 A_2 \hat{x} A_2^+ A_1^+ = (A_1 A_2) \hat{x} (A_1 A_2)^+,$$

что и требовалось доказать. Таким образом, существует гомоморфизм группы $SL(2)$ в однородную группу Лоренца, причем ядро гомоморфизма состоит из двух матриц $+I$ и $-I$. Очевидно, что это ядро является дискретной инвариантной подгруппой группы $SL(2)$, так как для любой матрицы $A \in SL(2)$

$$A(\pm I)A^{-1} = (\pm I).$$

Гомоморфные непрерывные группы называются локально изоморфными, если ядро гомоморфизма является дискретной подгруппой. Итак, группа Лоренца и группа $SL(2)$ локально изоморфны. Трехмерные вращения представляют собой специальные преобразования Лоренца, оставляющие

неизменными временные компоненты любых векторов: $x'_0 = x_0$. Они образуют группу вращений - подгруппу группы Лоренца. Покажем прежде всего, что если унимодулярная матрица A в (30) унитарна, то соответствующее ей преобразование Лоренца является вращением. Действительно, согласно (27), (26) и (30), мы имеем

$$x_0 = \frac{1}{2} \text{Sp } \hat{x},$$

$$x'_0 = \frac{1}{2} \text{Sp } \hat{x}' = \frac{1}{2} \text{Sp } A \hat{x} A^+ = \frac{1}{2} \text{Sp } A^+ A \hat{x}.$$

Если матрица A унитарна, $A^+ A = I$, то $x'_0 = \frac{1}{2} \text{Sp } \hat{x} = x_0$, что и требовалось доказать. Теперь покажем, что унимодулярная матрица A , соответствующая вращению, унитарна. Отметим прежде всего, что любое вращение в трехмерном пространстве может быть представлено в виде произведения трех специальных вращений: вращения на угол φ_2 ($0 \leq \varphi_2 \leq \pi$) вокруг оси oz , вращения на угол θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) вокруг оси ox и вращения на угол φ_1 ($0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$) вокруг оси oz . Углы φ_1 , θ и φ_2 называются углами Эйлера; они полностью характеризуют данное вращение. Рассмотрим прежде всего вращение на угол φ вокруг оси oz

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \\ x'_2 &= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \\ x'_3 &= x_3, \\ x'_0 &= x_0. \end{aligned} \quad (32)$$

Проверим, что оно соответствует матрице

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Действительно, согласно соотношению (30), мы имеем

$$\begin{pmatrix} x'_0 + x'_3 & x'_1 - ix'_2 \\ x'_1 + ix'_2 & x'_0 - x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & e^{i\varphi} (x_1 - ix_2) \\ e^{-i\varphi} (x_1 + ix_2) & x_0 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда мы получим (32). Аналогично вращение на угол θ вокруг оси ox

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1, \\ x'_2 &= x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta, \\ x'_3 &= -x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta, \\ x'_0 &= x_0. \end{aligned} \quad (34)$$

соответствует матрице

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

так как из уравнения

$$\begin{pmatrix} x'_0 + x'_3 & x'_1 - ix'_2 \\ x'_1 + ix'_2 & x'_0 - x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 + x_3 \cos \theta - x_2 \sin \theta & x_1 - i(x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta) \\ x_1 + i(x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta) & x_0 - (x_2 \cos \theta - x_3 \sin \theta) \end{pmatrix}$$

вытекают соотношения (34). Мы показали, что произведение вращений соответствует произведению матриц, характеризующих вращения, входящие в данное произведение. Итак, для произвольного вращения с углами Эйлера φ_1 , θ и φ_2 , соответствующая ему матрица 2×2 равна

$$A_{\{\varphi_1, \theta, \varphi_2\}} = A_{\varphi_2} A_\theta A_{\varphi_1},$$

где A_φ и A_θ даны в (33) и (35). Так как эти матрицы унитарны, то матрица $A_{\{\varphi_1, \theta, \varphi_2\}}$, являющаяся произведением трех унитарных матриц, также унитарна, что и требовалось доказать.

Таким образом, существует соответствие между вращениями в трехмерном пространстве и унимодулярными унитарными матрицами 2×2 , причем каждому вращению соответствуют две матрицы $\pm A$. Иначе говоря, существует гомоморфизм унитарной унимодулярной группы $SU(2)$ в группу вращений в трехмерном пространстве $O(3)$, причем ядро гомоморфизма состоит из двух матриц $+I$ и $-I$.

II. ГРУППЫ ЛИ И АЛГЕБРЫ ЛИ

§ I. Топологические группы, Компактные и некомпактные группы

В настоящем параграфе введем некоторые понятия, которые нам понадобятся в дальнейшем. Определим прежде всего топологические пространства. Топологическим пространством называется любое множество E элементов, в котором выделена система подмножеств, называемых окрестностями и удовлетворяющих следующим аксиомам:

1. Каждая точка x пространства E принадлежит некоторой окрестности $U(x)$ этой точки.
2. Всякое подмножество, содержащее окрестность $U(x)$ точки, является также окрестностью этой точки.
3. Пересечение*) конечного числа окрестностей точки x есть также окрестность этой точки.
4. Окрестность $U(x)$ точки x есть также окрестность достаточно близких к x точек y , лежащих в некоторой окрестности $V(x)$ точки x .

Примером топологического пространства является n -мерное векторное пространство. В качестве окрестности точки x можно выбрать множество точек шара с некоторым радиусом R и центром x , т.е. множество точек y , удовлетворяющих условию $\|x - y\| \leq R$.

Топологическое пространство называется компактным, если каждая последовательность его точек содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке этого пространства, т.е. каждое бесконечное множество его точек обладает предельной точкой. Множество M в некотором топологическом пространстве E называется компактным в E (в себе), если каждая последовательность точек этого множества содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке пространства E (множества M). Проиллюстрируем это определение на простых примерах. Действительная числовая прямая некомпактна, так как существует бесконечная не сходящаяся последовательность точек, например, $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n, \dots$. Наоборот, каждый ограниченный интервал $a \leq x \leq b$ на этой прямой компактен. Действительно, пусть x_1, x_2, \dots, x_n — бесконечное множество точек на этом интервале. Разделим этот интервал на две части $a \leq x \leq c$ и $c \leq x \leq b$. Тогда по крайней мере один из последних содержит бесконечное число точек данного множества. Этот новый интервал снова разделим на две части и продолжим этот процесс. Мы видим, что существует такая точка x_0 , что любой интервал, содержащий эту точку, содержит бесконечное число точек данного множества. Это означает, что x_0 является предельной точкой бесконечного множества точек $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, что и требовалось доказать. Аналогично можно показать, что

*) Объединением двух множеств A и B является множество C , каждый элемент которого принадлежит, по крайней мере, одному из множеств A и B , а пересечением A и B является множество, состоящее из общих элементов множеств A и B .

в n -мерном евклидовом пространстве любое ограниченное множество, т.е. множество точек, абсолютные значения координат x_i которых не превосходят некоторого числа, $|x_i| \leq M$, компактно. Так, например, сферы и шары с конечными радиусами являются компактными множествами в трехмерном евклидовом пространстве, а гиперболоиды являются некомпактными множествами.

Перейдем теперь к определению топологической группы. Пусть задано множество G , удовлетворяющее всем групповым аксиомам (см. § I, главы I). Если это множество G является одновременно топологическим пространством, причем групповая структура группы G согласуется с топологической структурой пространства G , то G называется топологической или непрерывной группой. Более точно, множество G называется топологической или непрерывной группой, если

1. G есть группа;
2. G есть топологическое пространство;

3. Групповая и топологическая структуры G согласуются, а именно, если x и y — элементы G , то для любой окрестности W произведения xy существуют такие окрестности X и Y элементов x и y , соответственно, что из $x \in X$ и $y \in Y$ вытекает: $xy \in W$, и для любой окрестности Z элемента x^{-1} существует такая окрестность X элемента x , что из $x \in X$ вытекает $x^{-1} \in Z$. Короче говоря, произведение xy является непрерывной функцией от x и y , а x^{-1} является непрерывной функцией от x .

Если топологическая группа, рассматриваемая как топологическое пространство, является компактным пространством, то её называем компактной группой. В противоположном случае G есть некомпактная группа.

Рассмотрим некоторые примеры. Действительная числовая прямая является коммутативной некомпактной группой. Группа поворотов вокруг фиксированной оси компактна, так как каждый поворот характеризуется углом φ , значение которого лежит в интервале $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, т.е. в компактном множестве. Группа вращений в трехмерном евклидовом пространстве компактна, так как каждое вращение характеризуется тремя вещественными числами, например, углами Эйлера $\varphi_1, \theta, \varphi_2$, а эти углы можно рассматривать как координаты точек в ограниченном множестве трехмерного пространства, т.е. в компактном множестве. Наоборот, группа Лоренца некомпактна. Действительно, рассмотрим, например, гиперболоид $x^2 - x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$. В преобразовании Лоренца каждая точка этого гиперболоида переходит в его другую точку, причем для любой пары точек одной полости этого гиперболоида существует преобразование Лоренца, переводящее одну точку в другую. Выберем на некоторой полости этого гиперболоида бесконечную последовательность точек $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, уходящую в бесконечность. Обозначим через Λ_n преобразование Лоренца, переводящее вершину x_0 данной полости в точку x_n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Мы имеем бесконечную последовательность

преобразований Лоренца. Так как последовательность точек x_n не сходится, то из последовательности преобразований Лоренца Λ_n нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность.

В заключение этого параграфа мы укажем ещё на одну из особенностей компактных групп по сравнению с некомпактными группами. Пусть задана некоторая ограниченная функция на группе $f(g)$, $g \in G$, и пусть существует интеграл этой функции по всей группе

$$J = \int_G f(g) dg.$$

Если при всех $g_0 \in G$ имеет место равенство

$$\int_G f(g) dg = \int_G f(g_0 g) dg = \int_G f(g g_0) dg, \quad (36)$$

то мы говорим, что на группе G установлено инвариантное интегрирование. В качестве простого примера рассмотрим группу поворотов вокруг фиксированной оси. Каждый элемент группы характеризуется вещественным числом φ - углом поворота, причем углы φ и $\varphi + 2\pi$ соответствуют одному и тому же повороту. Каждая функция на группе является тогда периодической функцией от φ с периодом 2π . Если g_0 и g обозначают повороты на углы φ_0 и φ , соответственно, то $g_0 g$ является вращением на угол $\varphi_0 + \varphi$. В данном случае равенство (36) имеет вид:

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi + \varphi_0) d\varphi.$$

Так как $f(\varphi)$ - ограниченная периодическая функция с периодом 2π , то это равенство выполняется автоматически. Итак, для данного случая инвариантным интегрированием является обычное интегрирование по углу поворота φ от 0 до 2π . Можно показать, что для группы трехмерных вращений инвариантный интеграл по группе имеет вид:

$$\int f(g) dg = \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi f(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \sin \theta d\theta,$$

где φ_1 , θ , φ_2 - углы Эйлера (см. /4, 5/).

Возвращаемся теперь к общей формуле (36). Если группа G компактна, то этот инвариантный интеграл существует для любой ограниченной функции на группе (см. /6/), в отличие от некомпактных групп, для которых такого инвариантного интеграла ограниченной функции на группе не существует. Ниже мы покажем, что из существования инвариантного интегрирования на группе вытекает унитарность представлений компактных групп.

§ 2. Группы Ли

В предыдущих параграфах мы рассмотрели различные примеры непрерывных (или топологических) групп. Все эти группы являются группами Ли. Непрерывная группа G называется группой Ли, если каждый её элемент может быть задан при помощи конечного числа параметров. В дальнейшем будем рассматривать только вещественные параметры. Минимальное число независимых параметров, необходимых для характеристики элементов группы Ли G , называется порядком или размерностью группы G . Ли при изучении этих групп задает их элементы в виде преобразований в конечномерном пространстве. Адо показал, что для любой группы Ли существует изоморфная ей группа преобразований в некотором векторном пространстве (см. /7/). Поэтому ради простоты в дальнейшем группы Ли будем рассматривать как группы преобразований в векторных пространствах. Иначе говоря, будем предполагать, что каждый элемент группы Ли представляет собой оператор, действующий в некотором векторном пространстве. Этот оператор зависит от вещественных параметров $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ и обозначается через

$$g = T(\xi_1, \dots, \xi_m). \quad (37)$$

Параметры, входящие в минимальное число независимых необходимых параметров, называются существенными. Мы всегда будем предполагать, что параметры группы Ли существенны. Если это так, то различным значениям параметров в областях изменения этих параметров соответствуют различные элементы группы и число m в (37) равно размерности группы. Мы будем выбирать параметры так, чтобы нулевым значениям всех параметров соответствовал единичный элемент группы

$$e = T(0, 0, \dots, 0). \quad (38)$$

Если в пространстве, в котором действуют операторы $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$ группы G , введем некоторый базис, то каждый оператор $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$ выражается некоторой матрицей. Если все матричные элементы $T_{\alpha\beta}(\xi_1, \dots, \xi_m)$ этих операторов дифференцируемы по параметрам ξ_i , то мы говорим, что операторы $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$ дифференцируемы. Предполагаем, что все операторы $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$ рассматриваемой группы Ли G дифференцируемы. Во многих случаях это требование выполняется автоматически. Например, так называемые локально связанные компактные группы Ли всегда дифференцируемы /8/.

Рассмотрим теперь частные производные $\frac{\partial T(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial \xi_i}$ операторов $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$ группы Ли G по параметрам ξ_i , взятые в точке $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0$, т.е. при единичном элементе, и положим

$$X_i = \frac{1}{i} \left. \frac{\partial T(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial \xi_i} \right|_{\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0} \quad (39)$$

Эти операторы называются инфинитезимальными операторами или генераторами группы Ли G .
Группа Ли размерности m обладает m генераторами.

В качестве примера рассмотрим группу трехмерных вращений. Каждый элемент этой группы представляется в виде ортогональной матрицы 3×3 , зависящей от трех параметров. Вместо углов Эйлера мы выберем эти параметры следующим образом. Каждому вращению сопоставим вектор, направленный по положительному направлению оси поворота и равный углу поворота по абсолютной величине. Такой вектор полностью характеризует данное вращение. Проекции ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 этого вектора на оси координат будем выбирать в качестве существенных параметров вращений. Итак, каждое вращение представляется матрицей 3×3 $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Найдем теперь генераторы X_i группы трехмерных вращений. Имеем

$$X_1 = \frac{1}{i} \left. \frac{\partial T(\xi_1, 0, 0)}{\partial \xi_1} \right|_{\xi_1 = 0},$$

причем $T(\xi_1, 0, 0)$ является матрицей вращения на угол ξ_1 вокруг оси ox , которая, согласно соотношениям (34), равна

$$T(\xi_1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi_1 & \sin \xi_1 \\ 0 & -\sin \xi_1 & \cos \xi_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$X_1 = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Аналогично $T(0, \xi_2, 0)$ и $T(0, 0, \xi_3)$ являются вращениями вокруг осей oy и oz , соответственно, на углы ξ_2 и ξ_3 , и мы имеем

$$X_2 = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (40')$$

Нетрудно проверить, что генераторы X_i группы вращений удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1 = i X_3, \quad [X_2, X_3] = i X_1, \quad [X_3, X_1] = i X_2, \quad (41)$$

т.о.

$$[X_i, X_j] = i \varepsilon_{ijk} X_k, \quad (41)$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор третьего ранга. Величину $[X_i, X_j]$ называем коммутатором операторов X_i и X_j .

Так как группа трехмерных вращений и группа $SU(2)$ локально изоморфны, а между генераторами локально изоморфных групп существует взаимно однозначное соответствие, то для установления коммутационных соотношений генераторов группы вращений можно рассматривать вместо этой группы группу $SU(2)$. Для определения генераторов любой группы $SU(n)$ достаточно рассмотреть элементы этой группы с бесконечно малыми значениями параметров. Так как нулевым значениям параметров соответствует единичная матрица I , то в первом порядке по малым параметрам ξ_i мы имеем

$$T(\xi_1, \dots, \xi_m) = I + i \xi_i X_i, \quad (42)$$

где

$$X_i = \frac{1}{i} \left. \frac{\partial T(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial \xi_i} \right|_{\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0}$$

Из условия унитарности матриц $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$

$$T(\xi_1, \dots, \xi_m) T(\xi_1, \dots, \xi_m)^\dagger = T(\xi_1, \dots, \xi_m)^\dagger T(\xi_1, \dots, \xi_m) = I$$

следует, что для любой унитарной группы $U(n)$

$$(I - i \xi_i X_i^\dagger) (I + i \xi_j X_j) \approx I + i \xi_j (X_j - X_j^\dagger) \approx I.$$

Отсюда получаем

$$X_i^\dagger = X_i, \quad (43)$$

т.е. генераторы X_i унитарной группы $U(n)$ являются эрмитовыми матрицами. В первом порядке по ξ_i определитель матрицы $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$, определяемой формулой (42), равен

$$\det T(\xi_1, \dots, \xi_m) = 1 + i \xi_i \operatorname{sp} X_i.$$

Если матрица $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$ унимодулярна, то мы имеем

$$\operatorname{sp} X_i = 0. \quad (44)$$

Итак, генераторы унимодулярной группы имеют спуры равные нулю и генераторы группы $SU(n)$

являются эрмитовыми матрицами с нулевыми шпурами. Для группы $SU(2)$ эти генераторы являются эрмитовыми матрицами 2×2 с нулевыми шпурами. Существуют три независимые матрицы, удовлетворяющие этим условиям. Это - матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, группа $SU(2)$ зависит от трех параметров. Нетрудно проверить, что эти генераторы группы $SU(2)$, деленные на 2, удовлетворяют таким же коммутационным соотношениям, что и генераторы группы вращений

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i \varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}. \quad (41)$$

Мы показали, что для группы вращений или группы $SU(2)$ коммутаторы двух генераторов являются линейными комбинациями всех генераторов группы. Такое свойство имеется и для любой группы Ли. Пусть G - группа Ли размерности m и X_i , $i = 1, 2, \dots, m$ - её генераторы. Тогда коммутаторы $[X_i, X_j]$ любых двух генераторов являются линейными комбинациями всех генераторов

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k, \quad (45)$$

где c_{ij}^k - постоянные, называемые структурными константами. Из выражения (45) следует, что c_{ij}^k антисимметричны относительно двух нижних индексов

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \quad (46)$$

а из тождества Якоби

$$[X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] = 0 \quad (47)$$

получаем соотношение

$$c_{il}^m c_{jk}^l + c_{jl}^m c_{ki}^l + c_{kl}^m c_{ij}^l = 0. \quad (48)$$

Структурные константы каждой группы Ли однозначно определяются структурой данной группы. Обратное, они также полностью характеризуют данную группу с точностью до локального изоморфизма, а именно, для каждой системы постоянных c_{ij}^k , удовлетворяющих (46) и

(48), существует группа Ли G , структурными константами которой служат данные постоянные c_{ij}^k . Любая группа G со структурными константами c_{ij}^k локально изоморфна группе G (Подробно см. /9, 10/).

§ 3. Алгебры Ли

Рассмотрим теперь связь между группами Ли и так называемыми алгебрами Ли. Пусть задано множество L , обладающее следующими свойствами:

1. Если X и Y есть элементы L , то сумма $X+Y$ и произведение λX с любым вещественным (комплексным) числом λ также принадлежат L . Отсюда следует, что если X_1, \dots, X_m - элементы L , то любая линейная комбинация $\sum \lambda_i X_i$ с вещественными (комплексными) коэффициентами λ_i также есть элемент L .

2. Существует некоторая операция, которая составляет каждой паре элементов X и Y множества L определенный элемент того же множества, обозначаемый через $X \cdot Y$ и называемый произведением элементов X и Y .

3. Произведения элементов и произведения элементов на числа λ удовлетворяют условиям

$$(X_1 + X_2) \cdot Y = X_1 \cdot Y + X_2 \cdot Y, \quad Y \cdot (X_1 + X_2) = Y \cdot X_1 + Y \cdot X_2,$$

$$\alpha (X \cdot Y) = (\alpha X) \cdot Y = X \cdot (\alpha Y).$$

Такое множество L называется алгеброй над полем вещественных (или комплексных, соответственно) чисел. Если кроме аксиом 1 - 3 произведения алгебры L удовлетворяют также соотношениям

$$X \cdot Y + Y \cdot X = 0, \quad (49)$$

$$X \cdot (Y \cdot Z) + Y \cdot (Z \cdot X) + Z \cdot (X \cdot Y) = 0, \quad (50)$$

то она называется алгеброй Ли.

Мы будем рассматривать лишь конечномерные алгебры Ли. Для каждой конечномерной алгебры Ли существует такая система линейно независимых элементов X_i , $i = 1, 2, \dots, m$, называемая базисом этой алгебры, что каждый её элемент является линейной комбинацией элементов X_i , $i = 1, 2, \dots, m$. m называется размерностью данной алгебры Ли. Из аксиом 1 - 3 следует, что произведение любых двух базисных элементов X_i и X_j имеет вид:

$$X_i \cdot X_j = c_{ij}^k X_k, \quad (51)$$

причем для алгебры Ли структурные константы C_{ij}^k удовлетворяют условиям (46) и (48), вытекающим из (49) и (50). Алгебра Ли называется коммутативной, если $X \cdot Y = 0$ для любой пары X и Y .

Примером алгебры Ли является алгебра, базис которой состоит из трех матриц Паули σ_1, σ_2 и σ_3 , причем произведение двух элементов σ_i и σ_j этой алгебры Ли определяется как коммутатор двух матриц σ_i и σ_j :

$$\sigma_i \cdot \sigma_j = [\sigma_i, \sigma_j].$$

Вообще говоря, генераторы группы Ли образуют алгебру Ли, в которой произведением элементов алгебры является коммутатор генераторов. В дальнейшем в качестве произведения $X \cdot Y$ элементов алгебры Ли будем пользоваться обозначением коммутатора $[X, Y]$. Алгебра Ли (генераторов) группы Ли полностью определяется этой группой. Обратное, алгебра Ли группы Ли определяет эту группу однозначно с точностью до локального изоморфизма.

Аналогами подгруппы и инвариантной подгруппы в алгебре являются подалгебра и идеал. Если в алгебре Ли L существует множество L' элементов, которое само является алгеброй Ли, то это множество называется подалгеброй L' алгебры Ли L . Оно имеет следующее свойство: для любой пары элементов $X \in L'$ и $Y \in L'$ произведение $[X, Y]$ принадлежит L' : $[X, Y] \in L'$. Символически мы пишем:

$$[L', L'] \subset L'.$$

Если N — такая подалгебра алгебры Ли L , что для любых $X \in N$ и $Y \in L$ произведение $[X, Y] \in N$, или символически:

$$[N, L] \subset N,$$

то N называется идеалом алгебры Ли L .

Существует тесная связь между подгруппой группы Ли и подалгеброй алгебры Ли, а также между инвариантной подгруппой и идеалом. Если G есть группа Ли и L есть её алгебра Ли, то алгебра L' подгруппы G' является подалгеброй алгебры Ли L , а алгебра Ли инвариантной подгруппы H является идеалом алгебры Ли L (подробно см. /11, 12/).

Напомним, что группа называется простой, если она не имеет инвариантной подгруппы, отличной от самой группы, за исключением дискретных инвариантных подгрупп, и называется полупростой, если она не имеет коммутативной (недискретной) инвариантной подгруппы. Алгебра Ли называется простой, если она не имеет идеала, отличного от самой алгебры, и называется полупростой, если она не имеет коммутативного идеала. Алгебра Ли простой группы

Ли проста, а алгебра Ли полупростой группы Ли полупроста.

Пусть задана некоторая группа Ли G конечной размерности m , генераторы которой образуют алгебру Ли L той же размерности. Если в алгебре L существуют коммутирующие элементы, то эти элементы образуют коммутативную подалгебру алгебры Ли L . Максимальную коммутативную подалгебру K алгебры Ли L называем подалгеброй Картана алгебры Ли L , и обозначаем через H_i базисные элементы этой подалгебры Картана.

Имеем

$$[H_i, H_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, l.$$

Размерность l подалгебры Картана алгебры Ли L называется рангом алгебры Ли L или рангом группы Ли G , алгеброй Ли которой является алгебра Ли L .

III. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ЛИ

§ I. Определение представлений групп Ли

Пусть E — некоторое векторное пространство, элементы которого обозначим через \vec{x} и назовем векторами в данном пространстве. Если введем некоторый базис, состоящий из линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \dots$, то любой вектор \vec{x} может быть представлен в виде:

$$\vec{x} = x_\alpha \vec{e}_\alpha.$$

Вектор \vec{x} полностью определяется своими компонентами x_α . Рассмотрим линейное преобразование R пространства E . При этом преобразовании вектор \vec{x} превращается в \vec{x}'

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = R\vec{x}.$$

Компоненты x'_α вектора \vec{x}' выражаются линейно через компоненты x_α вектора \vec{x}

$$x'_\alpha = R_{\alpha\beta} x_\beta,$$

и $R_{\alpha\beta}$ называется матрицей преобразования R . Преобразование R также называем линейным оператором в пространстве E . Будем говорить, что задано представление R

$$g \rightarrow R(g) \quad (52)$$

(абстрактной) группы G в пространстве E , если каждому элементу $g \in G$ сопоставляется преобразование $R(g)$ пространства E так, что произведению элементов группы G соответствует произведение преобразований, т.е.

$$R(g_1)R(g_2) = R(g_1 g_2), \quad (53)$$

или в матричном виде:

$$R(g_1)_{\alpha\beta} R(g_2)_{\beta\gamma} = R(g_1 g_2)_{\alpha\gamma}. \quad (53)$$

Отсюда следует, что единичному элементу e соответствует единичный оператор I (тождественное преобразование)

$$R(e) = I, \quad (54)$$

так как

$$R(e)R(g) = R(eg) = R(g),$$

а обратному элементу g^{-1} соответствует обратное преобразование

$$R(g)^{-1} = R(g^{-1}), \quad (55)$$

так как

$$R(g^{-1})R(g) = R(g^{-1}g) = R(e) = I.$$

Иначе говоря, если существует гомоморфизм группы G в группу R преобразований пространства E , то R называется представлением группы G . Если группа G изоморфна группе R , то представление R называется точным. Простая группа обладает лишь точными представлениями, так как ядро гомоморфизма состоит только из единичного элемента. Если задано представление R группы G в пространстве E , то говорим также, что пространство E преобразуется по представлению R группы G .

Примеры

1. Рассмотрим группу трансляций в трехмерном пространстве. Каждая трансляция характеризуется вектором переноса $\vec{\tau}$. Пусть E некоторое комплексное пространство, и каждой трансляции на вектор $\vec{\tau}$ сопоставим оператор умножения векторов из E на комплексное число $e^{i\vec{k}\vec{\tau}}$, где \vec{k} — некоторый фиксированный трехмерный вектор. Тогда произведению двух трансляций $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$, т.е. трансляции $\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$, соответствует оператор умножения на $e^{i\vec{k}(\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2)} = e^{i\vec{k}\vec{\tau}_1} \cdot e^{i\vec{k}\vec{\tau}_2} = e^{i\vec{k}\vec{\tau}_1} \cdot e^{i\vec{k}\vec{\tau}_2}$, т.е. произведение операторов, соответствующих трансляциям $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$. Мы получаем, таким образом, представление группы трансляций.

2. Если элементы группы G являются преобразованиями в некотором пространстве, то соответствие

$$g \rightarrow R(g) \equiv g$$

также дает некоторое представление группы G . Это представление группы G совпадает с группой G (существует, конечно, и другие представления, не совпадающие с G).

3. Если всякому элементу группы G сопоставим единичный оператор в пространстве E

$$g \rightarrow I,$$

то мы получаем единичное представление группы G .

Отметим, что в одном и том же пространстве E могут существовать различные представления одной и той же группы. Однако не все представления существенно отличаются. Существуют представления, которые мы называем эквивалентными. Они не отличаются существенно,

и их можно отождествить. Эквивалентные представления определяются следующим образом. Пусть задано некоторое представление R группы G в пространстве E , при котором каждому элементу g соответствует оператор $R(g)$. Рассмотрим теперь новые операторы

$$R'(g) = A^{-1} R(g) A, \quad (56)$$

где A - некоторый оператор в пространстве E . Мы имеем

$$R'(g_1) R'(g_2) = A^{-1} R(g_1) A A^{-1} R(g_2) A =$$

$$A^{-1} R(g_1) R(g_2) A = A^{-1} R(g_1 g_2) A = R'(g_1 g_2),$$

т.е. соответствие

$$g \rightarrow R'(g)$$

дает новое представление R' группы G в E . Представления R и R' , связанные соотношением (56), называются эквивалентными. В дальнейшем эквивалентные представления различать не будем.

§ 2. Унитарные представления

Пусть пространство E является гильбертовым пространством, т.е. каждой паре векторов \vec{x} и \vec{y} пространства E соответствует комплексное число, называемое скалярным произведением (\vec{x}, \vec{y}) , удовлетворяющее условиям

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})^*, \quad ((\vec{x}_1 + \vec{x}_2), \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y}) \quad (57)$$

и

$$(\vec{x}, \lambda \vec{y}) = (\lambda^* \vec{x}, \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y}) \quad (58)$$

для любого комплексного числа λ . Преобразование R в этом пространстве называется унитарным, если оно не меняет скалярное произведение любой пары векторов, т.е. если для любой пары векторов \vec{x} и \vec{y} выполняется условие

$$(R\vec{x}, R\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}). \quad (59)$$

Это определение унитарных преобразований в случае конечномерного пространства совпадает с определением, данным в п. I, § I.

Определим теперь унитарное представление группы. Пусть гильбертово пространство E преобразуется по представлению R группы G . Если все операторы $R(g)$ этого представления унитарны, то оно называется унитарным представлением. Покажем, что для любой компактной группы каждое её представление эквивалентно некоторому унитарному представлению. Доказательство этого утверждения основывается на том, что для компактной группы можно ввести инвариантное интегрирование.

Покажем прежде всего, что если операторы $R(g)$ неунитарны относительно заданного скалярного произведения (\vec{x}, \vec{y}) , то можно ввести такое новое скалярное произведение $(\vec{x}, \vec{y})'$, что относительно этого скалярного произведения все операторы $R(g)$ унитарны, т.е.

$$(R(g)\vec{x}, R(g)\vec{y})' = (\vec{x}, \vec{y})'. \quad (60)$$

Отметим прежде всего, что для любой пары векторов \vec{x} и \vec{y} величина

$$f(g) = (R(g)\vec{x}, R(g)\vec{y})$$

является некоторой ограниченной функцией на группе G ; для компактной группы G существует инвариантный интеграл (см. формулу (36))

$$\int_G f(h) dh = \int_G f(g h) dh = \int_G f(h g) dh,$$

где g - любой элемент группы G . Положим

$$(\vec{x}, \vec{y})' = \int_G (R(h)\vec{x}, R(h)\vec{y}) dh. \quad (61)$$

Нетрудно проверить, что $(\vec{x}, \vec{y})'$ удовлетворяет соотношениям (57) и (58), т.е. удовлетворяет условиям для скалярного произведения. По отношению к этому скалярному произведению все операторы $R(g)$ унитарны, так как согласно (36) и (61) мы имеем

$$(R(g)\vec{x}, R(g)\vec{y})' = \int_G (R(h)R(g)\vec{x}, R(h)R(g)\vec{y}) dh = \int_G (R(hg)\vec{x}, R(hg)\vec{y}) dh = \int_G (R(h)\vec{x}, R(h)\vec{y}) dh = (\vec{x}, \vec{y})',$$

т.е. условие унитарности (60) выполняется. Пусть теперь \vec{e}_α - некоторый базис, ортонормированный относительно старого скалярного произведения

$$(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta},$$

а \vec{e}'_α - базис, ортонормированный относительно нового скалярного произведения

$$(\vec{e}'_\alpha, \vec{e}'_\beta)' = \delta_{\alpha\beta}.$$

Обозначим через A оператор, переводящий \vec{e}_α в \vec{e}'_α :

$$A \vec{e}_\alpha = \vec{e}'_\alpha.$$

Если

$$\vec{x} = x_\alpha \vec{e}_\alpha, \quad \vec{y} = y_\alpha \vec{e}_\alpha$$

то

$$A \vec{x} = x_\alpha \vec{e}'_\alpha, \quad A \vec{y} = y_\alpha \vec{e}'_\alpha,$$

и, следовательно,

$$(A \vec{x} \cdot A \vec{y})' = x_\alpha y_\alpha = (\vec{x} \cdot \vec{y}), \quad (62)$$

или

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})' = (A^{-1} \vec{x} \cdot A^{-1} \vec{y}). \quad (62')$$

Положим теперь

$$R'(g) = A^{-1} R(g) A.$$

Из соотношений (62'), (60) и (62) следует, что

$$(R'(g) \vec{x} \cdot R'(g) \vec{y}) = (A^{-1} R(g) A \vec{x} \cdot A^{-1} R(g) A \vec{y}) =$$

$$(R(g) A \vec{x} \cdot R(g) A \vec{y})' = (A \vec{x} \cdot A \vec{y})' = (\vec{x} \cdot \vec{y}),$$

т.е. все операторы $R'(g)$ унитарны относительно старого скалярного произведения. Таким образом, каждое представление компактной группы эквивалентно унитарному представлению. Поэтому в дальнейшем для компактной группы Ли мы можем ограничиться лишь унитарными представлениями.

§ 3. Неприводимые представления

Пусть задано некоторое представление R группы G в пространстве E и E_1 — некоторое подпространство пространства E , т.е. некоторое множество элементов из E , которое само является пространством. В преобразовании $R(g)$ вектор \vec{x} из E_1 превращается в вектор $R(g) \vec{x}$, который принадлежит E , но может и не принадлежать E_1 . Если векторы $R(g) \vec{x}$ принадлежат E_1 при любых \vec{x} из E_1 и любых преобразованиях

$R(g)$, т.е. если во всех преобразованиях $R(g)$ векторы из E_1 превращаются в векторы этого же подпространства, то говорим, что E_1 является инвариантным подпространством представления R . Представление R в пространстве E называется приводимым, если существует нетривиальное подпространство E_1 , инвариантное относительно дан-

ного представления. Если такого нетривиального инвариантного подпространства не существует, то представление называется неприводимым.

Пусть R — некоторое приводимое представление группы G в пространстве E , E_1 — некоторое инвариантное подпространство представления R , а E_2 — ортогональное дополнение* к E_1 . Покажем, что если представление R унитарно, то E_2 также является инвариантным подпространством. Действительно, пусть $\vec{x}_1 \in E_1$, $\vec{x}_2 \in E_2$. Так как E_1 является инвариантным подпространством, то $R(g)^{-1} \vec{x}_1 = R(g^{-1}) \vec{x}_1$ также принадлежит E_1 и мы имеем

$$(R(g)^{-1} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = 0.$$

Так как представление R унитарно, то

$$(R(g)^{-1} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = (R(g) R(g)^{-1} \vec{x}_1 \cdot R(g) \vec{x}_2) = (\vec{x}_1 \cdot R(g) \vec{x}_2) = 0.$$

Итак, если $\vec{x}_2 \in E_2$, то $R(g) \vec{x}_2$ ортогонален любому вектору $\vec{x}_1 \in E_1$ для любого $R(g)$, т.е. $R(g) \vec{x}_2 \in E_2$ для любого $R(g)$. Тем самым доказано, что E_2 является инвариантным подпространством. В данном случае пространство E расщепляется на два ортогональных инвариантных подпространства E_1 и E_2 . Если представления R_1 и R_2 , индуцируемые представлением R в подпространствах E_1 и E_2 , соответственно, приводимы, то они снова расщепляются, и в результате представление R расщепляется на неприводимые представления в ортогональных подпространствах. Приводимое представление, расщепляемое на неприводимые представления, называется вполне приводимым. Не всякое приводимое представление вполне приводимо, но приводимое унитарное представление вполне приводимо.

Для компактной группы Ли каждое представление эквивалентно унитарному, т.е. вполне приводимому представлению. Можно показать также, что приводимые представления любой полупростой группы Ли вполне приводимы (см. /13/). Для этих случаев достаточно изучить неприводимые представления.

Покажем теперь, что неприводимые унитарные представления конечномерны. Пусть \vec{e} — единичный вектор в пространстве E , преобразующемуся по унитарному неприводимому представлению R группы G . Тогда в силу унитарности преобразований $R(g)$

* Согласно определению ортогонального дополнения E_2 к подпространству E_1 , каждый вектор $\vec{x} \in E$ может быть представлен однозначно в виде $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, где $\vec{x}_1 \in E_1$ и $\vec{x}_2 \in E_2$ ортогональны, т.е. $(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = 0$.

$$\|R(g)\vec{e}\| = \sqrt{(R(g)\vec{e} \cdot R(g)\vec{e})} = \sqrt{(\vec{e} \cdot \vec{e})} = \|\vec{e}\| = 1.$$

Таким образом, отображение

$$g \rightarrow R(g)\vec{e}$$

является отображением группы G в единичную сферу пространства E . Так как группа компактна, то множество векторов $R(g)\vec{e}$ также компактно. В функциональном анализе показано, что любое компактное множество на единичной сфере гильбертова пространства содержится в конечномерном пространстве. С другой стороны, из неприводимости представления R следует, что E совпадает с пространством, порожденным конечным множеством векторов $R(g)\vec{e}$, т.е. совпадает с множеством всех линейных комбинаций линейно независимых векторов среди векторов $R(g)\vec{e}$, причем число этих линейно независимых векторов конечно. Таким образом, пространство E конечномерно.

Мы говорили, что пространство, преобразуемое по неприводимому представлению R , порождается множеством векторов $R(g)\vec{e}$ для всех $R(g)$ и некоторого вектора \vec{e} . Остановимся теперь более подробно на этом свойстве неприводимых представлений. Пусть задано представление R группы G в пространстве E и E_1 -инвариантное подпространство, преобразуемое по неприводимому представлению R_1 , индуцируемое представлением R . Если мы знаем некоторый вектор \vec{x} подпространства E_1 , то мы можем построить это подпространство следующим образом. Сначала действуем на \vec{x} всеми операторами $R(g)$ из представления R . Мы получим тогда множество векторов $R(g)\vec{x}$. Затем образуем все возможные линейные комбинации векторов из этого множества. Мы получим таким путем подпространство, инвариантное относительно представления R , причем это подпространство не может разпасться на два ортогональных инвариантных подпространства, так как оно порождается множеством векторов $R(g)\vec{x}$, каждый из которых получается из \vec{x} при помощи некоторого преобразования $R(g)$.

Неприводимые представления обладают рядом специфических свойств, одно из которых заключается в следующей лемме Шура: Если представление R группы G в пространстве E неприводимо, то любой оператор A в пространстве E , коммутирующий со всеми операторами $R(g)$, кратен единичному оператору. Иначе говоря, из

$$[R(g), A] = 0 \quad (63)$$

для всех $R(g)$ следует, что

$$A = \lambda I. \quad (64)$$

Докажем эту лемму. Как и любой оператор в комплексном пространстве E , оператор A имеет, по крайней мере, один собственный вектор \vec{x} , соответствующий собственному значению λ

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (65)$$

(см. /14/). Пусть E_1 - подпространство, состоящее из таких собственных векторов \vec{x} . Тогда для любого $\vec{x} \in E_1$ и любого $R(g)$

$$AR(g)\vec{x} = R(g)A\vec{x} = R(g)\lambda\vec{x} = \lambda R(g)\vec{x},$$

т.е. $R(g)\vec{x}$ также принадлежит E_1 . Итак, E_1 является инвариантным подпространством. В силу неприводимости представления R это подпространство E_1 совпадает с пространством E . Поэтому равенство (65) выполняется для любого вектора \vec{x} из E , т.е. оператор A имеет вид (64), что и требовалось доказать.

§ 4. Инфинитезимальные операторы, сопряженные к контраградиентные представления. Произведение представлений

Рассмотрим представление R группы Ли G в пространстве E . Операторы $R(g)$ зависят от существенных параметров ξ_1, \dots, ξ_m , характеризующих элементы g группы G , обозначаются через $R(\xi_1, \dots, \xi_m)$. Из соотношений (38) и (54) следует, что нулевым значением параметров ξ_i соответствует единичный оператор в E

$$R(0, \dots, 0) = I,$$

а при бесконечно малых значениях параметров ξ_i

$$R(\xi_1, \dots, \xi_m) = I + i \xi_j \frac{1}{i} \frac{\partial R(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0} \quad (66)$$

Операторы

$$Y_j = \frac{1}{i} \frac{\partial R(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_1 = \dots = \xi_m = 0} \quad (67)$$

называются инфинитезимальными операторами представления R . Из гомоморфизма группы G и группы R преобразований $R(g)$ следует, что инфинитезимальные операторы Y_j удовлетворя-

от таких же коммутационным соотношениям (45), что и генераторы группы Ли G ,

$$[Y_i, Y_j] = C_{ij}^k Y_k. \quad (68)$$

В частности, инфинитезимальные операторы $K_i, i=1, \dots, \ell$, соответствующие генераторам H_i подгруппы Картана (см. п. 3 главы II), коммутируют

$$[K_i, K_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, \ell. \quad (69)$$

В предыдущем параграфе мы указали метод, при помощи которого мы можем найти инвариантное подпространство E_1 , преобразующееся по неприводимому представлению, исходя из некоторого заданного вектора этого подпространства. Так как каждое конечное преобразование эквивалентно бесконечной последовательности бесконечно малых преобразований вида (66), которые полностью определяются инфинитезимальными операторами Y_i , то подпространство E_1 можно построить, пользуясь только инфинитезимальными операторами, т.е. применяя следующий приём. Пусть \vec{x} — некоторый заданный вектор в подпространстве E_1 , преобразующемся по неприводимому представлению группы G . Действуем на этот вектор \vec{x} всеми инфинитезимальными операторами Y_i , затем на полученные векторы снова действуем всеми операторами Y_i , и продолжаем этот процесс до тех пор, пока не все новые векторы выражаются линейно через полученные раньше векторы. Из этого максимального инвариантного множества выделим систему линейно независимых векторов, через которые выражаются линейно все остальные векторы. Она является базисом подпространства E_1 .

В предыдущем параграфе мы доказали лемму Шура, утверждающую, что в пространстве E , преобразующемся по неприводимому представлению R группы G , любой оператор A , коммутирующий со всеми преобразованиями $R(g)$, кратен единице. Нетрудно показать, что если оператор A коммутирует со всеми инфинитезимальными операторами Y_i данного представления, то он коммутирует со всеми преобразованиями $R(g)$. Итак, лемму Шура можно сформулировать следующим образом: в пространстве E , преобразующемся по неприводимому представлению группы Ли G , любой оператор, коммутирующий со всеми инфинитезимальными операторами данного представления, кратен единице.

Рассмотрим теперь различные представления, связанные с данным представлением R и имеющие такую же размерность, что и R , но не эквивалентные представлению R . Если соответствие (52)

$$\begin{aligned} \bar{g} &\rightarrow R(g) \\ g &\rightarrow R(g)^* \end{aligned} \quad (70)$$

является некоторым представлением группы G , то соответствие

где $R(g)^*$ — матрица, комплексно сопряженная к $R(g)$, является также представлением группы G , как это нетрудно проверить. Это представление называется сопряженным к R представлению и обозначается через R^* . Покажем теперь, что наряду с отображением (52) и (70) соответствие

$$g \rightarrow R(g^{-1})^T = [R(g)^{-1}]^T \quad (71)$$

является также представлением группы G . Действительно, положим

$$\bar{R}(g) = R(g^{-1})^T. \quad (72)$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \bar{R}(g_1) \bar{R}(g_2) &= R(g_1^{-1})^T R(g_2^{-1})^T = [R(g_1^{-1}) R(g_2^{-1})]^T \\ &= R(g_2^{-1} g_1^{-1})^T = R((g_1 g_2)^{-1})^T = \bar{R}(g_1 g_2), \end{aligned}$$

что и требуется доказать. Это представление называется контраградиентным к R представлению \bar{R} .

Заметим, что для унитарных представлений контраградиентное к R представление \bar{R} совпадает с сопряженным к R представлением R^* . Действительно, так как все операторы $R(g)$ унитарны

$$R(g)^+ = R(g)^{-1} = R(g^{-1}),$$

то

$$R(g)^* = R(g^{-1})^T.$$

Введение контраградиентных представлений позволяет образовать инварианты групп. Пусть \vec{x} — вектор с компонентами x_α , преобразующийся по представлению R группы G , а \vec{y} — вектор с компонентами y_α , преобразующийся по представлению \bar{R} , причем R может быть неунитарным. Мы имеем

$$x'_\alpha = R(g)_{\alpha\beta} x_\beta, \quad y'_\alpha = \bar{R}(g)_{\alpha\beta} y_\beta = R(g^{-1})_{\beta\alpha} y_\beta.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} y'_\alpha x'_\alpha &= y_\beta R(g^{-1})_{\beta\alpha} R(g)_{\alpha\gamma} x_\gamma = y_\beta R(e)_{\beta\gamma} x_\gamma \\ &= y_\beta x_\beta, \end{aligned}$$

т.е. сумма $y_\alpha x_\alpha$ является инвариантом.

Если бесконечно малым значениям параметров соответствует преобразование (66) для представления R , то для представления \bar{R} мы имеем

$$\overline{R(\xi_1, \dots, \xi_m)} = I - i \xi_j Y_j^T. \quad (73)$$

С другой стороны, если обозначим через \bar{Y}_j инфинитезимальные операторы представления \bar{R} , то

$$\overline{R(\xi_1, \dots, \xi_m)} = I + i \xi_j \bar{Y}_j. \quad (74)$$

Сравнивая (73) и (74), получим

$$\bar{Y}_j = - Y_j^T. \quad (75)$$

Рассмотрим, наконец, произведение двух представлений. Произведения нескольких представлений определяются аналогично. Пусть R_1 и R_2 — два представления группы G в пространствах E_1 и E_2 размерности n_1 и n_2 , соответственно, а \vec{e}_α и \vec{f}_β — базисы в этих пространствах. Рассмотрим пространство E размерности $n_1 \times n_2$, базис которого образуется из произведений $\vec{e}_\alpha \otimes \vec{f}_\beta$. Каждый вектор \vec{x} в этом пространстве E имеет вид:

$$\vec{x} = \vec{e}_\alpha \otimes \vec{f}_\beta x_{\alpha\beta} = \vec{e}_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}. \quad (76)$$

Далее, пусть векторы \vec{e}_α и \vec{f}_β преобразуются следующим образом в преобразованиях $R_1(g)$ и $R_2(g)$ пространств E_1 и E_2 , соответственно,

$$R_1(g) \vec{e}_\alpha = \vec{e}'_\alpha = R_{1\beta\alpha}(g) \vec{e}_\beta, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n_1, \quad (77)$$

$$R_2(g) \vec{f}_\alpha = \vec{f}'_\alpha = R_{2\beta\alpha}(g) \vec{f}_\beta, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n_2.$$

Тогда компоненты x_α и y_β векторов \vec{x} и \vec{y} в E_1 и E_2 , соответственно, преобразуются следующим образом

$$\begin{aligned} x'_\alpha &= R_{1\beta\alpha}(g) x_\beta, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n_1, \\ y'_\alpha &= R_{2\beta\alpha}(g) y_\beta, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n_2. \end{aligned} \quad (78)$$

Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= R_1(g) \vec{x} = R_1(g) x_\alpha \vec{e}_\alpha = x_\alpha \vec{e}'_\alpha = x_\alpha R_{1\beta\alpha}(g) \vec{e}_\beta, \\ \vec{y}' &= R_2(g) \vec{y} = R_2(g) y_\alpha \vec{f}_\alpha = y_\alpha \vec{f}'_\alpha = y_\alpha R_{2\beta\alpha}(g) \vec{f}_\beta. \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с определением

$$\vec{x}' = x'_\beta \vec{e}_\beta, \quad \vec{y}' = y'_\beta \vec{f}_\beta,$$

мы получаем соотношение (78). Мы покажем теперь, что если соотношения (78) определяют представления R_1 и R_2 в E_1 и E_2 , то они также определяют некоторое представление

R в E . Действительно, в преобразованиях (77) вектор $\vec{e}_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \otimes \vec{f}_\beta$ превращается в вектор $\vec{e}'_{\alpha\beta}$, который мы обозначим через $R(g) \vec{e}_{\alpha\beta}$:

$$R(g) \vec{e}_{\alpha\beta} = \vec{e}'_{\alpha\beta} = \vec{e}'_\alpha \otimes \vec{f}'_\beta = R_1(g)_{\alpha\gamma} \vec{e}_\gamma \otimes R_2(g)_{\beta\delta} \vec{f}_\delta$$

или

$$R(g) \vec{e}_{\alpha\beta} = R_1(g)_{\alpha\gamma} R_2(g)_{\beta\delta} \vec{e}_{\gamma\delta}. \quad (79)$$

Отсюда следует, что компоненты $x_{\alpha\beta}$ вектора \vec{x} из E преобразуются следующим образом:

$$x'_{\alpha\beta} = R(g)_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} x_{\gamma\delta} = R_1(g)_{\alpha\gamma} R_2(g)_{\beta\delta} x_{\gamma\delta}. \quad (80)$$

Итак, матричные элементы преобразования $R(g)$ связаны с матричными элементами преобразований $R_1(g)$ и $R_2(g)$ соотношением

$$R(g)_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} = R_1(g)_{\alpha\gamma} R_2(g)_{\beta\delta}. \quad (81)$$

Пусть g и h — любые элементы из G . Из соотношения (81) следует, что

$$\begin{aligned} R(g h)_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} &= R_1(g h)_{\alpha\gamma} R_2(g h)_{\beta\delta} = R_1(g)_{\alpha\alpha'} R_1(h)_{\alpha'\gamma} R_2(g)_{\beta\beta'} R_2(h)_{\beta'\delta} \\ &= R(g)_{(\alpha\beta)(\alpha'\beta')} R(h)_{(\alpha'\beta')(\gamma\delta)}. \end{aligned}$$

Итак, соответствие

$$g \longrightarrow R(g)_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$$

является представлением группы G . Оно называется произведением представлений R_1 и R_2 .

Соотношение (81) позволяет установить связь между инфинитезимальными операторами Y_k представления R и инфинитезимальными операторами $Y_k^{(1)}$ и $Y_k^{(2)}$ представлений R_1 и R_2 .

Для бесконечно малых значений параметров

$$R_1(\xi_1, \dots, \xi_m)_{\alpha\gamma} \approx \delta_{\alpha\gamma} + i \xi_k (Y_k^{(1)})_{\alpha\gamma},$$

$$R_2(\xi_1, \dots, \xi_m)_{\beta\delta} \approx \delta_{\beta\delta} + i \xi_k (Y_k^{(2)})_{\beta\delta},$$

и, следовательно

$$[R(\xi_1, \dots, \xi_m)]_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} \approx \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + i \xi_k \left[\delta_{\alpha\gamma} (Y_k^{(2)})_{\beta\delta} + (Y_k^{(1)})_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \right], \quad (82)$$

или в матричном виде:

$$R(\xi_1, \dots, \xi_m) = I + i \xi_k \left[I^{(1)} \otimes Y_k^{(2)} + Y_k^{(1)} \otimes I^{(2)} \right]. \quad (82')$$

Сравнивая с определением

$$R(\xi_1, \dots, \xi_m) = I + i \xi_k Y_k,$$

мы получаем

$$Y_k = I^{(1)} \otimes Y_k^{(2)} + Y_k^{(1)} \otimes I^{(2)}. \quad (83)$$

Здесь $I^{(i)}$ является единичным оператором в пространстве E_i , и операторы $Y_k^{(i)}$ действуют только на первый индекс, а $Y_k^{(2)}$ - на второй. Отметим, что произведение неприводимых представлений, вообще говоря, приводимо. Оно может быть разложено на неприводимые представления, если оно вполне приводимо. Эти разложения будут рассмотрены в дальнейшем в конкретных случаях.

Для простоты при определении произведения представлений мы предположили, что базисные векторы имеют вид произведений $\vec{e}_\alpha \otimes \vec{f}_\beta$. В действительности нет необходимости в этой специализации пространства E . Вообще говоря, для определения произведения представлений достаточно ввести непосредственно базис $\vec{e}_{\alpha\beta}$, преобразующийся по закону (79).

IV. ГРУППА $SU(n)$ И ЕЁ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

§ I. Генераторы группы $SU(n)$ и её основные представления

В качестве примера применения общей теории, изложенной в предыдущих параграфах, мы рассмотрим группу $SU(n)$. Мы докажем ряд общих утверждений для унитарных унимодулярных групп, которыми будем пользоваться при изучении симметрий $SU(2)$, $SU(6)$, $SU(6)$, а также симметрий $SL(6)$ и $U(6,6)$.

Посмотрим прежде всего, от скольких вещественных параметров зависят элементы группы $SU(n)$. Напомним, что из условия

$$\det U(\xi_1, \dots, \xi_m) = 1$$

для матрицы $U(\xi_1, \dots, \xi_m)$, бесконечно близкой к единице

$$U(\xi_1, \dots, \xi_m) \approx I + i \xi_k X_k$$

следует, что шпур генераторов X_k равен нулю

$$\text{Sp } X_k = 0, \quad (84)$$

а из условия унитарности

$$U(\xi_1, \dots, \xi_m)^\dagger U(\xi_1, \dots, \xi_m) = I$$

следует, что матрицы X_k эрмитовы

$$X_k^\dagger = X_k \quad (85)$$

(см. (43) и (44), § 2, П). Каждая комплексная матрица $n \times n$ имеет n^2 комплексных матричных элементов, т.е. зависит от $2n^2$ вещественных параметров. Условие эрмитовости (85) эквивалентно n^2 уравнениям и уменьшает число независимых матриц до n^2 . Так как шпур эрмитовой матрицы действителен, то условие (84) дает одно новое уравнение и число независимых матриц, удовлетворяющих условиям (84) и (85), равно $n^2 - 1$. Итак, размерность m группы $SU(n)$ равна

$$m = n^2 - 1. \quad (86)$$

Для $n = 2, 3, 6$ мы имеем $m = 3, 8, 35$, соответственно.

Рассмотрим теперь некоторые основные неприводимые представления группы $SU(n)$. Представление с наименьшей размерностью является одномерное представление, в котором всем элементам $g = U$ соответствует умножение на 1:

$$U \rightarrow 1$$

и, следовательно, все инфинитезимальные операторы равны нулю:

$$Y_k = 0. \quad (87)$$

Нетрудно показать, что одним из неприводимых представлений с наименьшей размерностью, отличной от I, является представление

$$U \rightarrow U.$$

В данном случае сама группа $SU(n)$ рассматривается как её представление. Это представление называется фундаментальным представлением. Его инфинитезимальные операторы совпадают с генераторами группы

$$Y_k = X_k. \quad (88)$$

Другим неприводимым представлением с наименьшей размерностью, отличной от I, является контраградиентное к фундаментальному представлению, совпадающее с сопряженным, инфинитезимальные операторы которого равны:

$$Y_k = \bar{X}_k = -X_k^T. \quad (89)$$

Условимся теперь об обозначениях. Базисные векторы в пространстве E_1 , преобразующимся по фундаментальному представлению, обозначим через \vec{e}^{α} , $\alpha = 1, 2, \dots, n$. В преобразовании U вектор \vec{e}^{α} превращается в некоторый вектор \vec{e}'^{α}

$$\vec{e}'^{\alpha} = U \vec{e}^{\alpha} = U_{\rho\alpha} \vec{e}^{\rho}. \quad (90)$$

Пусть $\vec{\psi}$ - вектор в E_1 с компонентами ψ_{α}

$$\vec{\psi} = \psi_{\alpha} \vec{e}^{\alpha}. \quad (91)$$

Тогда в преобразовании U он превращается в вектор $\vec{\psi}'$ с компонентами ψ'_{α}

$$\psi'_{\alpha} = U_{\alpha\rho} \psi_{\rho}. \quad (92)$$

В дальнейшем векторы в пространстве E_1 , преобразующимся по фундаментальному представлению, будем называть ковариантными спинорами первого ранга. Итак, компоненты ковариантных спиноров первого ранга преобразуются по закону (92).

Аналогично, в пространстве $E_{\bar{1}}$, преобразующимся по представлению, контраградиентному

к фундаментальному представлению, выберем некоторый базис \vec{e}_{α} . Преобразование векторов \vec{e}_{α} имеет вид:

$$\vec{e}'_{\alpha} = U^* \vec{e}_{\alpha} = U^*_{\rho\alpha} \vec{e}_{\rho}. \quad (93)$$

Если $\vec{\bar{\psi}}$ - некоторый вектор из $E_{\bar{1}}$ с компонентами $\bar{\psi}^{\alpha}$

$$\vec{\bar{\psi}} = \bar{\psi}^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}, \quad (94)$$

то по аналогии с (92) мы имеем

$$\bar{\psi}'^{\alpha} = U^*_{\alpha\rho} \bar{\psi}^{\rho} = \bar{\psi}^{\rho} U^*_{\rho\alpha}. \quad (95)$$

Векторы в $E_{\bar{1}}$ называем контравариантными спинорами первого ранга. Итак, компоненты контравариантных спиноров первого ранга преобразуются по закону (95).

§ 2. Спиноры высших рангов

Перейдем теперь к изучению пространств, преобразующихся по представлениям, являющимся произведениями фундаментальных представлений и контраградиентных к фундаментальному представлений. Рассмотрим прежде всего пространство E_r , преобразующее по представлению $U \otimes U \otimes \dots \otimes U$, являющемуся произведением r фундаментальных представлений U . Базисные векторы $\vec{e}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ в этом пространстве преобразуются следующим образом

$$\vec{e}'^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = U^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \vec{e}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = U_{\beta_1 \alpha_1} U_{\beta_2 \alpha_2} \dots U_{\beta_r \alpha_r} \vec{e}^{\beta_1 \dots \beta_r}, \quad (96)$$

по аналогии с законом (79) для произведения двух представлений. Произвольный вектор $\vec{\psi}^r$ в E_r имеет вид:

$$\vec{\psi}^r = \psi^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \vec{e}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}. \quad (97)$$

Компоненты $\psi^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ преобразуются по закону

$$\psi'^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = U_{\alpha_1 \beta_1} U_{\alpha_2 \beta_2} \dots U_{\alpha_r \beta_r} \psi^{\beta_1 \dots \beta_r}, \quad (98)$$

как это нетрудно проверить. Векторы в E_r с компонентами вида $\psi^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ называются ковариантными спинорами r -го ранга. Итак, компоненты ковариантных спиноров r -го ранга преобразуются как произведения r компонент ковариантных спиноров первого ранга.

Аналогично базисные векторы $\vec{e}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ в пространстве $E_{\bar{r}}$, преобразующимся по представлению $U^* \otimes U^* \otimes \dots \otimes U^*$, являющемуся произведением r контраградиентных к фундаментальному представлений U^* , преобразуются следующим образом:

$$\vec{e}'_{\alpha_1 \dots \alpha_r} = U^{\beta_1 \alpha_1} \dots U^{\beta_r \alpha_r} \vec{e}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r}, \quad (99)$$

а компоненты $\psi^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ вектора $\vec{\psi}$

$$\vec{\psi}' = \psi^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \vec{e}'_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \quad (100)$$

преобразуются по закону

$$\psi'^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = U^*_{\alpha_1 \beta_1} \dots U^*_{\alpha_r \beta_r} \psi^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r} = \psi^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r} U^*_{\beta_1 \alpha_1} \dots U^*_{\beta_r \alpha_r} \quad (101)$$

Эти векторы называются контравариантными спинорами r -го ранга. Итак, соотношение (101) является законом преобразования компонент контравариантных спиноров r -го ранга.

Аналогично для пространства $E_{r\bar{q}}$, преобразующегося по представлению

$$U \otimes \dots \otimes U \otimes U^* \otimes \dots \otimes U^*,$$

мы имеем базис $\vec{e}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_q}$, причем

$$U^{\beta_1 \alpha_1} \dots U^{\beta_r \alpha_r} \vec{e}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_q} = U^{\beta_1 \alpha_1} \dots U^{\beta_r \alpha_r} U^*_{\beta_1 \beta_1} \dots U^*_{\beta_q \beta_q} \vec{e}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_q}. \quad (102)$$

Компоненты вектора

$$\psi^{\beta_1 \dots \beta_q}_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \quad (103)$$

преобразуются по закону

$$\psi'^{\beta_1 \dots \beta_q}_{\alpha_1 \dots \alpha_r} = U_{\alpha_1 \beta_1} \dots U_{\alpha_r \beta_r} U^*_{\beta_1 \beta_1} \dots U^*_{\beta_q \beta_q} \psi^{\beta_1 \dots \beta_q}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}. \quad (104)$$

Эти векторы называются смешанными спинорами, ковариантными r раз и контравариантными q раз. Так как каждый спинор полностью определяется своими компонентами, то в дальнейшем для характеристики спиноров, т.е. векторов в пространствах типа $E_{r\bar{q}}$, будем пользоваться их компонентами $\psi^{\beta_1 \dots \beta_q}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}$.

В заключение этого параграфа рассмотрим три специальных спинора высших рангов: спинор второго ранга в $E_{1\bar{1}}$ с компонентами

$$\psi^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \quad (105)$$

и спиноры n -го ранга в E_n или $E_{\bar{n}}$ с компонентами

$$\psi^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad (106)$$

$$\psi^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad (107)$$

где $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0$, если два (или больше) индекса α_i, α_j совпадают, = 1, если $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$ является четной перестановкой $(1, 2, \dots, n)$, = -1, если $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$ является нечетной перестановкой. Этот спинор называем полностью антисимметричным тензором n -го ранга. Для спинора (105) в силу условия $UU^* = I$ мы имеем закон преобразования

$$\delta'^{\alpha}_{\beta} = U_{\beta\gamma} U^*_{\alpha\gamma} \delta^{\gamma}_{\beta} = U_{\beta\gamma} U^*_{\gamma\alpha} = (UU^*)_{\beta\alpha} = \delta^{\alpha}_{\beta},$$

а для спиноров (106) и (107) в силу условия $\det U = 1$ мы имеем

$$\varepsilon'^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = U_{\alpha_1 \beta_1} \dots U_{\alpha_n \beta_n} \varepsilon^{\beta_1 \dots \beta_n} = \det U \cdot \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n},$$

и

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = U^*_{\alpha_1 \beta_1} \dots U^*_{\alpha_n \beta_n} \varepsilon^{\beta_1 \dots \beta_n} = \det U^* \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}.$$

Таким образом, компоненты спиноров (105), (106) и (107) не меняются при всех преобразованиях группы $SU(n)$. Иначе говоря, эти спиноры являются инвариантами группы $SU(n)$. Если обозначим через \vec{e}^{α}_{β} , $\vec{e}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ и $\vec{e}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ базис в пространствах $E_{1\bar{1}}$, E_n и $E_{\bar{n}}$, соответственно, то векторы в этих пространствах с компонентами (105), (106) и (107) имеют вид

$$\vec{\delta} = \vec{e}^{\alpha}_{\alpha} = \vec{e}^1_1 + \dots + \vec{e}^n_n, \quad (105')$$

$$\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}^{12\dots n} - \vec{e}^{21\dots n} + \vec{e}^{231\dots n} - \dots \quad (106')$$

$$\vec{\varepsilon}_{\bar{1}} = \vec{e}_{123\dots n} - \vec{e}_{213\dots n} + \vec{e}_{231\dots n} - \dots \quad (107')$$

Эти векторы являются базисами одномерных подпространств, инвариантных относительно группы $SU(n)$, т.е. являются базисами пространств, преобразующихся по её одномерным представлениям.

§ 3. Неприводимые представления

Рассмотренные в предыдущем параграфе представления, являющиеся произведениями фундаментальных и контраградиентных им представлений, приводимы. Так как эти представления являются произведениями унитарных представлений, то они унитарны и, следовательно, вполне приводимы (см. § 3, Ш). Теперь займемся разложением этих представлений на неприводимые.

Начнем с простого примера представления $u \otimes u$ в пространстве E_2 с базисом $\vec{e}^{\alpha_1 \alpha_2}$. Векторы в этом пространстве являются ковариантными спинорами второго ранга. Из произвольного спинора $\psi_{\alpha_1 \alpha_2}$ образуем симметричный и антисимметричный спиноры с компонентами

$$\psi_{\{\alpha_1 \alpha_2\}} = \frac{1}{2} (\psi_{\alpha_1 \alpha_2} + \psi_{\alpha_2 \alpha_1}), \quad (108)$$

$$\psi_{[\alpha_1 \alpha_2]} = \frac{1}{2} (\psi_{\alpha_1 \alpha_2} - \psi_{\alpha_2 \alpha_1}). \quad (109)$$

В соответствии с этим пространство E_2 разлагается на два подпространства E_2^+ и E_2^- , базисы которых образуются $\frac{n(n+1)}{2}$ векторами

$$\vec{e}^{\{\alpha_1 \alpha_2\}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}^{\alpha_1 \alpha_2} + \vec{e}^{\alpha_2 \alpha_1}), & \alpha_1 \neq \alpha_2 \\ \vec{e}^{\alpha_1 \alpha_1} & \alpha_1 = \alpha_2 \end{cases} \quad (108')$$

и $\frac{n(n-1)}{2}$ векторами

$$\vec{e}^{[\alpha_1 \alpha_2]} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}^{\alpha_1 \alpha_2} - \vec{e}^{\alpha_2 \alpha_1}), \quad (109')$$

соответственно. Любой вектор в E_2^+ имеет вид

$$\vec{\psi}^+ = \sum_{\alpha_1 > \alpha_2} \Phi_{\alpha_1 \alpha_2} \vec{e}^{\{\alpha_1 \alpha_2\}} = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha \alpha} \vec{e}^{\alpha \alpha} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha_1 > \alpha_2} \Phi_{\alpha_1 \alpha_2} (\vec{e}^{\alpha_1 \alpha_2} + \vec{e}^{\alpha_2 \alpha_1}). \quad (110)$$

Если обозначим через $\psi_{\alpha_1 \alpha_2}^+$ компоненты $\vec{\psi}^+$ в исходном базисе $\vec{e}^{\alpha_1 \alpha_2}$, то

$$\vec{\psi}^+ = \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \psi_{\alpha_1 \alpha_2}^+ \vec{e}^{\alpha_1 \alpha_2}. \quad (111)$$

Сравнивая (110) с (111), мы получаем

$$\psi_{\alpha_2 \alpha_1}^+ = \psi_{\alpha_1 \alpha_2}^+ = \begin{cases} \Phi_{\alpha_1 \alpha_2} & \alpha_1 = \alpha_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{\alpha_1 \alpha_2} & \alpha_1 > \alpha_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{\alpha_2 \alpha_1} & \alpha_1 < \alpha_2 \end{cases}$$

т.е. $\psi_{\alpha_2 \alpha_1}^+ = \psi_{\alpha_1 \alpha_2}^+$. Таким образом, векторы в E_2^+ являются симметричными спинорами. Аналогично векторы в E_2^- являются антисимметричными спинорами. Так как любой вектор вида (108') ортогонален любому вектору вида (109'), то подпространства E_2^+ и E_2^- ортогональны. Они являются инвариантными подпространствами. Действительно, нетрудно проверить, что в любом преобразовании $u \otimes u$ симметричный спинор второго ранга превращается в симметричный спинор второго ранга т.е. вектор из подпространства E_2^+ превращается в вектор из этого подпространства, и аналогично антисимметричный спинор превращается в антисимметрич-

ный спинор, т.е. подпространство E_2^+ превращается в себя. Можно показать также, что они преобразуются по неприводимым представлениям. Доказательство этого утверждения можно провести следующим образом. Выберем любые два базисных вектора, например, вида (108'). С помощью конкретных выражений матриц Y_k , являющихся инфинитезимальными операторами данного представления (см. (83)), мы можем показать, что существует такая последовательность инфинитезимальных операторов $Y_{k_1}, Y_{k_2}, \dots, Y_{k_m}$, что в результате действия этих операторов на один из выбранных векторов мы получаем вектор, пропорциональный второму. Тем самым неприводимость представлений в E_2^+ и E_2^- доказана (ср. с методом построения неприводимых представлений, изложенным в III, § 4).

Таким образом, любой ковариантный спинор второго ранга разлагается на симметричный и антисимметричный ковариантные спиноры

$$\psi_{\alpha_1 \alpha_2} = \psi_{\{\alpha_1 \alpha_2\}} + \psi_{[\alpha_1 \alpha_2]}, \quad (112)$$

образующие неприводимые представления.

Рассмотрим теперь представление $u \otimes u^+$ в пространстве E_{2^+} с базисом $\vec{e}^{\alpha \beta}$. Векторы в этом пространстве являются спинорами второго ранга с компонентами $\psi_{\alpha \beta}^+$. Покажем прежде всего, что сумма $\psi_{\alpha \alpha}^+$ инвариантна относительно всех преобразований $u \otimes u^+$. Действительно, согласно (104), имеем

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha \beta}^+ &= u_{\alpha \gamma} u_{\beta \delta}^+ \psi_{\gamma \delta}^+ \\ \psi_{\alpha \alpha}^+ &= u_{\alpha \gamma} u_{\alpha \delta}^+ \psi_{\gamma \delta}^+ = u_{\alpha \gamma} u_{\delta \alpha}^+ \psi_{\gamma \delta}^+ = \\ &= (u^+ u)_{\delta \gamma} \psi_{\gamma \delta}^+ = \delta_{\delta \gamma} \psi_{\gamma \delta}^+ = \psi_{\alpha \alpha}^+, \end{aligned}$$

что и требуется доказать. Отсюда следует, в частности, что если спинор $\psi_{\alpha \beta}^+$ имеет шпур равный нулю, то это свойство инвариантно относительно всех преобразований $u \otimes u^+$. Рассмотрим теперь произвольный спинор $\psi_{\alpha \beta}^+$ и разложим его на две части, первая из которых имеет нулевой шпур, а вторая пропорциональна $\delta_{\alpha \beta}^+$:

$$\psi_{\alpha \beta}^+ = \left(\psi_{\alpha \beta}^+ - \frac{1}{n} \delta_{\alpha \beta}^+ \psi_{\gamma \gamma}^+ \right) + \frac{1}{n} \delta_{\alpha \beta}^+ \psi_{\gamma \gamma}^+. \quad (113)$$

В предыдущем параграфе мы показали, что спинор $\delta_{\alpha \beta}^+$ является инвариантом. Таким образом, спиноры с нулевым шпуром $\psi_{\alpha \beta}^+ - \frac{1}{n} \delta_{\alpha \beta}^+ \psi_{\gamma \gamma}^+$ и спиноры $\frac{1}{n} \delta_{\alpha \beta}^+ \psi_{\gamma \gamma}^+$, кратные спинору $\delta_{\alpha \beta}^+$,

образуют инвариантные подпространства в E_{2n} . Эти подпространства ортогональны, так как скалярное произведение δ_α^β на произвольный спинор Φ_β^α равно шпuru этого спинора

$$\delta_\alpha^\beta \Phi_\beta^\alpha = \Phi_\alpha^\alpha.$$

При помощи указанного выше метода можно показать, что спиноры с нулевым шпуром образуют неприводимые представления. Таким образом, формула (II3) является разложением произвольного спинора Ψ_α^β на неприводимые. Первый спинор в этой формуле имеет $n^2 - 1$ компонент, а второй является инвариантом.

Отметим, что инвариантность суммы Ψ_α^α является частным случаем следующего общего факта: Если $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_q}$ - смешанный спинор $(r+q)$ -го ранга, r раз ковариантный и q раз контравариантный, то сумма $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_q}$ является смешанным спинором $(r+q-2)$ -го ранга, $r-1$ раз ковариантным и $q-1$ раз контравариантным. Доказательство этого важного утверждения не отличается от доказательства инвариантности суммы Ψ_α^α .

Рассмотрим теперь спиноры высших рангов. Из любого ковариантного спинора, например, r -го ранга, можно образовать полностью симметричный спинор $\Psi_{\{\alpha_1 \dots \alpha_r\}}$, который является неприводимым. Аналогично, если $r \leq n$, то можно образовать также полностью антисимметричный спинор $\Psi_{[\alpha_1 \dots \alpha_r]}$, который также неприводим. Так как для полностью антисимметричного спинора все индексы должны быть разными, то не существует полностью антисимметричного спинора ранга $r > n$. Симметричный спинор r -го ранга имеет $\frac{1}{r!} n(n+1) \dots (n+r-1)$ независимых компонент, а антисимметричный спинор r -го ранга имеет $\frac{1}{r!} n(n-1) \dots (n-r+1)$ компонент. Кроме спиноров $\Psi_{\{\alpha_1 \dots \alpha_r\}}$ и $\Psi_{[\alpha_1 \dots \alpha_r]}$ существуют также и другие спиноры, симметризованные по некоторым парам индексов и затем антисимметризованные по другим парам. Эти спиноры характеризуются так называемыми схемами Юнга, содержащими клетки, причем антисимметричным индексам соответствуют клетки, расположенные в одном столбце, а симметризованным индексам - клетки в одной строке. Так, например, любой ковариантный спинор третьего ранга $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$ может быть представлен в виде суммы четырех следующих неприводимых спиноров: полностью симметричный спинор

$$\Psi_{\{\alpha\beta\gamma\}} = \frac{1}{6} (\Psi_{\alpha\beta\gamma} + \Psi_{\beta\alpha\gamma} + \Psi_{\gamma\alpha\beta} + \Psi_{\gamma\beta\alpha} + \Psi_{\alpha\gamma\beta} + \Psi_{\alpha\beta\gamma}), \quad (II4)$$

полностью антисимметричный спинор

$$\Psi_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{6} (\Psi_{\alpha\beta\gamma} - \Psi_{\beta\alpha\gamma} + \Psi_{\gamma\alpha\beta} - \Psi_{\gamma\beta\alpha} + \Psi_{\alpha\gamma\beta} - \Psi_{\alpha\beta\gamma}), \quad (II5)$$

спинор, симметризованный по α и β и затем антисимметризованный по β и γ

$$\Psi_{\{\alpha\beta\}\gamma} = \frac{1}{3} (\Psi_{\alpha\beta\gamma} + \Psi_{\beta\alpha\gamma} - \Psi_{\alpha\gamma\beta} - \Psi_{\beta\gamma\alpha}), \quad (II6)$$

и спинор, симметризованный по β и γ и затем антисимметризованный по α и β

$$\Psi_{\{\alpha\}\beta\gamma} = \frac{1}{3} (\Psi_{\alpha\beta\gamma} + \Psi_{\alpha\gamma\beta} - \Psi_{\beta\alpha\gamma} - \Psi_{\beta\gamma\alpha}). \quad (II7)$$

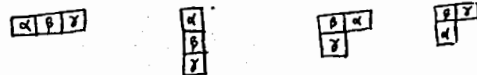
Действительно, нетрудно видеть, что

$$\Psi_{\alpha\beta\gamma} = \Psi_{\{\alpha\beta\}\gamma} + \Psi_{\{\alpha\}\beta\gamma} + \Psi_{\{\alpha\beta\}\gamma} + \Psi_{\{\alpha\}\beta\gamma}. \quad (II8)$$

Отметим, что спиноры (II6) и (II7) удовлетворяют тождеству вида

$$\Psi_{\{\alpha\beta\}\gamma} + \Psi_{\{\beta\gamma\}\alpha} + \Psi_{\{\gamma\alpha\}\beta} = 0. \quad (II9)$$

Неприводимые спиноры (II4) - (II7) характеризуются следующими схемами Юнга



Числа их компонент равны $\frac{1}{3!} n(n+1)(n+2)$, $\frac{1}{3!} n(n-1)(n-2)$, $\frac{1}{3} n(n^2-1)$ и $\frac{1}{3} n(n^2-1)$. Аналогично любой ковариантный спинор r -го ранга разлагается в сумму неприводимых спиноров, симметризованных и антисимметризованных по определенным схемам Юнга.

Мы рассмотрели ковариантные спиноры. При помощи полностью антисимметричного спинора n -го ранга $\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ для любых контраградиентных и смешанных спиноров можно ввести эквивалентные им ковариантные спиноры. Так, например контравариантный спинор Ψ^α эквивалентен полностью антисимметричному ковариантному спинору 5-го ранга

$$\Psi_{[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} \Psi^\nu,$$

так как произведение $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} \Psi^\nu$ образует спинор 7-го ранга, 6 раз ковариантный и один раз контравариантный, а суммирование по ν превращает его в ковариантный спинор 5-го ранга. Аналогичным методом можно опускать все верхние индексы любого спинора и превращать его в ковариантный спинор. Для характеристики последнего можно пользоваться схемой Юнга. Итак, все спиноры характеризуются полностью схемами Юнга.

Как было указано, не существует полностью антисимметричного спинора ранга $r > n$. Это означает, что каждый столбец в схеме Юнга содержит не больше n клеток. Более того, полностью антисимметричный спинор n -го ранга является инвариантом, так что их можно не рассматривать. Итак, каждый столбец фактически содержит не больше $n-1$ клеток, т.е. схема Юнга содержит не больше $n-1$ строк, каждая из которых может содержать любое число клеток. Числа клеток в этих строках $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ полностью определяют соответствующее неприводимое представление. Иначе говоря, каждое неприводимое пред-

ставление характеризуется $n-1$ целыми числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$, являющимися числами клеток в $n-1$ строках в соответствующей схеме Юнга. Во многих случаях эквивалентные спиноры типа ψ^α и $\psi_{[\alpha\beta\gamma\delta]}$, например, физически неэквивалентны. Тогда необходимо рассмотреть отдельно верхние и нижние индексы, и для характеристики спиноров нужно ввести две схемы Юнга, одну для верхних индексов, а другую для нижних. Чтобы образовать неприводимые представления необходимо также вычесть спуры по всем парам индексов, содержащим один верхний и один нижний индекс.

В заключение отметим, что группа $SU(n)$ компактна. Следовательно, все её представления можно считать унитарными. Они вполне приводимы и распадаются на неприводимые представления, а последние конечномерны. При помощи изложенного выше метода мы исчерпываем все возможные неприводимые представления группы $SU(n)$.

Литература:

1. А.С. Понтрягин, Непрерывные группы, ГИТТЛ, 1954, глава I.
2. Н.Г. Чеботарёв, Теория групп Ли, ГИТТЛ, 1950, глава I.
3. В.И. Смирнов, Курс высшей математики ГИТТЛ, 1957, т. III, ч. 2, глава II.
4. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, ГИФМЛ, 1958 г., глава I.
5. М.А. Наймарк, Линейные представления группы Лоренца, ГИФМЛ, 1956, Глава I.
6. А.С. Понтрягин, см. ссылку I, глава V.
7. Н. Джекобсон, Алгебра Ли, Изд. Мир, 1964, глава VI.
8. А.С. Понтрягин, см. ссылку I, глава VI.
9. А.С. Понтрягин, см. ссылку I, глава X.
10. Н.Г. Чеботарев, см. ссылку 2, глава II.
11. А.С. Понтрягин, см. ссылку I, глава X.
12. Н.Г. Чеботарёв, см. ссылку 2, глава III.
13. Н. Джекобсон, см. ссылку 7, глава III.
14. В.И. Смирнов, см. ссылку 3, глава II.

ГЛАВА II
ГРУППА $SU(2)$ И ИЗОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

I. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $SU(2)$

§ I. Группа вращений и состояния с определенными моментами

В квантовой механике предполагается, что при вращениях пространства волновые функции состояний физических систем преобразуются по неприводимым представлениям группы вращений. Обозначим через J_i инфинитезимальные операторы, соответствующие генераторам X_i группы вращений, определяемым формулами (40) и (40') в главе I. Из инвариантности волнового уравнения относительно группы вращений следует, что гамильтониан H коммутирует со всеми инфинитезимальными операторами J_i :

$$[H, J_i] = 0.$$

Следовательно, эти инфинитезимальные операторы выражают сохраняющиеся физические величины. Они называются операторами углового момента.

Операторы углового момента удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k$$

(см. главу I, формулу (41')). Из этих соотношений следует, что полный момент

$$\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$$

коммутирует со всеми J_i :

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0.$$

Согласно лемме Шура (см. главу I, п. III, § 4), для каждого неприводимого представления оператор \vec{J}^2 кратен единице, т.е. имеет определенное собственное значение. Иначе говоря, состояния с определенными угловыми моментами преобразуются по неприводимым представлениям группы вращений. Так как группа вращений и группа $SU(2)$ локально изоморфны (см. главу I, п. I, § 5), то группу вращений в дальнейшем будем отождествлять с группой $SU(2)$.

Рассмотрим теперь некоторые общие свойства неприводимых представлений группы $SU(2)$. Индексы спиноров обозначим через a, b, \dots . Так как каждый индекс может принимать только два значения $a, b = 1, 2$, то единственными антисимметричными спинорами являются антисимметричные спиноры второго ранга ϵ^{ab} и ϵ_{ab} . Для удобства мы выберем эти спиноры так, чтобы $\epsilon^{ab} = -\epsilon_{ab}$. Например, мы можем положить

$$\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = \epsilon^{11} = -\epsilon^{22} = 1. \quad (I)$$

Нетрудно проверить следующее соотношение

$$\epsilon^{ab} \epsilon_{bc} = \epsilon_{cb} \epsilon^{ba} = \delta^a_c. \quad (2)$$

Спиноры ϵ^{ab} и ϵ_{ab} позволяют поднимать или опускать индексы спиноров. Мы имеем, например,

$$\psi_a = \epsilon_{ab} \psi^b, \quad \psi^a = \epsilon^{ab} \psi_b, \quad (3)$$

т.е. контравариантный спинор ψ^a эквивалентен ковариантному спинору ψ_a . Аналогично спиноры ψ_{ab} и ψ^a_b связаны соотношениями

$$\psi_{ab} = \epsilon_{ac} \psi^c_b, \quad \psi^a_b = \epsilon^{ac} \psi_{cb}. \quad (4)$$

Если ψ^a_b имеет нулевой шпур, то ψ_{ab} симметричен. Действительно, если $\psi^a_a = 0$, то согласно (2) мы имеем

$$\epsilon^{ab} \psi_{ab} = \epsilon^{ab} \epsilon_{ac} \psi^c_b = -\epsilon^{ba} \epsilon_{ac} \psi^c_b = -\delta^b_c \psi^c_b = -\psi^c_c = 0,$$

а равенство нулю произведения $\epsilon^{ab} \psi_{ab}$ означает, что $\psi_{ab} = \psi_{ba}$. Обратно, если $\psi_{ab} = \psi_{ba}$, то

$$\psi^a_a = \epsilon^{ac} \psi_{ca} = 0,$$

т.е. ψ^a_b имеет нулевой шпур. Итак, неприводимый симметричный спинор $\psi_{\{ab\}}$ полностью эквивалентен смешанному спинору ψ^a_b с нулевым шпуром.

Рассмотрим теперь любой неприводимый смешанный спинор $\psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_q\}}$, для которого шпур по всем парам индексов a_i и b_j равен нулю

$$\psi_{\{a_1 \dots a_i, a_{i+1} \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_j, b_{j+1} \dots b_q\}} = 0. \quad (5)$$

Опуская все верхние индексы с помощью ϵ_{ab} , мы получаем ковариантный спинор ранга $p+q$

$$\psi_{a_1 \dots a_p a_{p+1} \dots a_{p+q}} = \epsilon_{a_1 b_1} \dots \epsilon_{a_p b_p} \psi_{\{a_{p+1} \dots a_{p+q}\}}^{\{b_1 \dots b_q\}}, \quad (6)$$

причем из симметричности спинора $\psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_q\}}$ по верхним индексам и по нижним индексам следует симметричность спинора (6) по всем индексам $a_1 \dots a_p$ и по всем индексам $a_{p+1} \dots a_{p+q}$. Покажем теперь, что спинор (6) симметричен также относительно перестановки любой пары индексов a_i и a_j . Действительно, умножая его на $\epsilon^{ij a_i}$ и суммируя по a_j и a_i , мы получим, согласно (2) и (5),

$$\epsilon^{ij a_i} \psi_{a_1 \dots a_j \dots a_p a_{p+1} \dots a_{p+q}} = \epsilon^{ij a_i} \epsilon_{a_i b_i} \dots \epsilon_{a_j b_j} \dots \epsilon_{a_p b_p} \psi_{\{a_{p+1} \dots a_{p+q}\}}^{\{b_1 \dots b_q\}}$$

$$= -\varepsilon_{c_1 b_1} \dots \delta_{c_j}^{a_j} \dots \varepsilon_{q b_q} \psi \{a_1 \dots a_r \dots a_p\} = 0$$

Таким образом, если все шпур (5) равны нулю, то ковариантный спинор (6) симметричен по отношению ко всем перестановкам всех индексов:

$$\varepsilon_{c_1 b_1} \dots \varepsilon_{c_q b_q} \psi \{a_1 \dots a_r \dots a_p\} = \psi \{a_1 \dots a_r \dots a_p \dots c_q\} \quad (7)$$

Спинор $\psi \{a_1 \dots a_r \dots a_p\}$ также можно выразить через $\psi \{a_1 \dots a_r \dots c_1 \dots c_q\}$

$$\psi \{a_1 \dots a_r \dots a_p\} = \varepsilon^{b_1 c_1} \dots \varepsilon^{b_q c_q} \psi \{a_1 \dots a_r \dots c_1 \dots c_q\} \quad (8)$$

Таким образом, все неприводимые представления группы $SU(2)$ могут быть рассмотрены как ковариантные симметричные спиноры $\psi \{a_1 \dots a_r\}$.

Как было показано в главе I (см. п. IV, § 3), симметричные ковариантные спиноры можно получить путем симметризации произвольных спиноров с компонентами $\psi_{a_1 \dots a_r}$, являющихся векторами в пространстве E_n , преобразуемому по представлению $U \otimes U \otimes \dots$. Так как любой вектор в E_n имеет вид

$$\vec{\psi} = \psi_{a_1 \dots a_r} \vec{e}^{a_1 \dots a_r}$$

где $\vec{e}^{a_1 \dots a_r}$ - ортонормированный базис в E_n , то симметричные спиноры являются векторами в подпространстве E_n^s с базисом

$$\vec{e} \{a_1 \dots a_r\} = \frac{\sum \vec{e}^{a_1 \dots a_r}}{P(a_1 \dots a_r)}, \quad (9)$$

где $\sum_{P(a_1 \dots a_r)}$ обозначает суммирование по всем перестановкам индексов $a_1 \dots a_r$.

Рассмотрим теперь матричные элементы инфинитезимальных операторов J_i . В исходном базисе $\vec{e}^{a_1 \dots a_r}$ мы имеем

$$(J_i)_{(a_1 \dots a_r)(b_1 \dots b_r)} = \sum_{i=1}^r \delta_{a_i b_i} \dots \delta_{a_{i-1} b_{i-1}} \left(\frac{\sigma_i}{2} \right)_{a_i b_i} \delta_{a_{i+1} b_{i+1}} \dots \delta_{a_r b_r} \quad (10)$$

где $\frac{\sigma_i}{2}$ - инфинитезимальные операторы фундаментального представления, т.е. генераторы группы $SU(2)$ (см. главу I, формулы (82) и (83)). Так как σ_i не коммутируют, то только один из них имеет диагональный вид. В качестве диагонального оператора мы выбираем σ_3 :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Тогда оператор J_3 диагонален. Допустим, что q индексов среди $a_1 \dots a_r$ равны 1, а $r-q$ остальных равны 2. Тогда из (10) и (11) мы получаем

$$(J_3)_{(a_1 \dots a_r)(b_1 \dots b_r)} = \left(\frac{q}{2} - \frac{r-q}{2} \right) \delta_{a_1 b_1} \dots \delta_{a_r b_r}$$

В частности, имеем $J_3 \vec{e} \{a_1 \dots a_r\} = \left(\frac{q}{2} - \frac{r-q}{2} \right) \vec{e} \{a_1 \dots a_r\}$, (12)

где q - число индексов, равных 1. Так как при данном r векторы $\vec{e} \{a_1 \dots a_r\}$ полностью характеризуются числом индексов равных 1 (или 2), то соотношение (12) показывает, что каждому собственному значению J_3 соответствует единственный вектор в E_n^s . В пространстве E_n^s оператор J_3 имеет $r+1$ собственных значений:

$$J_3 = -\frac{r}{2}, -\frac{r-2}{2}, \dots, \frac{r-2}{2}, \frac{r}{2}$$

Итак, размерность E_n^s равна $r+1$. Положим $j = \frac{r}{2}$. Число j называется полным моментом состояния, характеризуемого данным неприводимым представлением. Для данного j оператор J_3 имеет $2j+1$ собственных значений

$$-j, -j+1, \dots, j-1, j$$

При помощи (10) и (11) мы можем показать, что для любого $\vec{e} \{a_1 \dots a_r\}$ (13)

$$J_3^2 \vec{e} \{a_1 \dots a_r\} = j(j+1) \vec{e} \{a_1 \dots a_r\}$$

§ 2. Некоторые спиноры низших рангов

В качестве примеров рассмотрим некоторые спиноры низших рангов, характеризующие состояния с моментами $j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.

1) $j = \frac{1}{2}$. Состояние с $j = \frac{1}{2}$ описывается спинором ψ_a или эквивалентным ему спинором ψ^a , $a=1,2$. Рассмотрим сначала ковариантный спинор ψ_a . Базис в пространстве E_2 , преобразуемому по данному представлению, состоит из двух векторов \vec{e}^1 и \vec{e}^2 . Каждый спинор представим в виде столбца с двумя элементами

$$\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Тогда $\vec{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (14)

Согласно (10) и (11), мы имеем

$$J_3 \vec{e}^1 = \frac{1}{2} \vec{e}^1, \quad J_3 \vec{e}^2 = -\frac{1}{2} \vec{e}^2 \quad (15)$$

Если вместо ψ_a пользоваться ψ^a

$$\psi^a = \varepsilon^{ab} \psi_b$$

то для \vec{e}^1 ($\psi_1 = 1, \psi_2 = 0$) имеем $\psi^1 = 0, \psi^2 = 1$, а для \vec{e}^2 ($\psi_1 = 0, \psi_2 = 1$) имеем $\psi^1 = -1, \psi^2 = 0$. Иначе говоря, между базисом \vec{e}^a в E_2 и базисом \vec{f}^a в E_2 имеет место соответствие

$$\vec{e}^1 \leftrightarrow \vec{f}_2, \quad \vec{e}^2 \leftrightarrow -\vec{f}_1 \quad (16)$$

так как \vec{f}_1 содержит компоненты $\psi^1 = 1, \psi^2 = 0$, а \vec{f}_2 - компоненты $\psi^1 = 0, \psi^2 = 1$.

Отметим, что инфинитезимальные операторы J_i контравариантного представления ψ^a связаны с инфинитезимальными операторами $\frac{\sigma_i}{2}$ фундаментального представления ψ_a соотношением

$$J_i = \left(\frac{\sigma_i}{2}\right) = -\left(\frac{\sigma_i}{2}\right)^T \quad (17)$$

(см. главу I, формулу (75)). Поэтому мы имеем

$$J_3 \vec{f}_2 = \frac{1}{2} \vec{f}_2, \quad J_3 \vec{f}_1 = -\frac{1}{2} \vec{f}_1, \quad (18)$$

что находится в согласии с (16).

2) $j = -I$. Состояния с $j = -I$ можно описывать при помощи симметричного ковариантного спинора второго ранга $\psi_{\{ab\}}$. Пусть \vec{e}^{ab} - базис в пространстве E_2 , преобразуемому по представлению $U \otimes U$. Тогда симметричными спинорами являются векторы в подпространстве E_2^+ с базисом

$$\vec{e}^{\{11\}} = \vec{e}^{11}, \quad \vec{e}^{\{12\}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}^{12} + \vec{e}^{21}), \quad \vec{e}^{\{22\}} = \vec{e}^{22}$$

Согласно общей формуле (10), мы имеем

$$(J_i) \vec{e}^{ab} = \left(\frac{\sigma_i}{2}\right)_{aa'} \vec{e}^{a'b} + \left(\frac{\sigma_i}{2}\right)'_{b'b} \vec{e}^{ab'}, \quad (19)$$

и в частности

$$J_3 \vec{e}^{\{11\}} = \vec{e}^{\{11\}}, \quad J_3 \vec{e}^{\{12\}} = 0, \quad J_3 \vec{e}^{\{22\}} = -\vec{e}^{\{22\}} \quad (20)$$

Поэтому положим

$$\vec{e}_+ = \vec{e}^{\{11\}}, \quad \vec{e}_0 = \vec{e}^{\{12\}}, \quad \vec{e}_- = \vec{e}^{\{22\}}. \quad (21)$$

С другой стороны, состояния с $j = -I$ также можно описывать с помощью контравариантного симметричного спинора $\psi^{\{ab\}}$ или смешанного спинора ψ_b^a с нулевым шпуром. Так как в дальнейшем мы иногда будем пользоваться смешанным спинором ψ_b^a , то мы также рассмотрим этот спинор подробно. Любой спинор Φ_b^a разлагается на два ортогональных спинора, один из которых имеет нулевой шпур, а другой кратен δ_b^a

$$\Phi_b^a = \left(\Phi_b^a - \frac{1}{2} \delta_b^a \Phi_c^c\right) + \frac{1}{2} \delta_b^a \Phi_c^c.$$

Соответственно, пространство E_{11} с базисом \vec{f}_a , преобразуемое по представлению $U \otimes U^*$, разлагается на два ортогональных подпространства. Спиноры, кратные δ_b^a , принадлежат одномерному подпространству с базисом

$$\vec{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_b^a \vec{f}_a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{f}_1 + \vec{f}_2). \quad (22)$$

Второе подпространство, все векторы которого ортогональны $\vec{\delta}$, имеет базис

$$\vec{f}_1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{f}_1 - \vec{f}_2), \quad \vec{f}_2.$$

Из формулы для инфинитезимальных операторов произведений двух представлений (см. главу I, формулы (82) и (83)) и формулы для инфинитезимальных операторов контравариантного представления (17) мы видим, что J_i действует на \vec{f}_b^a следующим образом:

$$J_i \vec{f}_b^a = \left(\frac{\sigma_i}{2}\right)_{aa'} \vec{f}_b^{a'} - \left(\frac{\sigma_i}{2}\right)'_{b'b} \vec{f}_b^a. \quad (23)$$

В частности:

$$J_3 \vec{f}_2^1 = \vec{f}_2^1, \quad J_3 \left(\frac{\vec{f}_1^1 + \vec{f}_2^2}{\sqrt{2}}\right) = 0, \quad J_3 \vec{f}_1^2 = -\vec{f}_1^2. \quad (24)$$

Поэтому положим

$$\vec{f}_+ = \vec{f}_2^1, \quad \vec{f}_0 = \frac{\vec{f}_1^1 - \vec{f}_2^2}{\sqrt{2}}, \quad \vec{f}_- = \vec{f}_1^2. \quad (25)$$

Если представить эти спиноры в виде матрицы

$$\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1^1 & \psi_2^1 \\ \psi_1^2 & \psi_2^2 \end{pmatrix},$$

то получим:

$$\vec{f}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Очевидно, что для всех этих спиноров шпур равен нулю: $\psi_a^a = 0$.

Как известно, спиноры $\psi_{\{ab\}}$ и ψ_b^a связаны соотношениями (4). Так, например, спинору $\vec{e}_+ = \vec{e}^{\{11\}}$ ($\psi_{11} = 1$ и остальные $\psi_{ab} = 0$) соответствует смешанный спинор с компонентами $\psi_1^1 = 1$, $\psi_b^a = 0$ для $a \neq 2$ или $b \neq 1$, т.е. спинор \vec{f}_+^1 . Аналогично, спинору $\vec{e}_0 = \vec{e}^{\{12\}}$ ($\psi_{12} = \psi_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, остальные $\psi_{ab} = 0$) соответствует смешанный спинор с компонентами $\psi_1^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\psi_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\psi_b^a = 0$, если $b \neq a$, т.е. спинор $-\vec{f}_0$, а спинору $\vec{e}_- = \vec{e}^{\{22\}}$ соответствует $-\vec{f}_-$. Таким образом, имеет место соответствие

$$\vec{e}_+ \leftrightarrow \vec{f}_+, \quad \vec{e}_0 \leftrightarrow -\vec{f}_0, \quad \vec{e}_- \leftrightarrow -\vec{f}_-, \quad (27)$$

и соотношения (20) и (24) согласуются. Отметим, что для получения неприводимых представлений с базисами (21) и (25) можно также применить метод, указанный в § 4, III, главы I. Так, например, мы заранее знаем, что $\vec{e}^{\{11\}}$ является единственным ковариантным спинором второго ранга с $J_3 = +I$. Он должен принадлежать некоторому неприводимому представлению. Действуя на этот спинор инфинитезимальными операторами J_i несколько раз, мы можем получить все остальные спиноры в данном неприводимом представлении. Действительно, положим

$$J_+ = \frac{1}{2} (J_1 + iJ_2), \quad J_- = \frac{1}{2} (J_1 - iJ_2),$$

и соответственно

$$\sigma_+ = \frac{1}{2} (\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \frac{1}{2} (\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно (19), имеем

$$J_- \vec{e}^{\{11\}} = \vec{e}^{\{12\}} + \vec{e}^{\{21\}}, \quad J_- (\vec{e}^{\{11\}} + \vec{e}^{\{12\}}) = 2\vec{e}^{\{22\}},$$

т.е. получаем все спиноры (21). Аналогично, единственным смешанным спинором с $J_3 = +1$ является \vec{f}_2 , и, согласно (23), мы имеем

$$J_- \vec{f}_2 = \vec{f}_2 - \vec{f}_1, \quad J_- (\vec{f}_2 - \vec{f}_1) = -2\vec{f}_1,$$

т.е. получаем все спиноры (25).

3) $j = 3/2$. Состояния с $j = \frac{3}{2}$ можно характеризовать с помощью ковариантного симметричного спинора третьего ранга ψ_{abc} или смешанного спинора ψ_{abc}^c с нулевыми шпурами. В первом случае состояния с заданным собственным значением J_3 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{+\frac{3}{2}} &= \vec{e}^{\{111\}} = \vec{e}^{111}, \\ \vec{e}_{+\frac{1}{2}} &= \vec{e}^{\{112\}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{e}^{112} + \vec{e}^{121} + \vec{e}^{211}), \\ \vec{e}_{-\frac{1}{2}} &= \vec{e}^{\{122\}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{e}^{122} + \vec{e}^{212} + \vec{e}^{221}), \\ \vec{e}_{-\frac{3}{2}} &= \vec{e}^{\{222\}} = \vec{e}^{222}, \end{aligned} \quad (28)$$

а во втором случае

$$\begin{aligned} \vec{f}_{+\frac{3}{2}} &= \vec{f}_2, \\ \vec{f}_{+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{f}_2 + \vec{f}_2 - \vec{f}_1), \\ \vec{f}_{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{f}_1 + \vec{f}_1 - \vec{f}_2), \\ \vec{f}_{-\frac{3}{2}} &= \vec{f}_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Компоненты спиноров (28) и (29) получаются непосредственно из этих формул. Нетрудно увидеть, что компоненты ψ_{ab}^c спиноров (29) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \psi_{ab}^c &= \psi_{ba}^c \\ \psi_{ab}^a &= \psi_{ba}^a = 0. \end{aligned}$$

и Отметим, что все спиноры в (28) и (29) могут быть получены из $\vec{e}_{\frac{3}{2}}$ или $\vec{f}_{\frac{3}{2}}$ путем действия на эти спиноры оператором J_- несколько раз.

Например, мы имеем

$$J_- \vec{f}_2 = \vec{f}_2 + \vec{f}_2 - \vec{f}_1,$$

$$\begin{aligned} J_- (\vec{f}_2 + \vec{f}_2 - \vec{f}_1) &= \vec{f}_2 - \vec{f}_1 + \vec{f}_2 - \vec{f}_1 - \vec{f}_1 - \vec{f}_1 \\ &= 2(\vec{f}_2 - \vec{f}_1 - \vec{f}_1), \end{aligned}$$

$$J_- (\vec{f}_2 - \vec{f}_1 - \vec{f}_1) = -\vec{f}_2 - \vec{f}_2 - \vec{f}_2 = -3\vec{f}_2.$$

4) $j = 2$. Если пользоваться ковариантным симметричным спинором четвертого ранга ψ_{abcd} , то состояния с определенными J_3 описываются спинорами

$$\begin{aligned} \vec{e}_{++} &= \vec{e}^{\{1111\}} = \vec{e}^{1111}, \\ \vec{e}_{+} &= \vec{e}^{\{1112\}} = \frac{1}{2} (\vec{e}^{1112} + \vec{e}^{1121} + \vec{e}^{1211} + \vec{e}^{2111}), \\ \vec{e}_0 &= \vec{e}^{\{1122\}} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\vec{e}^{1122} + \vec{e}^{1212} + \vec{e}^{2112} + \vec{e}^{1221} + \vec{e}^{2121} + \vec{e}^{2211}), \\ \vec{e}_{-} &= \vec{e}^{\{1222\}} = \frac{1}{2} (\vec{e}^{1222} + \vec{e}^{2122} + \vec{e}^{2212} + \vec{e}^{2221}), \\ \vec{e}_{--} &= \vec{e}^{\{2222\}} = \vec{e}^{2222}, \end{aligned} \quad (30)$$

а если пользоваться смешанным спинором с нулевыми шпурами

$$\psi_{\{ab\}^c} = \epsilon^{cd} \epsilon^a f \psi_{\{abef\}},$$

то состояния с определенными J_3 характеризуются спинорами

$$\begin{aligned} \vec{f}_{++} &= \vec{e}^{22}, \\ \vec{f}_{+} &= \frac{1}{2} (\vec{e}^{21} + \vec{e}^{12} - \vec{e}^{22} - \vec{e}^{11}), \\ \vec{f}_0 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\vec{e}^{11} - \vec{e}^{12} - \vec{e}^{21} - \vec{e}^{22} - \vec{e}^{21} + \vec{e}^{22}), \\ \vec{f}_{-} &= \frac{1}{2} (\vec{e}^{22} + \vec{e}^{21} - \vec{e}^{12} - \vec{e}^{11}), \\ \vec{f}_{--} &= \vec{e}^{11}. \end{aligned} \quad (31)$$

Если действуем J_- на \vec{f}_{++} и \vec{f}_{+} несколько раз, то мы получаем все спиноры (30) и (31).

§ 3. Векторы, тензоры и спин-тензоры

В предыдущей главе мы изучили связь между группой вращений и группой $SU(2)$. Там показано, что если представим любой трехмерный вектор x_i в виде матрицы 2×2

$$\hat{x} = x_i \sigma_i, \quad \text{sp } \hat{x} = 0,$$

то вращению трехмерного пространства соответствует следующее преобразование матрицы \hat{x}

$$\hat{x} \rightarrow \hat{x}' = U \hat{x} U^+,$$

или

$$\hat{x}_{ab} \rightarrow \hat{x}'_{ab} = U_{aa'} \hat{x}_{a'b'} U_{b'b}^+ = U_{aa'} U_{b'b}^+ \hat{x}_{a'b'}$$

(см. главу I, п. I, § 5). Это означает, что по отношению к группе $SU(2)$ \hat{x}_{ab} преобразуется как смешанный спинор

$$\psi_a^b \rightarrow \psi'^b_a = U_{aa'} U_{bb'}^+ \psi_a'^b. \quad (32)$$

Обратно, если представим смешанный спинор с нулевым шпуром ψ_a^b в виде

$$\psi_a^b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_a^b V_i, \quad (33)$$

где $(\sigma_i)_a^b = (\sigma_i)_{ab}$ - матричные элементы матриц Паули, то при вращениях V_i преобразуются как компоненты трехмерного вектора. Этот вектор получается из ψ_a^b при помощи формулы

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_b^a \psi_a^b = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sp}(\psi \sigma_i). \quad (34)$$

Таким образом, спиноры второго ранга группы $SU(2)$ эквивалентны трехмерным векторам, причем эта связь дается формулами (33) и (34). Численный коэффициент $\frac{1}{\sqrt{2}}$ появляется за счет условия нормировки

$$V_i V_i = \psi_a^b \psi_b^a = \text{sp}(\psi \psi).$$

Из соотношений (33) и (34) мы можем найти связь между так называемым каноническим базисом (25) $\vec{f}_+, \vec{f}_0, \vec{f}_-$ и декартовым базисом $\vec{f}_x, \vec{f}_y, \vec{f}_z$ в трехмерном пространстве. Для \vec{f}_+ мы имеем

$$V_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x)_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x)_{11}, \quad V_x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad V_y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad V_z = 0,$$

т.е.

$$\vec{f}_+ = \frac{\vec{f}_x + i \vec{f}_y}{\sqrt{2}}. \quad (35)$$

Аналогично

$$\vec{f}_- = \frac{\vec{f}_x - i \vec{f}_y}{\sqrt{2}}, \quad \vec{f}_0 = \vec{f}_z. \quad (35')$$

Рассмотрим теперь спинор четвертого ранга ψ_{cd}^{ab} с нулевыми шпурами $\psi_{ad}^{ab} = \psi_{cb}^{ab} = 0$.

Этот спинор может быть представлен в виде

$$\psi_{cd}^{ab} = (\sigma_i)_c^a (\sigma_j)_d^b T_{ij},$$

где T_{ij} - тензор в трехмерном пространстве. Для неприводимого спинора ψ_{abcd} с нулевыми шпурами мы имеем представление

$$\psi_{abcd} = \frac{1}{N} [(\sigma_i)_c^a (\sigma_j)_d^b + (\sigma_i)_c^b (\sigma_j)_d^a + (\sigma_i)_d^a (\sigma_j)_c^b + (\sigma_i)_d^b (\sigma_j)_c^a] T_{ij}, \quad (36)$$

где N - коэффициент нормировки. Так как

$$\psi_{abcd} = \frac{1}{N} [(\sigma_i)_a^b (\sigma_j)_d^c + (\sigma_i)_d^c (\sigma_j)_a^b] T_{ij} = \frac{1}{N} [(\sigma_j \sigma_i)_d^c + (\sigma_i \sigma_j)_d^c] T_{ij} = \frac{2}{N} \delta_d^c T_{ii} = 0,$$

то равенство нулю шпура ψ_{abcd} означает, что T_{ij} имеет нулевой шпур

$$T_{ii} = 0.$$

Представим T_{ij} в виде полусуммы симметричного и антисимметричного тензоров

$$T_{ij} = \frac{1}{2} (T_{[ij]} + T_{(ij)}).$$

Так как $T_{[ii]}$ равен нулю автоматически, то

$$T_{\{ii\}} = 0. \quad (37)$$

Нетрудно видеть, что $T_{[ij]}$ не дает вклада в (36). Из условия нормировки

$$T_{\{ij\}} T_{\{ij\}} = \psi_{abcd} \psi_{abcd}$$

следует, что $N=8$. Итак

$$\psi_{abcd} = \frac{1}{4} [(\sigma_i)_c^a (\sigma_j)_d^b + (\sigma_i)_c^b (\sigma_j)_d^a] T_{ij}, \quad (38)$$

и обратно

$$T_{\{ij\}} = \frac{1}{2} (\sigma_i)_a^c (\sigma_j)_d^b \psi_{abcd}. \quad (39)$$

Таким образом, спиноры ψ_{abcd} с нулевыми шпурами эквивалентны трехмерным симметричным тензорам второго ранга с нулевым шпуром $T_{\{ij\}}$. Аналогично неприводимые

спиноры ранга $2p$ $\psi_{\{a_1 \dots a_p\} \{b_1 \dots b_p\}}$ с нулевыми шпурами (5) эквивалентны трехмерным симметричным тензорам ранга p $T_{\{j_1 \dots j_p\}}$ с нулевыми шпурами

$$T_{\{j_1 \dots j_p\}} = 0. \quad (40)$$

Рассмотрим, наконец, неприводимые спиноры нечетного ранга, $\psi_{\{ab\}}^c \sim \psi_{\{ab\}}^a = 0$, например. Положим

$$(R_i)_b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_c^a \psi_{\{ab\}}^c, \quad (41)$$

и обратно

$$\psi_{\{ab\}}^c = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_a^c (R_i)_b. \quad (42)$$

Величина $(R_i)_b$ преобразуется как трехмерный вектор относительно индекса i и как спинор относительно индекса b . Аналогично все неприводимые спиноры нечетного ранга эквивалентны так называемым спин-тензорам

$$(R_{\{i_1 \dots i_p\}})_{\{b_1 \dots b_p\}} = \frac{1}{2^{p/2}} (\sigma_{i_1})_{a_1}^{c_1} \dots (\sigma_{i_p})_{a_p}^{c_p} \psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{c_1 \dots c_p\}} \quad (43)$$

$$\psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{c_1 \dots c_p\}} \sim \sum_{p(a_1 \dots a_p)} (\sigma_{i_1})_{a_1}^{c_1} \dots (\sigma_{i_p})_{a_p}^{c_p} (R_{\{i_1 \dots i_p\}})_{\{b_1 \dots b_p\}}. \quad (44)$$

По отношению к индексам $i_1 \dots i_p$ $(R_{\{i_1 \dots i_p\}})_{\{b_1 \dots b_p\}}$ является трехмерным симметричным тензором с нулевыми шпурами

$$(R_{\{i_1 \dots i_p\}})_{\{b_1 \dots b_p\}} = 0.$$

Кроме того, из условия (5) следует соотношение

$$(\sigma_i)_k^a (\sigma_i)_a^b (R_{\{i_1 \dots i_p\}})_{\{b_1 \dots b_p\}} = 0 \quad (45)$$

для любого $1 \leq k \leq p$.

§ 4. Разложение произведения неприводимых представлений на неприводимые. Коэффициенты Клебша-Гордана

В § I мы изучили неприводимые представления группы $SU(2)$. Произведение двух неприводимых представлений, вообще говоря, является приводимым представлением. Займемся теперь разложением этих произведений на неприводимые представления. Пусть даны два неприводимых представления, которые мы выберем в виде ковариантных симметричных спиноров $\psi_{\{a_1 \dots a_p\}}$ и $\psi_{\{b_1 \dots b_q\}}$. Они описывают состояния с моментами $j_1 = \frac{p}{2}$ и $j_2 = \frac{q}{2}$. Рассмотрим произведения

$$\Phi_{\{a_1 \dots a_p\} \{b_1 \dots b_q\}} = \psi_{\{a_1 \dots a_p\}} \psi_{\{b_1 \dots b_q\}}. \quad (46)$$

Они преобразуются по представлению, являющемуся произведением неприводимых представлений, по которым преобразуются $\psi_{\{a_1 \dots a_p\}}$ и $\psi_{\{b_1 \dots b_q\}}$. Спинор $\Phi_{\{a_1 \dots a_p\} \{b_1 \dots b_q\}}$ симметричен по всем индексам $a_1 \dots a_p$ и по всем индексам $b_1 \dots b_q$. Разделим его на две части, первая из которых симметрична относительно перестановки индексов a_1 и b_1 , а вторая антисимметрична относительно этой перестановки. Тогда первая часть полностью симметрична по всем индексам $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$. Так как антисимметричный спинор эквивалентен скаляру, то во второй части антисимметричные индексы a_1 и b_1 можно не рассматривать. Иначе говоря, вторая часть является спинором ранга $p+q-2$ $\Phi_{\{a_2 \dots a_p\} \{b_2 \dots b_q\}}$, симметричным по всем индексам a_2, \dots, a_p и по всем индексам b_2, \dots, b_q . Этот спинор, в свою очередь, опять может быть представлен в виде суммы полностью симметричного спинора ранга $p+q-2$ и спинора вида $\Phi_{\{a_3 \dots a_p\} \{b_3 \dots b_q\}}$. Продолжая этот процесс, мы получаем наконец разложение произведения (46) в сумму симметричных спиноров следующих рангов: $p+q$, $p+q-2$, $p+q-4$, ..., $p+q-2q$ (если $p \geq q$) или $p+q-2p$ (если $q \geq p$). Таким образом, произведение двух представлений, характеризующих состояния с моментами j_1 и j_2 , разлагается на неприводимые представления, соответствующие моментам $j_1 + j_2$, $j_1 + j_2 - 1$, $|j_1 - j_2|$. Это - известное правило сложения моментов в квантовой механике.

Обозначим через \vec{e}_m^j базисный вектор с $J_z = m$ в пространстве, преобразуемом по представлению с $\vec{J}^2 = j(j+1)$, и аналогично для $\vec{e}_{m_1}^{j_1}$ и $\vec{e}_{m_2}^{j_2}$. Тогда произведение $\vec{e}_{m_1}^{j_1} \vec{e}_{m_2}^{j_2}$ может быть представлено в виде линейной комбинации спиноров \vec{e}_m^j , причем из формулы для инфинитезимальных операторов произведения двух представлений (см. формулу (83) в главе I) следует, что $m = m_1 + m_2$. Итак, имеем

$$\vec{e}_{m_1}^{j_1} \vec{e}_{m_2}^{j_2} = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} \vec{e}_m^j. \quad (47)$$

Так как спиноры $\vec{e}_{m_1}^{j_1}$, $\vec{e}_{m_2}^{j_2}$ и \vec{e}_m^j ортонормированы, то мы имеем также обратную формулу

$$\vec{e}_m^j = \sum_{m_1+m_2=m} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} \vec{e}_{m_1}^{j_1} \vec{e}_{m_2}^{j_2} \quad (48)$$

Коэффициенты $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$ называются коэффициентами сложения моментов или коэффициентами Клебша-Гордана. Их свойства изучены подробно в I-4.

II. ИЗОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

§ I. Изотопические мультиплеты

Экспериментальные исследования ядерных сил привели к гипотезе о зарядовой независимости ядерного взаимодействия между протонами и нейтронами, обобщением которой является гипотеза об изотопической инвариантности сильных взаимодействий барионов и мезонов.

В теории изотопической инвариантности предполагается, что мезоны и барионы образуют изотопические мультиплеты, описываемые неприводимыми представлениями группы $SU(2)$, рассматриваемой как группа вращений в некотором (нереальном) трехмерном изотопическом пространстве. Инфинитезимальные операторы $T_i, i = 1, 2, 3$ этих представлений, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[T_i, T_j] = \epsilon_{ijk} T_k,$$

называются операторами изотопического спина. Для каждого неприводимого представления, т.е. для каждого изотопического мультиплета, оператор $T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2$ кратен единице

$$T^2 = T(T+1) I,$$

где I - единичный оператор. T называется изотопическим спином данного мультиплета.

Частицы в одном изотопическом мультиплете имеют разные заряды и рассматриваются как различные состояния одной и той же частицы, соответствующие различным собственным значениям оператора T_3 . Предполагается далее, что T_i коммутируют с операторами углового момента J_i , а также с операторами, выражающими другие сохраняющиеся величины, характеризующие сильно взаимодействующие частицы, например, барионное число B , странность S и т.д.

Тогда все частицы в одном изотопическом мультиплете имеют один и тот же спин J , одно и то же барионное число B , одну и ту же странность S и т.д., как это следует из леммы Шура (см. главу I, п. III, § 3 и § 4). Заряд каждой компоненты изотопического мультиплета связан с T_3 и другими квантовыми числами формулой Гелл-Манна-Нишежики

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2},$$

где Y - гиперзаряд

$$Y = B + S.$$

Рассмотрим некоторые изотопические мультиплеты. Нуклоны (протон и нейтрон) образуют изотопический дублет ($T = \frac{1}{2}$). Волновые функции нуклонов рассмотрим как ковариантный изотопический спинор и обозначим через N_α . Тогда мы имеем

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \psi, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \psi, \quad (49)$$

где p и n - полные волновые функции протона и нейтрона, а ψ - пространственная волновая функция. В дальнейшем удобно вместо (49) пользоваться другой записью

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Поскольку волновая функция нуклона рассматривается как ковариантный изотопический спинор N_α , то сопряженная (дираковски) волновая функция является контравариантным изотопическим спинором и обозначается через \bar{N}^α . Мы имеем тогда

$$\bar{p} = (1 \ 0) \otimes \bar{\psi}, \quad \bar{n} = (0 \ 1) \otimes \bar{\psi}, \quad (51)$$

или сокращено, по аналогии с (50),

$$\bar{N} = (\bar{p} \ \bar{n}). \quad (52)$$

Для дублета каскадных гиперонов, например, мы имеем аналогичные выражения. Что касается других гиперонов, то Λ -гиперон является изотопическим скаляром ($T = 0$), т.е. его волновая функция не меняется при изотопических вращениях, а Σ -гипероны образуют изотопический триплет ($T = 1$). Если рассматривать волновые функции этого триплета как ковариантный симметричный спинор второго ранга, то имеем

$$\begin{aligned} (\Sigma^+)_{11} &= 1 \otimes \psi, & (\Sigma^+)_{12} &= (\Sigma^+)_{21} = (\Sigma^+)_{22} = 0, \\ (\Sigma^0)_{12} &= (\Sigma^0)_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \psi, & (\Sigma^0)_{11} &= (\Sigma^0)_{22} = 0, \\ (\Sigma^-)_{22} &= 1 \otimes \psi, & (\Sigma^-)_{12} &= (\Sigma^-)_{21} = (\Sigma^-)_{11} = 0, \end{aligned} \quad (53)$$

где ψ - пространственная волновая функция. В дальнейшем по аналогии с (50) вместо (53) мы пользуемся сокращенной записью

$$(\Sigma)_{11} = \Sigma^+, \quad (\Sigma)_{22} = \Sigma^-, \quad (\Sigma)_{12} = (\Sigma)_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0. \quad (54)$$

Если же пользоваться смешанным изотопическим спинором второго ранга для описания триплета Σ -гиперонов, то мы имеем

$$(\Sigma^+)_{11}^2 = 1 \otimes \psi, \quad (\Sigma^+)_{11}^1 = (\Sigma^+)_{22}^2 = (\Sigma^+)_{22}^1 = 0,$$

$$(\Sigma^0)_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \psi, (\Sigma^0)_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \psi, (\Sigma^0)_2 - (\Sigma^0)_1 = 0,$$

$$(\Sigma^-)_2 = 1 \otimes \psi, (\Sigma^-)_1 = (\Sigma^-)_2 = (\Sigma^-)_1 = 0, \quad (55)$$

или сокращенно, по аналогии с (50),

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} & \Sigma^+ \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Как было показано в п. I, § 3, для описания триплета мы можем пользоваться также трехмерным вектором, связанным со смешанным спинором второго ранга соотношениями (33) и (34).

Тогда вместо (55) имеем:

$$(\Sigma^+)_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \psi, (\Sigma^+)_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \psi, (\Sigma^+)_z = 0,$$

$$(\Sigma^0)_x = (\Sigma^0)_y = 0, (\Sigma^0)_z = 1 \otimes \psi, \quad (57)$$

$$(\Sigma^-)_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \psi, (\Sigma^-)_y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \psi, (\Sigma^-)_z = 0,$$

или сокращенно

$$\Sigma_x = \frac{\Sigma^+ + \Sigma^-}{\sqrt{2}}, \Sigma_y = i \frac{\Sigma^+ - \Sigma^-}{\sqrt{2}}, \Sigma_z = \Sigma^0. \quad (58)$$

Отметим, что эти формулы являются сокращенной записью соотношений (57) и не совпадают с формулами (35) и (35^I), связывающими различные базисы. Из данных формул для волновой функции триплета Σ -гиперонов можно получить аналогичные формулы для сопряженной волновой функции, заменяя верхние индексы на нижние и обратно. Так, например, по аналогии с (56) мы имеем

$$\bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}} & \bar{\Sigma}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & -\frac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Приведем еще формулы для барионных резонансов с $T = \frac{3}{2}$. Если рассматривать волновую функцию этого мультиплета как ковариантный симметричный изотопический спинор третьего ранга, то мы имеем (в сокращенном виде)

$$(\Delta)_{111} = \Delta^{++}, (\Delta)_{112} = (\Delta)_{121} = (\Delta)_{211} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^+,$$

$$(\Delta)_{122} = (\Delta)_{212} = (\Delta)_{221} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^0, (\Delta)_{222} = \Delta^-. \quad (60)$$

Для мезонных мультиплетов имеются в точности такие же формулы. Например, для K-мезонов:

$$K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \tilde{K} = \begin{pmatrix} \tilde{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix}, \quad (61)$$

и для π -мезонов:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \bar{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\pi}^0}{\sqrt{2}} & \bar{\pi}^- \\ \bar{\pi}^+ & -\frac{\bar{\pi}^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Волновые функции частиц в изотопических мультиплетах меняются при преобразованиях изотопической группы. Рассмотрим специальное важное преобразование, соответствующее матрице

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом преобразовании спинор (50) для нуклона переходит в

$$\varepsilon \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ -p \end{pmatrix},$$

т.е.

$$p \rightarrow n, \quad n \rightarrow -p, \quad (63)$$

а матрица (56) для Σ -гиперонов переходит в

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} & \Sigma^+ \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \varepsilon^+ = \begin{pmatrix} -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} & -\Sigma^- \\ -\Sigma^+ & \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\Sigma^0 \rightarrow -\Sigma^0, \quad \Sigma^+ \rightarrow -\Sigma^-, \quad \Sigma^- \rightarrow -\Sigma^+. \quad (63')$$

Для других мультиплетов мы имеем также аналогичные переходы:

$$\Sigma^0 \rightarrow \bar{\Sigma}^-, \quad \bar{\Sigma}^- \rightarrow -\bar{\Sigma}^0, \quad (63'')$$

$$K^+ \rightarrow K^0, \quad K^0 \rightarrow -K^+, \quad \tilde{K}^0 \rightarrow K^-, \quad K^- \rightarrow -\tilde{K}^0$$

$$\begin{aligned} \pi^0 &\rightarrow -\pi^0, & \pi^+ &\rightarrow -\pi^-, & \pi^- &\rightarrow -\pi^+, \\ \Delta^{++} &\rightarrow \Delta^-, & \Delta^- &\rightarrow -\Delta^{++}, & \Delta^+ &\rightarrow -\Delta^0, & \Delta^0 &\rightarrow \Delta^+ \end{aligned}$$

и т.д. Изотопическая инвариантность требует, чтобы матричные элементы всех процессов распада и распада были инвариантными относительно всех преобразований изотопической группы, и в частности, относительно преобразований вида (63), (63^I) и (63^{II}). Инвариантность относительно этих частных преобразований называется зарядовой симметрией. Рассматриваемое специальное преобразование группы $SU(2)$ соответствует некоторому вращению в трехмерном изотопическом пространстве. Из (58) и (63^I) следует, что в данном преобразовании

$$\sum_x \rightarrow -\sum_x, \quad \sum_y \rightarrow \sum_y, \quad \sum_z \rightarrow -\sum_z. \quad (64)$$

Итак, рассматриваемое преобразование зарядовой симметрии соответствует вращению на угол π вокруг второй оси в изотопическом пространстве.

При изучении процессов взаимодействия мезонов и барионов во многих случаях удобно классифицировать состояния систем частиц по полным изотопическим спинам этих состояний. Изотопические волновые функции состояний систем частиц с определенными изотопическими спинами обычно имеют определенные свойства симметрии по отношению к перестановке двух одинаковых частиц, причем одинаковыми частицами считаются различные частицы в одном изотопическом мультиплете. К таким частицам применяется обобщенный принцип Паули, согласно которому полные волновые функции систем не меняются при перестановке двух одинаковых бозонов и меняют знак при перестановке двух одинаковых фермионов.

§ 2. Изотопическая инвариантность лагранжиана взаимодействия

Мы предполагали, что волновые функции мезонов и барионов преобразуются по неприводимым представлениям изотопической группы $SU(2)$. Изотопическая инвариантность требует, чтобы лагранжиан сильных взаимодействий был инвариантным относительно всех преобразований изотопической группы. Это приводит к ряду ограничений на константы связи сильно взаимодействующих частиц.

Рассмотрим некоторые примеры. Трехлинейный лагранжиан взаимодействия K -мезона с нуклонами является линейной комбинацией произведений вида

$$\bar{N}^a \gamma_5 N_b \pi_c^d.$$

Как известно, для того, чтобы образовать инварианты из этих произведений необходимо суммировать по каждой паре верхних и нижних индексов. Так как $\pi_c^c = 0$, то единственным инвариантом является

$$\bar{N}^a \gamma_5 N_b \pi_a^b.$$

Итак, лагранжиан πN -взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = i\sqrt{2} g_{\pi NN} \bar{N}^a \gamma_5 N_b \pi_a^b, \quad (65)$$

причем для удобства в (65) был введен коэффициент $\sqrt{2}$. Выражая π_a^b через трехмерный вектор π_i

$$\pi_a^b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_i)_a^b \pi_i \quad (66)$$

(см. формулы (33) и (34)), имеем

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = ig_{\pi NN} \bar{N} \tau_i \gamma_5 N \pi_i. \quad (67)$$

Подставляя в (65) спиноры (50) и (52) и матрицу (62), получаем

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = ig_{\pi NN} \left[\sqrt{2} \bar{p} \gamma_5 n \pi^+ + \sqrt{2} \bar{n} \gamma_5 p \pi^- + (\bar{p} \gamma_5 p - \bar{n} \gamma_5 n) \pi^0 \right] \quad (68)$$

Аналогично, для взаимодействий γNN , $K\Sigma N$ и $K\Lambda N$ мы имеем лагранжианы

$$\mathcal{L}_{\gamma NN} = ig_{\gamma NN} \bar{N}^a \gamma_5 N_a \gamma = ig_{\gamma NN} \bar{N} \gamma_5 N \gamma, \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{K\Sigma N} &= i\sqrt{2} g_{K\Sigma N} \bar{K}^b \sum_a \gamma_5 N_a + \text{с.с.} \\ &= ig_{K\Sigma N} \bar{K} \sum_i \tau_i \gamma_5 N + \text{с.с.}, \quad (70) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{K\Lambda N} &= ig_{K\Lambda N} \bar{K}^a \lambda \gamma_5 N_a + \text{с.с.} \\ &= ig_{K\Lambda N} \bar{K} \lambda \gamma_5 N + \text{с.с.} \quad (71) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь $K\Lambda\Sigma$ -взаимодействия. Лагранжиан имеет вид линейной комбинации произведений типа

$$\bar{\Lambda} \Sigma_a K_b.$$

Для того чтобы образовать инварианты из этих произведений необходимо умножить их на ε^{ab} и затем просуммировать по a и b . Мы имеем, таким образом:

$$L_{K\Lambda\Sigma} = g_{K\Lambda\Sigma} \bar{\Lambda} \gamma_5 \Sigma_a K_b \varepsilon^{ab} + \text{с.с.} \quad (72)$$

Так как матричные элементы матрицы τ_2 равны $i\varepsilon^{ab}$, то можно переписать (72) следующим образом:

$$L_{K\Lambda\Sigma} = ig_{K\Lambda\Sigma} K^T \tau_2 \bar{\Lambda} \gamma_5 \Sigma + \text{с.с.} \quad (73)$$

Аналогично, для взаимодействия $K\Sigma\Sigma$ мы имеем:

$$L_{K\Sigma\Sigma} = \sqrt{2} g_{K\Sigma\Sigma} \bar{\Sigma}_a \gamma_5 \Sigma_b K_c \varepsilon^{bc} + \text{с.с.} \\ = ig_{K\Sigma\Sigma} K^T \tau_2 \bar{\Sigma}_i \tau_i \gamma_5 \Sigma + \text{с.с.} \quad (74)$$

Если вместо волновой функции K -мезонов ввести волновую функцию \tilde{K} -мезонов, то (72), (73) и (74) можно переписать в виде:

$$L_{\tilde{K}\Lambda\Sigma} = ig_{\tilde{K}\Lambda\Sigma} \tilde{K}^a \bar{\Lambda} \gamma_5 \Sigma_a + \text{с.с.} \\ = ig_{\tilde{K}\Lambda\Sigma} \tilde{K} \bar{\Lambda} \gamma_5 \Sigma + \text{с.с.}, \quad (73)$$

$$L_{\tilde{K}\Sigma\Sigma} = i\sqrt{2} g_{\tilde{K}\Sigma\Sigma} \tilde{K}^a \bar{\Sigma}_a \gamma_5 \Sigma + \text{с.с.} \\ = ig_{\tilde{K}\Sigma\Sigma} \tilde{K} \bar{\Sigma}_i \tau_i \gamma_5 \Sigma + \text{с.с.} \quad (74)$$

Для взаимодействия типа $\pi\Sigma\Sigma$ и $\eta\Sigma\Sigma$ имеются выражения, аналогичные (65), (67), (68) и (69). Что касается взаимодействий $\eta\Lambda\Lambda$, $\pi\Lambda\Sigma$, $\eta\Sigma\Sigma$ и $\pi\Sigma\Sigma$, то нетрудно проверить, что следующие лагранжианы являются единственными лагранжианами, выполняющими изотопическую инвариантность:

$$L_{\eta\Lambda\Lambda} = ig_{\eta\Lambda\Lambda} \eta \bar{\Lambda} \gamma_5 \Lambda, \quad (75)$$

$$L_{\pi\Lambda\Sigma} = ig_{\pi\Lambda\Sigma} \pi_a^a \bar{\Sigma}_a \gamma_5 \Lambda + \text{с.с.} \\ = ig_{\pi\Lambda\Sigma} \pi_i \bar{\Sigma}_i \gamma_5 \Lambda + \text{с.с.} \quad (76)$$

$$L_{\eta\Sigma\Sigma} = ig_{\eta\Sigma\Sigma} \bar{\Sigma}_a \gamma_5 \Sigma_a \eta = ig_{\eta\Sigma\Sigma} \bar{\Sigma}_i \gamma_5 \Sigma_i \eta, \quad (77)$$

$$L_{\pi\Sigma\Sigma} = i\sqrt{2} g_{\pi\Sigma\Sigma} \bar{\Sigma}_a \gamma_5 \Sigma_b \pi_a^c \\ = g_{\pi\Sigma\Sigma} \varepsilon_{ijk} \bar{\Sigma}_i \gamma_5 \Sigma_j \pi_k, \quad (78)$$

причем для получения второго равенства в (78) достаточно пользоваться формулой

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \tau_k$$

и соотношениями типа (66) для Σ_a^a и π_a^a .

Отметим, что из трех спинов $\bar{\Sigma}_a^a$, Σ_a^a и π_a^a можно образовать два инварианта

$$\bar{\Sigma}_a^a \Sigma_b^b \pi_c^c \quad \text{и} \quad \bar{\Sigma}_a^b \Sigma_b^c \pi_c^a.$$

Однако они отличаются только знаком. Действительно:

$$\bar{\Sigma}_a^a \Sigma_b^b \pi_c^c + \bar{\Sigma}_a^b \Sigma_b^c \pi_c^a =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{\Sigma}_i \Sigma_j \pi_k \left[(\tau_i)_a^a (\tau_j)_c^b (\tau_k)_a^c + (\tau_i)_a^b (\tau_j)_b^c (\tau_k)_c^a \right] =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{\Sigma}_i \Sigma_j \pi_k \left[(\tau_j)_c^b (\tau_i)_a^a (\tau_k)_a^c + (\tau_i)_c^b (\tau_j)_b^a (\tau_k)_a^c \right] = 0,$$

так как

$$\tau_j \tau_i + \tau_i \tau_j = \delta_{ij} \quad \text{и} \quad \text{sp } \tau_k = 0$$

$$(\tau_j)_c^b (\tau_i)_a^a (\tau_k)_a^c + (\tau_i)_c^b (\tau_j)_b^a (\tau_k)_a^c = \text{sp} \left[(\tau_j \tau_i + \tau_i \tau_j) \tau_k \right] = 0.$$

§ 3. Изотопическая инвариантность и распады резонансов

Из инвариантности лагранжиана следует инвариантность матричных элементов всех процессов распада, рассеяния и рождения частиц в сильных взаимодействиях и вытекает ряд соотношений между амплитудами процессов распада, рассеяния и рождения частиц в одном изотопическом мультиплете. В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из изотопической инвариантности для процессов распада частиц с наименьшими изотопическими спинами. Так как нас интересуют только соотношения между амплитудами различных процессов с участием частиц из одного и того же изотопического мультиплетта, а не сами эти амплитуды, то мы можем ограничиться изучением изотопической структуры амплитуд процессов. Итак, в дальнейшем спиновая структура матричных элементов процессов распада и рассеяния явно выписываться не будет.

Рассмотрим сначала распад мезона с $T=0$, например, f^0 -мезона, на два

π -мезона. Рождающиеся π -мезоны имеют разные импульсы и обозначаются через $\pi(q_1)$ и $\pi(q_2)$. Если изотопическая инвариантность выполняется, то матричный элемент рассматриваемого распада имеет вид:

$$M_{f^0 \rightarrow 2\pi} = g f^0 \pi_b^a(q_1) \pi_a^b(q_2) = g f^0 \left[\pi^+(q_1) \pi^-(q_2) + \pi^-(q_1) \pi^+(q_2) + \pi^0(q_1) \pi^0(q_2) \right]. \quad (79)$$

Отсюда следует, что вероятность распада на π^+ с импульсом q_1 и π^- с импульсом q_2 равна вероятности распада на π^+ с импульсом q_2 и π^- с импульсом q_1 , а также равна вероятности распада на два π^0 , один из которых имеет импульс q_1 , а другой - импульс q_2 . Итак, вероятность распада на π^+ и π^- в сумме в два раза больше вероятности распада на два π^0 :

$$\frac{W(f^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{W(f^0 \rightarrow 2\pi^0)} = 2. \quad (80)$$

При изучении распада f^0 -мезона на пару $K\bar{K}$ удобно рассматривать волновую функцию K -мезона как ковариантный спинор K_a , а волновую функцию \bar{K} -мезона как контравариантный спинор \bar{K}^a . Для сопряженных функций мы имеем тогда спиноры \bar{K}^a и \bar{K}_a . Так как f^0 -мезон имеет C -четность $+1$, то матричный элемент распада этого мезона на пару $K\bar{K}$, удовлетворяющий изотопической инвариантности и C -инвариантности, имеет вид

$$M_{f^0 \rightarrow K\bar{K}} = g f^0 \left[\bar{K}^a(q_1) \bar{K}_a(q_2) + \bar{K}^a(q_2) \bar{K}_a(q_1) \right]. \quad (81)$$

Так как

$$K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{pmatrix} K^- & \bar{K}^0 \end{pmatrix}$$

и следовательно,

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} \bar{K}^+ & \bar{K}^0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{pmatrix} \bar{K}^- \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix},$$

то из (81) следует выражение

$$M_{f^0 \rightarrow K\bar{K}} = g f^0 \left[\bar{K}^+(q_1) \bar{K}^-(q_2) + \bar{K}^0(q_1) \bar{K}^0(q_2) + \bar{K}^-(q_1) \bar{K}^+(q_2) + \bar{K}^0(q_1) \bar{K}^0(q_2) \right]. \quad (82)$$

Итак, вероятность распада f^0 -мезона на пару K^+K^- равна вероятности распада на пару $K^0\bar{K}^0$

$$\frac{W(f^0 \rightarrow K^+K^-)}{W(f^0 \rightarrow K^0\bar{K}^0)} = 1, \quad (83)$$

если пренебречь разность масс K^+ -и K^0 -мезонов. Аналогично, для распада

φ -мезона на пару $K\bar{K}$ мы имеем

$$M_{\varphi \rightarrow K\bar{K}} = g \varphi \left[\bar{K}^a(q_1) \bar{K}_a(q_2) - \bar{K}^a(q_2) \bar{K}_a(q_1) \right] = g \varphi \left[\bar{K}^+(q_1) \bar{K}^-(q_2) + \bar{K}^0(q_1) \bar{K}^0(q_2) - \bar{K}^-(q_2) \bar{K}^+(q_1) - \bar{K}^0(q_2) \bar{K}^0(q_1) \right], \quad (84)$$

так как φ -мезон имеет C -четность -1 . Отсюда получаем также

$$\frac{W(\varphi \rightarrow K^+K^-)}{W(\varphi \rightarrow K^0\bar{K}^0)} = 1 \quad (85)$$

Рассмотрим теперь распад K^* -мезона с $T=1/2$ на π -и K -мезоны. Мы имеем матричный элемент

$$M_{K^* \rightarrow K\pi} = g \bar{\pi}_b^a \bar{K}^b K_a^* = g \left[\bar{\pi}^+ \bar{K}^0 K^{*+} + \bar{\pi}^- \bar{K}^+ K^{*0} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\pi}^0 \left(\bar{K}^+ K^{*+} - \bar{K}^0 K^{*0} \right) \right]. \quad (86)$$

Поэтому вероятности распада связаны соотношениями

$$W(K^{*+} \rightarrow K^+\pi^+) = W(K^{*0} \rightarrow K^+\pi^-) = 2W(K^{*0} \rightarrow K^+\pi^0) = 2W(K^{*0} \rightarrow K^0\pi^0). \quad (87)$$

В частности, ширины резонансов K^{*+} и K^{*0} равны между собой, как и должно быть.

Аналогичную технику также можно применить к изучению распадов мезонов с $T=1$. В данном случае существенно учесть C -инвариантность. Для этих мезонов зарядовое сопряжение C определяется следующим образом:

$$C \varphi_a^b C^{-1} = \pm \varphi_a^b,$$

причем знаки \pm выбираются одинаково для всех частиц в одном мультиплете. Для π^0 -и A_2^0 -мезонов C -четность равна $+1$, а C -четность ρ^0 -мезона равна -1 .

Поэтому мы имеем:

$$C \pi_a^b C^{-1} = \pi_a^b, \quad C (A_2)_b^a C^{-1} = (A_2)_b^a, \quad C \rho_b^a C^{-1} = -\rho_b^a. \quad (88)$$

В § 2 мы получили тождество

$$\sum_a^b \sum_b^c \pi_c^a + \sum_b^a \sum_c^b \pi_a^c = 0.$$

Аналогично:

$$\sum_a^b \bar{\pi}_b^c(q_1) \bar{\pi}_c^a(q_2) + \sum_b^a \bar{\pi}_c^b(q_1) \bar{\pi}_a^c(q_2) = 0.$$

При помощи этого тождества нетрудно увидеть, что матричный элемент распада ρ^0 -мезона

на два π -мезона

$$M_{\rho \rightarrow \pi\pi} = g \rho_a^a \bar{\pi}_a^c(q_1) \bar{\pi}_c^b(q_2) = \quad (89)$$

$$\begin{aligned} & \frac{g}{\sqrt{2}} \rho^+ \left[\bar{\pi}^+(q_1) \bar{\pi}^-(q_2) - \bar{\pi}^-(q_2) \bar{\pi}^+(q_1) \right] \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}} \rho^0 \left[\bar{\pi}^+(q_1) \bar{\pi}^-(q_2) - \bar{\pi}^-(q_2) \bar{\pi}^+(q_1) \right] \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}} \rho^- \left[\bar{\pi}^-(q_1) \bar{\pi}^0(q_2) - \bar{\pi}^0(q_2) \bar{\pi}^-(q_1) \right] \end{aligned}$$

инвариантен относительно преобразования зарядового сопряжения C . Итак, мы имеем следующие соотношения между вероятностями распада

$$\begin{aligned} W(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) &= W(\rho^- \rightarrow \pi^- \pi^0) = W(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-), \\ W(\rho^0 \rightarrow 2\pi^0) &= 0. \end{aligned} \quad (90)$$

Отметим, что для данного распада C -инвариантность приводит к таким же ограничениям, что и обобщенный принцип Паули. Аналогичная ситуация также имеет место для распада

A_2 -мезона. Так, например, из обобщенного принципа Паули или из C -инвариантности и изотопической инвариантности следует, что распад A_2 -мезона на два π -мезона запрещен. Для распада A_2 -мезона на пару $K\bar{K}$ имеем матричный элемент

$$\begin{aligned} M_{A_2 \rightarrow K\bar{K}} &= g (A_2)_a^a \left[\bar{K}_a^b(q_1) \bar{K}_b^c(q_2) + \bar{K}_c^b(q_2) \bar{K}_a^c(q_1) \right] \\ &= g A_2^+ \left[\bar{K}^+(q_1) \bar{K}^0(q_2) + \bar{K}^+(q_2) \bar{K}^0(q_1) \right] \\ &+ g A_2^- \left[\bar{K}^-(q_1) \bar{K}^0(q_2) + \bar{K}^-(q_2) \bar{K}^0(q_1) \right] \\ &+ \frac{g}{\sqrt{2}} A_2^0 \left[\bar{K}^+(q_1) \bar{K}^-(q_2) - \bar{K}^-(q_2) \bar{K}^+(q_1) \right. \\ &\quad \left. + \bar{K}^+(q_2) \bar{K}^-(q_1) - \bar{K}^-(q_1) \bar{K}^+(q_2) \right]. \end{aligned} \quad (91)$$

Отсюда вытекают соотношения

$$\begin{aligned} W(A_2^+ \rightarrow K^+ \bar{K}^0) &= W(A_2^- \rightarrow K^- \bar{K}^0) = \\ &= 2 W(A_2^0 \rightarrow K^+ K^-) = 2 W(A_2^0 \rightarrow K^0 \bar{K}^0). \end{aligned} \quad (92)$$

Отметим, что на опыте наблюдаются не K^0 и \bar{K}^0 -мезоны, а K_1^0 и K_2^0 -мезоны.

Подставляя в (81), (84) и (91) выражения

$$K^0 = \frac{K_1^0 - K_2^0}{\sqrt{2}}, \quad \bar{K}^0 = \frac{K_1^0 + K_2^0}{\sqrt{2}},$$

получаем

$$\begin{aligned} K^0(q_1) \bar{K}^0(q_2) + \bar{K}^0(q_1) K^0(q_2) &= K_1^0(q_1) K_1^0(q_2) + K_2^0(q_1) K_2^0(q_2), \\ K^0(q_1) \bar{K}^0(q_2) - \bar{K}^0(q_1) K^0(q_2) &= K_1^0(q_1) K_2^0(q_2) - K_2^0(q_1) K_1^0(q_2). \end{aligned}$$

Это означает, что в распадах ρ -мезона и A_2 -мезона всегда наблюдаются пары $K_1^0 K_1^0$ и $K_2^0 K_2^0$, а в распаде ρ -мезона наблюдаются только пары $K_1^0 K_2^0$. Распад ρ -мезона на два π -мезона запрещен.

Рассмотрим теперь распады барионных резонансов. Для распада Σ^* -гиперона с $T=1/2$ на Σ -гиперон и π -мезон мы имеем такие же соотношения, что и для распада K^* -мезона на K и π -мезоны (85) и (86), а именно

$$\begin{aligned} W(\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \pi^0) &= W(\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^0 \pi^+) = \\ &= 2 W(\Sigma^{*+} \rightarrow \Sigma^- \pi^0), \end{aligned} \quad (93)$$

а для распада γ^* -гиперон на π -мезон и Σ -гиперон из матричного элемента

$$\begin{aligned} M_{\gamma^* \rightarrow \Sigma\pi} &= g \bar{\Sigma}_a^a \gamma_a^b \pi_b^c = -g \bar{\Sigma}_a^c \gamma_c^a \pi_a^b = \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\Sigma}^0 \gamma^{*+} (\Sigma^- \gamma^{*0}) + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\Sigma}^+ \gamma^{*0} (\Sigma^0 \gamma^{*-}) - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\Sigma}^+ \gamma^{*+} (\Sigma^+ \gamma^{*0}) \\ &\quad + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\Sigma}^- \gamma^{*0} (\Sigma^- \gamma^{*+}) \end{aligned} \quad (94)$$

мы получаем соотношения

$$\begin{aligned} W(\gamma^{*+} \rightarrow \Sigma^0 \pi^+) &= W(\gamma^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \pi^0) = W(\gamma^{*0} \rightarrow \Sigma^+ \pi^-) \\ &= W(\gamma^{*0} \rightarrow \Sigma^- \pi^+) = W(\gamma^{*0} \rightarrow \Sigma^0 \pi^-) = W(\gamma^{*+} \rightarrow \Sigma^- \pi^0). \end{aligned} \quad (95)$$

Рассмотрим, наконец, распад резонанса Δ с $T=3/2$ на π -мезон и нуклон.

Мы имеем

$$M_{\Delta \rightarrow N\pi} = g \bar{N}^a \pi^{b\{c\}} \Delta_{\{abc\}}. \quad (96)$$

Пользуясь выражениями для \bar{N}^a и $\Delta_{\{abc\}}$ и выражением типа (54) для $\pi^{b\{c\}}$, мы

получаем

$$M_{\Delta \rightarrow N\pi} = g \bar{\pi}^+ \bar{p} \Delta^{++} + \frac{g}{\sqrt{3}} (\sqrt{2} \bar{\pi}^0 \bar{p} + \bar{\pi}^+ \bar{n}) \Delta^+ + \frac{g}{\sqrt{3}} (\sqrt{2} \bar{\pi}^0 \bar{n} + \bar{\pi}^- \bar{p}) \Delta^0 + g \bar{\pi}^- \bar{n} \Delta^-, \quad (97)$$

т.е.

$$W(\Delta^+ \rightarrow p\pi^+) = 3 W(\Delta^+ \rightarrow n\pi^+) = \frac{3}{2} W(\Delta^+ \rightarrow p\pi^0) = 3 W(\Delta^0 \rightarrow p\pi^-) = \frac{3}{2} W(\Delta^0 \rightarrow n\pi^0) = W(\Delta^- \rightarrow n\pi^-). \quad (98)$$

§ 4. Изотопическая инвариантность амплитуд рассеяния

Развитую выше спиновую технику применим теперь к изучению следствий изотопической инвариантности в процессах рассеяния и рождения частиц. Рассмотрим прежде всего амплитуду упругого рассеяния π -мезона на нуклоне. Она является инвариантной комбинацией произведений вида

$$\bar{\pi}_b^a(q_2) \pi_a^c(q_1) \bar{N}^c(p_2) N_f(p_1).$$

Из этих произведений можно образовать три инварианта, а именно:

$$\bar{\pi}_b^a(q_2) \pi_a^b(q_1) \bar{N}^c(p_2) N_c(p_1)$$

и

$$\bar{N}^a(p_2) [\bar{\pi}_a^b(q_2) \pi_b^c(q_1) \pm \pi_a^b(q_2) \bar{\pi}_b^c(q_1)] N_c(p_1).$$

Выражения, содержащие ϵ^{ab} , сводятся к этим инвариантам, так как $\epsilon^{ab} \pi_b^c \epsilon_{cd} = -\pi_d^a$. Однако в силу тождества

$$\bar{\pi}_a^b(q_2) \pi_b^c(q_1) + \pi_a^b(q_2) \bar{\pi}_b^c(q_1) =$$

$$\frac{1}{2} \bar{\pi}_i^j(q_2) \pi_j^i(q_1) (\tau_i^c \tau_j^c + \tau_j^c \tau_i^c)_a^c = \delta_a^c \bar{\pi}_i^j(q_2) \pi_i^j(q_1)$$

$$= \delta_a^c \bar{\pi}_b^d(q_2) \pi_d^b(q_1),$$

только два из них являются независимыми. Таким образом, амплитуда рассеяния π -мезона на нуклоне имеет вид

$$M_{\pi N \rightarrow \pi N} = A_2 \bar{\pi}_b^a(q_2) \pi_a^b(q_1) \bar{N}^c(p_2) N_c(p_1) \quad (99)$$

$$+ A_2 \bar{N}^a(p_2) [\bar{\pi}_a^b(q_2) \pi_b^c(q_1) - \pi_a^b(q_1) \bar{\pi}_b^c(q_2)] N_c(p_1).$$

Если вместо спинора π_b^a пользоваться трехмерным вектором π_i , то мы имеем

$$M_{\pi N \rightarrow \pi N} = \frac{1}{2} \bar{\pi}_i^j(q_2) \pi_j^i(q_1) \bar{N}(p_2) [\tau_i^c \tau_j^c] A_2 + [\tau_i^c \tau_j^c] A_2 N(p_1) \quad (100)$$

При изучении соотношений перекрестной симметрии амплитуд весьма удобно пользоваться (100). Однако при анализе экспериментальных данных во многих случаях необходимо построить амплитуды рассеяния в состояниях с определенными полными изотопическими спинами. Для этой цели можно также применить спиновую технику. Действительно, из произведений волновых функций частиц в начальном состоянии $\pi_b^a(q_1) N_c(p_1)$ можно образовать волновые функции с $T = \frac{3}{2}$ и $T = \frac{1}{2}$. Так, например, для образования волновой функции с $T = \frac{1}{2}$ достаточно суммировать по a и c , а для получения волновой функции с $T = \frac{3}{2}$ мы должны сначала симметризовать эти произведения по a и c и затем вычесть шпур из полученного выражения. Однако на этом мы не будем подробно останавливаться.

Из общей изотопической структуры (99) можно получить выражения амплитуд конкретных процессов. Рассмотрим, например, процесс

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p.$$

Так как для протона $N_1 = 1$, $N_2 = 0$, а для π^+ -мезона $\pi_1^2 = 1$, $\pi_2^1 = 1$, остальные компоненты равны нулю, то из (99) мы получаем

$$M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = A_2 - A_2. \quad (101)$$

Аналогично

$$M(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = A_1 + A_2, \quad (102)$$

$$M(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) = -\sqrt{2} A_2. \quad (103)$$

Амплитуды других процессов получаются из (101) - (103) при помощи зарядовой симметрии. Исключая неизвестные произвольные функции A_1 и A_2 , мы получаем соотношение между амплитудами трех рассматриваемых процессов

$$M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) - M(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = \sqrt{2} M(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n). \quad (104)$$

Отсюда следует, что сечения этих процессов должны удовлетворять неравенствам треугольника типа

$$|\sqrt{\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)} - \sqrt{\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)}| \leq \sqrt{2} \sqrt{\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n)} \leq \sqrt{\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)} + \sqrt{\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)}. \quad (105)$$

В области больших энергий и малых углов сечение перезарядки $\sigma(\pi^+p \rightarrow \pi^0n)$ очень мало по сравнению с упругими сечениями. Тогда можно положить $A_2 = 0$ и получить приближенное равенство сечений упругого рассеяния π^+ и π^- -мезонов на протоне.

Для того чтобы получить соотношения между амплитудами или сечениями процессов типа

$$\pi + N \rightarrow K + \Sigma$$

достаточно в конечных состояниях процессов в (IOI) - (IO3) заменить $p \rightarrow K^+$, $n \rightarrow K^0$

$$\pi^{\pm, 0} \rightarrow \Sigma^{\pm, 0}$$

В качестве второго примера рассмотрим рассеяние K-мезона на нуклоне. Из произведения волновых функций этих частиц можно образовать три инварианта

$$\bar{K}^a(q_2) K_a(q_2) \bar{N}^b(p_2) N_b(p_2),$$

$$\bar{K}^a(q_2) K_b(q_2) \bar{N}^b(p_2) N_a(p_2),$$

$$\bar{K}^a(q_2) K_b(q_2) \bar{N}^c(p_2) N_d(p_2) \varepsilon^{bd} \varepsilon_{ac}.$$

Однако из соотношения

$$\varepsilon^{bd} \varepsilon_{ac} = -\delta_a^b \delta_c^d + \delta_c^b \delta_a^d$$

следует, что только два из них являются независимыми. Итак, мы имеем:

$$M(KN \rightarrow KN) = A_2 \bar{K}^a(q_2) K_a(q_2) \bar{N}^b(p_2) N_b(p_2) + A_2 \bar{K}^a(q_2) K_b(q_2) \bar{N}^b(p_2) N_a(p_2). \quad (IO6)$$

Нетрудно доказать следующее тождество

$$\delta_b^a \delta_d^c = \frac{1}{2} [(\tau_i)_d^a (\tau_i)_b^c + \delta_d^a \delta_b^c].$$

Отсюда следует, что второй член в (IO6) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} A_2 \left[\bar{K}^a(q_2) (\tau_i)_a^b K_b(q_2) \bar{N}^c(p_2) (\tau_i)_c^d N_d(p_2) + \bar{K}^a(q_2) K_a(q_2) \bar{N}^b(p_2) N_b(p_2) \right].$$

Итак, мы имеем

$$M(KN \rightarrow KN) = B_2 \bar{K}(q_2) K(q_2) \bar{N}(p_2) N(p_2) + B_2 \bar{K}(q_2) \tau_i K(q_2) \bar{N}(p_2) \tau_i N(p_2), \quad (IO7)$$

где B_2 и B_2 просто связаны с A_2 и A_2 . Из общей структуры (IO6) мы получаем следующие выражения для амплитуд конкретных процессов

$$M(K^+p \rightarrow K^+p) = A_1 + A_2, \quad (IO8)$$

$$M(K^0p \rightarrow K^0p) = A_2, \quad (IO9)$$

$$M(K^0p \rightarrow K^+n) = A_2. \quad (IO10)$$

Таким образом, амплитуды рассматриваемых процессов удовлетворяют соотношению

$$M(K^+p \rightarrow K^+p) = M(K^0p \rightarrow K^0p) + M(K^0p \rightarrow K^+n). \quad (III)$$

При больших энергиях и малых углах сечение $\sigma(K^+p \rightarrow K^+n)$ очень мало. Тогда из полученных соотношений следует равенство сечений рассеяния K^+ - и K^0 -мезона на протоне.

Если в (IO8) - (IO10) заменим $K^+ \rightarrow p$, $K^0 \rightarrow n$, то мы получим соотношения для амплитуд рассеяния нуклона на нуклоне.

Мы изучили подробно два-три примера. Изложенный метод можно применить к любым процессам распада, рассеяния и рождения частиц в сильных взаимодействиях.

§ 5. G-четность

При зарядовом сопряжении истинно нейтральные частицы переходят в себя, а их волновые функции либо не меняются, либо меняют знак. В первом случае говорим, что частица имеет

C-четность $+1$, а во втором C-четность частицы равна -1 . Так как заряженные частицы переходят в свои античастицы, то для этих частиц нельзя ввести понятие C-четности.

Для частиц, которые вместе с античастицами входят в один и тот же изотопический мультиплет, можно обобщить это понятие, а именно ввести так называемую G-четность.

Рассмотрим, например, π -мезон. В C-преобразовании мы имеем

$$\pi^+ \rightarrow \pi^-, \quad \pi^- \rightarrow \pi^+, \quad \pi^0 \rightarrow \pi^0.$$

В § I мы рассмотрели специальное изотопическое преобразование - зарядовую симметрию, в котором $\pi^+ \rightarrow -\pi^+$, $\pi^- \rightarrow -\pi^-$, $\pi^0 \rightarrow -\pi^0$.

Комбинируя C-преобразование и зарядовую симметрию, мы получаем G-преобразование, в котором $\pi^+ \rightarrow -\pi^+$, $\pi^- \rightarrow -\pi^-$, $\pi^0 \rightarrow -\pi^0$.

Итак, все π -мезоны являются собственными состояниями G -преобразования. Соответствующее собственное значение равно -1 и называется G -четностью мезона. Аналогично, ρ -мезон имеет G -четность $+1$, а ω и η -мезонов равны -1 . C -инвариантность и изотопическая инвариантность приводят к новому закону сохранения - сохранение G -четности, который очень часто применяется при изучении правил отбора в процессах сильных взаимодействий. Так, например, сохранение G -четности запрещает распады ρ -мезонов на три π -мезона, а также ω и η -мезонов на два π -мезона. В заключение отметим, что определенными G -четностями обладают не только мезоны, но и системы частиц, содержащие одновременно частицы из некоторого мультиплетта и их античастиц, например, системы нуклон-антинуклон. Для процессов взаимодействия таких систем сохранение G -четность дает ряд правил отбора. Однако на этом подробно останавливаться мы не будем.

III. ИЗОТОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

§ I. Электромагнитный ток

Лагранжиан электромагнитных взаимодействий для всех полей имеет вид

где J_μ^e - электромагнитный ток этих полей. Для нуклона мы имеем

где ψ_p - полевого оператора протона. Если ввести оператор нуклонного поля

то мы имеем

$$J_\mu^e = \frac{1}{2} \bar{N} \gamma_\mu N + \frac{1}{2} \bar{N} \gamma_\mu \tau_3 N. \quad (II2)$$

Это соотношение означает, что электромагнитный ток для нуклона состоит из двух частей, первая часть инвариантна относительно изотопической группы, а вторая часть является третьей компонентой некоторого изотопического вектора. (Так как $\bar{N}^a N_c$ является спинором второго ранга, и согласно (34) $\bar{N}^a (\tau_i)_a^c N_c$ является трехмерным вектором). Этим свойствам обладают также и любые другие барионы и мезоны. Таким образом, электромагнитный ток для сильно взаимодействующих частиц имеет вид:

$$J_\mu^e = \frac{1}{2} (J_\mu^0 + J_\mu^1), \quad (II3)$$

где J_μ^0 - изотопический скаляр, а J_μ^1 - третья константа некоторого изотопического вектора. Изоскалярный ток имеет G -четность -1 , а G -четность изовекторного тока равна $+1$, как это нетрудно проверить. Действительно, для изоскалярного тока G -преобразование совпадает с C -преобразованием, так как он является изотопическим скаляром, а C -четность векторного тока равна -1 . Что касается изовекторного тока, то в зарядовой симметрии он меняет знак, так как зарядовая симметрия является вращением на угол π вокруг второй оси в изотопическом трехмерном пространстве.

§ 2. Форм-факторы и амплитуды электромагнитных процессов

Рассмотрим теперь электромагнитные процессы сильно взаимодействующих частиц, матричные элементы которых пропорциональны матричным элементам электромагнитного тока

$$\langle A | J_\mu^e | B \rangle,$$

где $|A\rangle$ и $|B\rangle$ - состояния систем сильно взаимодействующих частиц. Примерами таких процессов являются процессы рассеяния электронов на нуклоне, фоторождение, электророжение, а также процессы радиационных распадов мезонов и барионов с испусканием одного фотона. Так как сильные взаимодействия изотопически инвариантны, то матричные элементы тока J_μ^e обладают такими же трансформационными свойствами, что и сам этот ток. Это означает, что каждый матричный элемент тока J_μ^e является суммой двух членов, первый из которых (J_μ^0) не меняется при изотопических преобразованиях, а второй (J_μ^1) является третьей компонентой некоторого изотопического вектора. Эти трансформационные свойства приводят к ряду экспериментальных следствий.

В качестве примера рассмотрим матричные элементы тока J_μ^e между состояниями барионов, например, нуклонов. Поскольку нас интересуют только изотопические соотношения, то можно не рассматривать спиновую структуру. Тогда мы имеем

$$\langle N | J^0 | N \rangle = F^0 \bar{N} N, \quad (II4)$$

$$\langle \bar{N} | J^1 | N \rangle = F^1 \bar{N} \tau_3 N. \quad (II5)$$

Следовательно, формфакторы (электрические и магнитные) протона и нейтрона выражаются через два независимых формфактора: изоскалярный и изовекторный формфакторы

$$F^p = \frac{1}{2} (F^0 + F^1), \quad (II6)$$

$$F^n = \frac{1}{2} (F^0 - F^1). \quad (II7)$$

В данном случае изотопическая инвариантность не дает никаких новых следствий. Однако дело обстоит совсем иначе при изучении формфакторов частиц с высшими изотопическими спинами. Действительно, для матричных элементов J^0 и J^1 между состояниями Σ -гиперона мы имеем

$$\langle \Sigma | J^0 | \Sigma \rangle = F^0 \bar{\Sigma}_b^a \Sigma_a^b, \quad (I18)$$

$$\langle \Sigma | J^1 | \Sigma \rangle = F^1 \bar{\Sigma}_b^a (\tau_3)_a^c \Sigma_c^b. \quad (I19)$$

Формфакторы частиц Σ^+ , Σ^0 и Σ^- выражаются через F^0 и F^1 следующим образом:

$$F^{\Sigma^+} = \frac{1}{2} (F^0 + F^1), \quad (I20)$$

$$F^{\Sigma^0} = \frac{1}{2} F^0, \quad (I21)$$

$$F^{\Sigma^-} = -\frac{1}{2} (F^0 - F^1) \quad (I22)$$

(знаки формфакторов заряженных частиц выбираются по знаку заряда). Отсюда получаем соотношение между формфакторами Σ -гиперонов:

$$F^{\Sigma^+} - F^{\Sigma^-} = 2 F^{\Sigma^0}. \quad (I23)$$

В частности, магнитные моменты Σ -гиперонов связаны соотношением вида (I23)

$$\mu_{\Sigma^+} - \mu_{\Sigma^-} = 2 \mu_{\Sigma^0}. \quad (I23')$$

Аналогичный метод также можно применить к изучению амплитуд фоторождения. Для процессов фоторождения π -мезона на нуклоне мы имеем:

$$\langle \pi N | J^0 | N \rangle = A_0 \bar{N}^a \pi_a^b N_b, \quad (I24)$$

$$\langle \pi N | J^1 | N \rangle = A_1 \bar{N}^a \pi_a^b (\tau_3)_b^c N_c + A_2 \bar{N}^a \left(\pi_a^b (\tau_3)_b^c - (\tau_3)_a^b \pi_b^c \right) N_c. \quad (I25)$$

Отметим, что из произведений $\bar{N}^a \pi_b^c N_d$ можно образовать также третья комбинация с требуемыми трансформационными свойствами, а именно:

$$\bar{N}^a \left(\pi_a^b (\tau_3)_b^c + (\tau_3)_a^b \pi_b^c \right) N_c.$$

Однако этот член выражается через два независимых члена в (I25). Аналогичная ситуация имела место при изучении рассеяния π -мезона на нуклоне. Таким образом, амплитуда фоторождения π -мезона на нуклоне имеет следующую изотопическую структуру:

$$M(\gamma N \rightarrow \pi N) \sim \bar{N}_i \left[A'_0 \tau_i + A'_1 \{ \tau_i, \tau_3 \} + A'_2 [\tau_i, \tau_3] \right] N_i \quad (I26)$$

Из данной общей структуры можно получить выражения для амплитуд конкретных процессов. Мы имеем

$$M(\gamma p \rightarrow \pi^0 p) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} A_0 + \sqrt{2} A_2 \quad (I27)$$

$$M(\gamma p \rightarrow \pi^+ n) \sim A_0 + 2 A_2, \quad (I28)$$

$$M(\gamma n \rightarrow \pi^0 n) \sim -\frac{1}{\sqrt{2}} A_0 + \sqrt{2} A_2, \quad (I29)$$

$$M(\gamma n \rightarrow \pi^- p) \sim A_0 - 2 A_2. \quad (I30)$$

Отсюда получаем соотношение

$$M(\gamma p \rightarrow \pi^+ n) + M(\gamma n \rightarrow \pi^- p) = \sqrt{2} \left(M(\gamma p \rightarrow \pi^0 p) + M(\gamma n \rightarrow \pi^0 n) \right). \quad (I31)$$

Рассмотрим, наконец, радиационный распад бариона с $T=3/2$ на барион с $T=1/2$, например,

$$\Delta \rightarrow N + \gamma$$

Амплитуда имеет вид:

$$M_{\Delta \rightarrow N \gamma} = g \bar{N}^a \Delta_{abc} (\tau_3)_d^c \varepsilon^{cd} \quad (I32)$$

где \bar{N}^a и Δ_{abc} - волновые функции, данные в § I. Для конкретных процессов имеем

$$M(\Delta^+ \rightarrow p \gamma) = \frac{2}{\sqrt{3}} g, \quad (I33)$$

$$M(\Delta^0 \rightarrow n \gamma) = \frac{2}{\sqrt{3}} g.$$

Итак:

$$W(\Delta^+ \rightarrow p \gamma) = W(\Delta^0 \rightarrow n \gamma).$$

Это соотношение также можно получить из зарядовой симметрии, учитывая то, что только изовекторный ток дает вклад.

§ 3. Нарушение изотопической инвариантности электромагнитным взаимодействием

Так как электромагнитный ток не инвариантен относительно изотопических преобразований, то радиационные поправки должны привести к нарушению изотопической инвариантности сильных взаимодействий. Рассмотрим, например, вклад от радиационных поправок второго порядка к амплитудам процессов сильных взаимодействий. Соответствующие матричные элементы содержат произведение двух электромагнитных токов

$$\frac{1}{4} (J^0(x) + J^1(x)) (J^0(y) + J^1(y)).$$

Так как J^1 преобразуется как изотопический вектор, то из правила сложения момента (см. I, § 4) следует, что эти матричные элементы состоят из трех частей, одна из которых есть инвариант, а другие преобразуются как компоненты с $T_3 = 0$ изотопического вектора ($T=1$) и изотопического симметричного тензора второго ранга с нулевым шпуром ($T=2$).

В частности, электромагнитное взаимодействие приводит к расщеплению масс частиц в одном изотопическом мультиплете, и из указанных трансформационных свойств радиационных поправок можно получить соотношения между разностями масс частиц в каждом мультиплете.

Рассмотрим более подробно электромагнитное расщепление масс частиц. Мы предположим, что при отсутствии электромагнитного взаимодействия (а также слабых взаимодействий) массы всех частиц в одном изотопическом мультиплете совпадают. При включении электромагнитного взаимодействия происходит перенормировка массы за счет электромагнитного взаимодействия. Из изотопических свойств электромагнитного тока следует, что добавка к массовому члену в лагранжиане, возникающая за счет перенормировки масс, состоит из трех частей с различными трансформационными свойствами. Первая часть является инвариантом и включается в первоначальную массу, одинаковую для всех частиц в каждом мультиплете, а другие преобразуются как компоненты с $T_3 = 0$ изотопического вектора и тензора. Итак, во втором порядке по электромагнитному взаимодействию массы всех частиц в каждом изотопическом мультиплете выражаются через три неизвестные константы. Поэтому для мультиплетов с $T \geq \frac{3}{2}$ существуют соотношения между массами их компонент.

В качестве примера рассмотрим барионный изотопический мультиплет с $T = \frac{3}{2}$.

Массовый член в лагранжиане имеет вид

$$\mathcal{L}_M = M_0 \bar{\psi}_{\{abc\}} \psi_{\{abc\}} + a_1 (\tau_3)_a^b \bar{\psi}_{\{acd\}} \psi_{\{bcd\}} + a_2 (\tau_3)_a^b (\tau_3)_c^d \bar{\psi}_{\{ace\}} \psi_{\{bde\}}.$$

Отсюда мы получаем для масс барионных резонансов Δ , например, выражения (134)

$$M_{\Delta^{++}} = M_0 + a_1 + a_2 \quad (135)$$

$$M_{\Delta^+} = M_0 + \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{3} a_2, \quad (136)$$

$$M_{\Delta^0} = M_0 - \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{3} a_2 \quad (137)$$

$$M_{\Delta^-} = M_0 - a_1 + a_2. \quad (138)$$

Следовательно, разности масс этих частиц связаны соотношением

$$M_{\Delta^{++}} - M_{\Delta^-} = 3(M_{\Delta^+} - M_{\Delta^0}). \quad (139)$$

IV. ИЗОТОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

§ I. Сохранение векторного тока и изотопические свойства тока с $\Delta S = 0$

В универсальной V-A теории слабых взаимодействий часть лагранжиана, соответствующая сохраняющим странность процессам слабых взаимодействий барионов и мезонов с лептонами, имеет вид

$$\mathcal{L}_{\Delta S=0}^1 = \frac{G}{\sqrt{2}} j_\mu^l J_\mu^V + \text{с.с.},$$

где j_μ^l - лептонный ток, J_μ^V - сумма векторного и аксиального токов сильно взаимодействующих частиц J_μ^V и J_μ^A , причем J_μ^V и изовекторная часть J_μ^1 электромагнитного тока (I13) являются различными компонентами одного и того же изотопического вектора

$$V_\mu^i = (V_\mu)_a^b (\tau_i)_b^a, \quad (140)$$

а именно:

$$J_\mu^1 = (V_\mu)_a^b (\tau_3)_b^a,$$

$$J_\mu^V = (V_\mu)_a^b (\tau_+)_b^a, \quad (J_\mu^V)^+ = (V_\mu)_a^b (\tau_-)_b^a. \quad (141)$$

Так как изовекторный (и изоскалярный) электромагнитный ток сохраняется, то векторный ток слабых взаимодействий с $\Delta S = 0$ также сохраняется

$$\frac{\partial V_\mu^i}{\partial x_\mu} = \frac{\partial J_\mu^V}{\partial x_\mu} = 0.$$

Отсюда следует, что векторная константа сохраняющих странность слабых взаимодействий сильно взаимодействующих частиц не подвергается перенормировке за счет сильных взаимодействий. Тем самым объясняется равенство перенормированных (т.е. наблюдаемых) векторных констант β -распада нейтрона и распада μ -мезона в предположении об универсальности неперенормированных констант слабых взаимодействий. Иначе говоря, векторная константа β -распада нейтрона равна универсальной неперенормированной константе G .

Гипотеза о сохранении векторного тока V_μ^i приводит к весьма важным и интересным следствиям. Так, например, из сохранения векторного тока V_μ^1 следует, что матричный элемент этого тока для β -распада нейтрона имеет такой же вид, что и матричный элемент электромагнитного тока J_μ^1 между состояниями протонов или нейтронов. Он зависит от двух формфакторов F_i^p , $i=1,2$, причем формфактор F_2^p соответствует электрическим формфакторам $F_1^{\pi^0}$, а формфактор F_2^p , аналогичный магнитным формфакторам $F_2^{\pi^0}$, называется формфактором слабого магнетизма. Так как F_2^p равны соответствующим изовекторным электромагнитным формфакторам, а последние связаны с формфакторами протона и нейтрона

соотношениями (I16) и (I17), то мы имеем:

$$F_i^{\rho} = F_i^{\uparrow} - F_i^{\downarrow} \quad (I42)$$

Рассмотрим теперь матричные элементы токов J_{μ}^0, V_{μ}^i между состояниями π -мезонов. Мы имеем

$$\langle \pi | J_{\mu}^0 | \pi \rangle = H^0 \pi_6^a \pi_6^a, \quad (I43)$$

$$\langle \pi | V_{\mu}^i | \pi \rangle = H^{\pm} \pi_6^a (\tau_i)_a^c \pi_6^b. \quad (I44)$$

Отсюда следует, что матричный элемент электромагнитного тока для π -мезона равен

$$\begin{aligned} \langle \pi | J_{\mu}^e | \pi \rangle &= \frac{1}{2} \left[H^0 \pi_6^a \pi_6^a + H^{\pm} \pi_6^a (\tau_3)_a^c \pi_6^b \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \overline{\pi^+ \pi^+} (H^0 + H^{\pm}) + \overline{\pi^0 \pi^0} H^0 + \overline{\pi^- \pi^-} (H^0 - H^{\pm}) \right\}, \end{aligned} \quad (I45)$$

а матричный элемент тока V_{μ}^i для β -распада π -мезона равен

$$\langle \pi | J_{\mu}^V | \pi \rangle = H^{\pm} \pi_6^a (\tau_i)_a^c \pi_6^b = \frac{1}{\sqrt{2}} H^{\pm} (\overline{\pi^0 \pi^-} - \overline{\pi^+ \pi^0}). \quad (I46)$$

Так как π^0 -мезон является истинно нейтральной частицей, то из (I45) следует, что $H^0 = 0$. Таким образом, формфактор β -распада π -мезона H^{ρ} связан с их электромагнитными формфакторами H^e :

$$H^{\rho} = \sqrt{2} H^e. \quad (I47)$$

Так как константа β -распада π -мезона равна произведению универсальной константы G на формфактор H^{ρ} при нулевой передаче, а при нулевой передаче $H^e = 1$, то константа β -распада π -мезона равна $\sqrt{2} G$.

Мы изучили некоторые следствия, вытекающие из изотопических свойств векторного тока V_{μ} . Что касается аксиального тока J_{μ}^A , то в настоящее время предполагают, что он также является компонентой некоторого изотопического вектора. Итак, для полного тока слабых взаимодействий с $\Delta S = 0$ J_{μ} мы имеем:

$$J_{\mu} = (J_{\mu})_a^b (\tau_+)_b^c, \quad J_{\mu}^{\dagger} = (J_{\mu})_a^b (\tau_-)_b^c. \quad (I48)$$

Эта гипотеза, более сильная чем гипотеза о сохранении векторного тока, может быть проверена в нейтринных экспериментах. Так, например, из нее вытекает ряд соотношений между сечениями процессов рождения π -мезона при столкновении нейтрино и антинейтрино с нуклонами. Матричные элементы этих процессов имеют вид:

$$M(\nu N \rightarrow \ell \bar{\pi} N) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) u \langle \pi N | J_{\mu} | N \rangle, \quad (I49)$$

$$M(\bar{\nu} N \rightarrow \ell^+ \pi N) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{v} \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) v \langle \pi N | J_{\mu}^{\dagger} | N \rangle, \quad (I49')$$

где

$$\begin{aligned} \langle \pi N | J_{\mu} | N \rangle &= \langle \pi N | (J_{\mu})_a^b | N \rangle (\tau_+)_b^c, \\ \langle \pi N | J_{\mu}^{\dagger} | N \rangle &= \langle \pi N | (J_{\mu})_a^b | N \rangle (\tau_-)_b^c. \end{aligned}$$

Из изотопической инвариантности сильных взаимодействий следует, что

$$\begin{aligned} (\tau_+)_b^c \langle \pi N | (J_{\mu})_a^b | N \rangle &= A_{\mu} \pi_6^a (\tau_+)_a^b \bar{N}^c N_c \\ &+ B_{\mu} \bar{N}^a \left[\pi_6^b (\tau_+)_b^c - (\tau_+)_a^b \pi_6^c \right] N_c, \end{aligned} \quad (I50)$$

по аналогии с (99) и (I25). Отсюда получаем для конкретных процессов

$$M(\nu p \rightarrow \ell^+ \pi^+ p) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) u (A_{\mu} - B_{\mu}), \quad (I51)$$

$$M(\nu n \rightarrow \ell^+ \pi^+ n) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) u (A_{\mu} + B_{\mu}), \quad (I52)$$

$$M(\nu n \rightarrow \ell^+ \pi^0 p) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) u (-\sqrt{2} B_{\mu}), \quad (I53)$$

$$M(\bar{\nu} n \rightarrow \ell^+ \pi^- n) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{v} \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) v (A_{\mu} - B_{\mu}), \quad (I51')$$

$$M(\bar{\nu} p \rightarrow \ell^+ \pi^- p) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{v} \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) v (A_{\mu} + B_{\mu}), \quad (I52')$$

$$M(\bar{\nu} p \rightarrow \ell^+ \pi^0 n) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{v} \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) v (-\sqrt{2} B_{\mu}). \quad (I53')$$

Отметим, что матричные элементы лептонного тока для процессов с нейтрино и с антинейтрино

$$\bar{u} \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) u, \quad \bar{v} \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) v$$

вообще отличаются. Они равны между собой при нулевом значении передачи импульса лептонов. Таким образом, мы имеем следующие соотношения для дифференциальных сечений при нулевой передаче импульса лептонов:

$$\sigma(\nu p \rightarrow \ell^+ \pi^+ p) \Big|_{\vec{k}_\nu \parallel \vec{k}_\ell} = \sigma(\bar{\nu} n \rightarrow \ell^+ \pi^- n) \Big|_{\vec{k}_\nu \parallel \vec{k}_\ell} \quad (I54)$$

$$\sigma(vn \rightarrow l^+ \pi^+ n) \Big|_{\vec{k}_v // \vec{k}_l} = \sigma(\tilde{v}p \rightarrow l^+ \pi^+ p) \Big|_{\vec{k}_v // \vec{k}_l}, \quad (I54')$$

$$\sigma(vn \rightarrow l^+ \pi^0 p) \Big|_{\vec{k}_v // \vec{k}_l} = \sigma(\tilde{v}p \rightarrow l^+ \pi^0 p) \Big|_{\vec{k}_v // \vec{k}_l}. \quad (I54'')$$

Из (I51) - (I53) мы получаем неравенства треугольника для соответствующих процессов при любых значениях передачи

$$\left| \sqrt{\sigma(vp \rightarrow l^+ \pi^+ p)} - \sqrt{\sigma(vn \rightarrow l^+ \pi^+ n)} \right| \leq \sqrt{2\sigma(vn \rightarrow l^+ \pi^0 p)} \leq \sqrt{\sigma(vp \rightarrow l^+ \pi^+ p)} + \sqrt{\sigma(vn \rightarrow l^+ \pi^+ n)} \quad (I55)$$

и т.д. Аналогичные соотношения имеют место также и для соответствующих процессов с анти-нейтрино

$$\left| \sqrt{\sigma(\tilde{v}n \rightarrow l^+ \pi^+ \bar{p})} - \sqrt{\sigma(\tilde{v}p \rightarrow l^+ \pi^+ \bar{p})} \right| \leq \sqrt{2\sigma(\tilde{v}p \rightarrow l^+ \pi^0 \bar{p})} \leq \sqrt{\sigma(\tilde{v}n \rightarrow l^+ \pi^+ \bar{p})} + \sqrt{\sigma(\tilde{v}p \rightarrow l^+ \pi^+ \bar{p})}. \quad (I55')$$

Нетрудно увидеть, что такие же соотношения, что и (I54) - (I55'), также можно получить для процессов парного рождения K -мезона и Σ -гиперона при столкновении нейтринно или антинейтринно с нуклонами. Для получения этих соотношений достаточно в конечных состояниях рассмотренных процессов заменить $p \rightarrow K^+$, $n \rightarrow K^0$, $\pi^{\pm 0} \rightarrow \Sigma^{\pm 0}$. Например, вместо (I54) мы имеем теперь

$$\sigma(vp \rightarrow l^+ K^+ \Sigma^+) \Big|_{\vec{k}_v // \vec{k}_l} = \sigma(\tilde{v}n \rightarrow l^+ K^0 \Sigma^-) \Big|_{\vec{k}_v // \vec{k}_l} \quad (I56)$$

и т.д. Для процессов рождения K -мезона и Λ -гиперона справедливо соотношение

$$\sigma(vn \rightarrow l^+ \Lambda K^+) \Big|_{\vec{k}_v // \vec{k}_l} = \sigma(\tilde{v}p \rightarrow l^+ \Lambda K^0) \Big|_{\vec{k}_v // \vec{k}_l}. \quad (I57)$$

Вместо сложных неравенств типа (I55) мы получим простые соотношения, если рассмотрим рождение π -мезона и нуклона в резонансном состоянии с $T=3/2$. В данном случае мы все матричные элементы выражаем через одну неизвестную амплитуду (спиновая структура не рассматривается)

$$(\tau_i)_c^a \langle \Delta | (J_\mu)_a^b | N \rangle = A_\mu \bar{\Delta}^{bcd} N_d \epsilon_{ca} (\tau_i)_c^a. \quad (I58)$$

Для конкретных процессов мы имеем

$$\langle \Delta^{++} | J_\mu | p \rangle = - \langle \Delta^- | J_\mu^+ | n \rangle = A_\mu, \quad (I59)$$

$$\langle \Delta^+ | J_\mu | n \rangle = - \langle \Delta^0 | J_\mu^+ | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu \quad (I60)$$

и, следовательно,

$$\sigma(vp \rightarrow l^+ \Delta^{++}) = 3\sigma(vn \rightarrow l^+ \Delta^+), \quad (I61)$$

$$\sigma(\tilde{v}n \rightarrow l^+ \Delta^-) = 3\sigma(\tilde{v}p \rightarrow l^+ \Delta^0). \quad (I61')$$

Так как во всех рассмотренных процессах изотопический спин конечного состояния получается сложением изотопического спина начального состояния с единицей (по правилам сложения моментов), то говорим, что эти процессы удовлетворяют правилу $\Delta T=1$.

В заключение отметим, что векторный и аксиальный токи обладают определенными

$$\begin{aligned} G\text{-четностями. Так, например, для векторного тока нуклона мы имеем} \\ \bar{N} \gamma_\mu \tau_i N \xrightarrow{C} -N^T C^{-1} \gamma_\mu \tau_i C \bar{N}^T = -\bar{N} \gamma_\mu \tau_i^T N \xrightarrow{T_2} \\ -\bar{N} \tau_2 \gamma_\mu \tau_i^T \tau_2 N = \bar{N} \gamma_\mu \tau_i N. \end{aligned}$$

Здесь T_2 обозначает зарядовую симметрию, в которой $N \rightarrow -i\tau_2 N$ (см. (63)). Аналогично

$$\bar{N} \gamma_\mu N \xrightarrow{C} -\bar{N} \gamma_\mu N \xrightarrow{T_2} -\bar{N} \gamma_\mu N.$$

§ 2. Изотопические свойства тока с $\Delta S = \pm 1$

Для процессов слабых взаимодействий сильновзаимодействующих частиц с лептонами, в которых странность меняется, предполагают, что соответствующая часть лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L}_{\Delta S \neq 0}^l = \frac{G}{\sqrt{2}} j_\mu^l S_\mu + \text{с.с.}$$

В этом лагранжиане S_μ - ток сильновзаимодействующих частиц, преобразующийся при изотопических преобразованиях как компонента изотопического спинора и меняющий странность системы частиц на величину, равную единице по абсолютному значению. Здесь ток S_μ определяется с точностью до мультипликативной константы. Предположим, что в рассматриваемых процессах третья компонента изотопического спина системы сильновзаимодействующих частиц, а также ее полный изотопический спин, меняются на величину, равную $\frac{1}{2}$ по абсолютному значению. Поскольку по нашему определению лептонный ток переводит нейтрино в отрицательный лептон, то есть уменьшает заряд лептонов на единицу, то ток S_μ должен увеличить заряд систем сильновзаимодействующих частиц на единицу, т.е. $\Delta Q = 1$. Из формулы Гелл-Манна-Нисижими следует, что условия $|\Delta S| = 1, |\Delta T_3| = \frac{1}{2}$ и $\Delta Q = 1$ влекут за собой $\Delta S = 1$ и $\Delta T_3 = \frac{1}{2}$. Мы имеем, таким образом, правило $\Delta Q = \Delta S$.

Условие $\Delta T_3 = \frac{1}{2}$ означает, что третья компонента изотопического

спина системы сильно взаимодействующих частиц увеличивается на $+\frac{1}{2}$, т.е. S_μ преобразуется как оператор рождения частицы с $T = \frac{1}{2}$ и $T_3 = \frac{1}{2}$ или оператор уничтожения частицы с $T = \frac{1}{2}$ и $T_3 = -\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что матричные элементы вида

$$\langle A | S_\mu | B \rangle$$

для любых состояний систем сильно взаимодействующих частиц $|A\rangle$ и $|B\rangle$ преобразуются как изотопический спинор с $T = \frac{1}{2}$ и $T_3 = -\frac{1}{2}$. Это трансформационное свойство матричных элементов тока S_μ приводит к ряду соотношений между вероятностями распадов, а также между сечениями рождения странных частиц в нейтринных опытах.

Рассмотрим лептонные распады K -мезонов. Так как матричный элемент S_μ^+ преобразуется как компонента спинора с $T = \frac{1}{2}$ и $T_3 = \frac{1}{2}$, то мы имеем

$$\langle \pi | S_\mu^+ | K \rangle = B_\mu \bar{\pi}_1^a K_a. \quad (162)$$

Отсюда получаем для конкретных процессов

$$M(K^+ \rightarrow \nu l^+ \pi^0) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu \langle \pi^0 | S_\mu^+ | K^+ \rangle = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} B_\mu, \quad (163)$$

$$M(K^0 \rightarrow \nu l^+ \pi^-) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu \langle \pi^- | S_\mu^+ | K^0 \rangle = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu \cdot B_\mu, \quad (164)$$

т.е.

$$M(K^+ \rightarrow \nu l^+ \pi^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} M(K^0 \rightarrow \nu l^+ \pi^-). \quad (165)$$

Так как распад $\tilde{K}^0 \rightarrow \nu + l^+ + \pi^-$ запрещен в силу правила $\Delta S = \Delta Q$, то для распадов $K_{1,2}^0$ и $K_{1,2}^{\pm}$ -мезонов мы имеем амплитуды

$$M(K_{1,2}^0 \rightarrow \nu l^+ \pi^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} M(K_{1,2}^+ \rightarrow \nu l^+ \pi^-). \quad (166)$$

Итак, вероятности лептонных распадов K^+ -мезона и $K_{1,2}^0$ -мезонов связаны соотношением

$$W(K^+ \rightarrow \nu l^+ \pi^0) = W(K_{1,2}^0 \rightarrow \nu l^+ \pi^-). \quad (167)$$

Аналогично

$$W(K^- \rightarrow \bar{\nu} l^- \pi^0) = W(K_{1,2}^0 \rightarrow \bar{\nu} l^- \pi^+). \quad (168)$$

Эти соотношения вместе с CP -инвариантностью дают

$$W(K^+ \rightarrow \nu l^+ \pi^0) = W(K^- \rightarrow \bar{\nu} l^- \pi^0) = \frac{1}{2} W(K_{1,2}^0 \rightarrow \nu l^+ \pi^-, \bar{\nu} l^- \pi^+). \quad (169)$$

Соотношение типа (165) также имеет место для лептонных распадов Ξ -гиперона $\Xi \rightarrow \Sigma + l + \bar{\nu}$. В этих процессах ток S_μ дает вклад. Следовательно, мы должны рассмотреть матричный элемент этого тока

$$\langle \Sigma | S_\mu | \Xi \rangle = C_\mu \bar{\Sigma}_2^a \Xi_a. \quad (170)$$

Отсюда получаем

$$\langle \Sigma^+ | S_\mu | \Xi^0 \rangle = C_\mu \quad (171)$$

$$\langle \Sigma^0 | S_\mu | \Xi^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} C_\mu, \quad (172)$$

т.е.

$$M(\Xi^0 \rightarrow l \bar{\nu} \Sigma^+) = \sqrt{2} M(\Xi^- \rightarrow l \bar{\nu} \Sigma^0). \quad (173)$$

Применим теперь предложенную гипотезу об изотопических свойствах токов S_μ и S_μ^+ к изучению процессов рождения гиперонов при столкновении антинейтрино с нуклоном. В данном случае $\Delta S = -1$, и амплитуды рассматриваемых процессов содержат матричный элемент тока S_μ^+ между состояниями нуклона и гиперона. Например

$$\langle \Sigma | S_\mu^+ | N \rangle = A_\mu \bar{\Sigma}_1^a N_a. \quad (174)$$

Для конкретных процессов мы имеем:

$$M(\bar{\nu} p \rightarrow l^+ \Sigma^0) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{\nu} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} A_\mu, \quad (175)$$

$$M(\bar{\nu} n \rightarrow l^+ \Sigma^-) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{\nu} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu \cdot A_\mu. \quad (176)$$

Итак, мы имеем соотношение

$$\sigma(\bar{\nu} p \rightarrow l^+ \Sigma^0) = \frac{1}{2} \sigma(\bar{\nu} n \rightarrow l^+ \Sigma^-). \quad (177)$$

Аналогичное соотношение также имеется для сечения рождения барионных резонансов с $Y=1$,

$T=1$

$$\sigma(\bar{\nu} p \rightarrow l^+ Y^{*0}) = \frac{1}{2} \sigma(\bar{\nu} n \rightarrow l^+ Y^{*-}). \quad (177')$$

Отметим, что во всех рассмотренных процессах изотопический спин конечного состояния отличается от изотопического спина начального состояния на $\frac{1}{2}$. Выражая этот факт, мы говорим, что они удовлетворяют правилу $\Delta T = \frac{1}{2}$.

§ 3. Изотопические свойства нелептонных слабых взаимодействий

$$\text{с } \Delta S \neq 0$$

По аналогии с правилами $\Delta T = -1$ и $\Delta T = \frac{1}{2}$ для лептонных процессов слабых взаимодействий с $\Delta S = 0$ и $|\Delta S| = 1$ в нелептонных процессах имеет место также правило $\Delta T = \frac{1}{2}$, согласно которому части лагранжиана слабых взаимодействий, сопряженные друг другу (в силу эрмитовости лагранжиана) и соответствующие нелептонным процессам, преобразуются как компоненты изотопических спиноров с $T = \frac{1}{2}$ и $T_3 = \pm \frac{1}{2}$: $T_3 = \frac{1}{2}$ для процессов с $\Delta S = 1$ и $T_3 = -\frac{1}{2}$ для процессов с $\Delta S = -1$. Из этого предположения вытекают различные соотношения между амплитудами нелептонных распадов страных частиц.

В процессе распада К-мезона

$$K \rightarrow 2\pi$$

конечные состояния могут иметь только $T=0$ или 1 , в силу правила $\Delta T = \frac{1}{2}$. Однако два П-мезона находятся в S -состоянии, и пространственная функция симметрична. Следовательно, изотопическая волновая функция системы двух П-мезонов также симметрична, как это следует из обобщенного принципа Паули.

Нетрудно видеть, что

$$\pi_0^a(q_1) \pi_0^b(q_2) = \pi_0^a(q_2) \pi_0^b(q_1).$$

С другой стороны, в п. II, § 2 и § 3 мы получили тождество

$$\pi_0^a(q_1) \pi_0^b(q_2) (\tau_3)_a = -\pi_0^a(q_2) \pi_0^b(q_1) (\tau_3)_a.$$

Эти соотношения означают, что изотопическая волновая функция состояния с $T=0$ симметрична, а состояния с $T=1$ - антисимметрична. Таким образом, в распаде $K \rightarrow 2\pi$ конечные состояния должны иметь $T=0$ и, следовательно, распад $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ запрещен. Так как в распаде К-мезона $\Delta S = -1$ то $\Delta T_3 = +\frac{1}{2}$, и матричный элемент этого распада преобразуется как изотопический спинор с $T = \frac{1}{2}$, $T_3 = -\frac{1}{2}$

$$\langle 2\pi | \mathcal{L} | K \rangle = A \cdot \bar{\pi}_0^a(q_1) \bar{\pi}_0^b(q_2) K_2 \quad (178)$$

$$= A \left[\bar{\pi}_0^a(q_1) \bar{\pi}_0^b(q_2) + \bar{\pi}_0^b(q_1) \bar{\pi}_0^a(q_2) + \bar{\pi}_0^a(q_2) \bar{\pi}_0^b(q_1) \right] K^0.$$

Аналогичное выражение имеется также для распада \bar{K} -мезона. Таким образом, в силу правила $\Delta T = \frac{1}{2}$, должны выполняться соотношения

$$\frac{W(K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0)}{W(K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} = 0, \quad (179)$$

$$\frac{W(K_L^0 \rightarrow 2\pi^0)}{W(K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} = \frac{1}{2}. \quad (180)$$

Рассмотрим теперь распады гиперонов. Для этих процессов $\Delta S = 1$, их матричные элементы преобразуются как спиноры с $T = \frac{1}{2}$, $T_3 = \frac{1}{2}$. Например, матричные элементы распадов Λ -гиперона, Ξ -гиперона и Ω -гиперона имеют вид:

$$\langle \pi N | \mathcal{L} | \Lambda \rangle = A \bar{\pi}_a^2 \bar{N}^a \lambda = A \left(\bar{\pi}^+ \bar{p} - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\pi}^0 \bar{n} \right) \lambda, \quad (181)$$

$$\langle \pi \Lambda | \mathcal{L} | \Xi \rangle = B \bar{\pi}_a^2 \bar{\Lambda} \Xi_a = B \bar{\Lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\pi}^0 \Xi^0 + \bar{\pi}^- \Xi^- \right), \quad (181')$$

$$\langle \pi \Xi | \mathcal{L} | \Omega \rangle = C \bar{\pi}_a^2 \bar{\Xi}^a \Omega^- = C \left(\bar{\pi}^- \bar{\Xi}^0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\pi}^0 \bar{\Xi}^- \right) \Omega^-. \quad (181'')$$

Итак, имеют место соотношения

$$M(\lambda \rightarrow p \pi^-) = -\sqrt{2} M(\lambda \rightarrow n \pi^0), \quad (182)$$

$$M(\Xi^- \rightarrow \Lambda \pi^-) = \sqrt{2} M(\Xi^0 \rightarrow \Lambda \pi^0), \quad (182')$$

$$M(\Omega^- \rightarrow \Xi^0 \pi^-) = -\sqrt{2} M(\Omega^- \rightarrow \Xi^- \pi^0), \quad (182'')$$

т.е. вероятности распадов на π^- -мезон вдвое больше вероятностей распадов на π^0 -мезон, а все корреляционные эффекты одинаковы для всех распадов каждой частицы. Аналогично, матричный элемент распада Σ -гиперона равен

$$\langle \pi N | \mathcal{L} | \Sigma \rangle = A_1 \bar{N}^2 \bar{\pi}_a^a \Sigma_a^b + A_2 \bar{N}^a \bar{\pi}_a^b \Sigma_b^2, \quad (183)$$

т.е. зависит от двух произвольных констант A_1 и A_2 , так как в силу тождества

$$\pi_a^b \Sigma_b^c + \Sigma_a^b \pi_b^c = 2 \delta_a^c \pi_a^b \Sigma_b^a,$$

(аналогичное тождество получено в п. II, § 4 при изучении рассеяния π -мезона на нуклоне) третья возможная структура $\bar{N}^a \Sigma_a^b \pi_b^2$ линейно выражается через две другие. Для конкретных процессов мы имеем:

$$M(\Sigma^+ \rightarrow p \pi^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} A_2, \quad (184)$$

$$M(Z^+ \rightarrow n\pi^+) = A_1 + A_2, \quad (185)$$

$$M(Z^- \rightarrow n\pi^-) = A_2. \quad (186)$$

Итак, между амплитудами распадов Σ^- -гиперона имеет место соотношение

$$M(Z^+ \rightarrow n\pi^+) - M(Z^- \rightarrow n\pi^-) = \sqrt{2} M(Z^+ \rightarrow p\pi^0). \quad (187)$$

В заключение мы сделаем некоторые замечания по поводу правила $\Delta T = \frac{1}{2}$ в нелептонных распадах мезонов и гиперонов. Если лагранжиан слабых взаимодействий имеет вид произведения заряженных токов

$$\mathcal{L} = \frac{G}{\sqrt{2}} (j_\mu^+ + j_\mu^- + S_\mu) (j_\mu^+ + j_\mu^- + S_\mu)^+$$

то часть лагранжиана, отвечающая за нелептонные распады баркионов и мезонов, равна

$$\mathcal{L}' = \frac{G}{\sqrt{2}} (j_\mu^+ S_\mu^+ + S_\mu^- j_\mu^+).$$

Для того чтобы объяснить правило $\Delta T = \frac{1}{2}$, необходимо добавить к \mathcal{L}' произведение нейтральных токов. Действительно, если j_μ^+ и S_μ^- -токи V-A, образованные из волновых функций p , n и Λ , например, то

$$\mathcal{L}' = \frac{G'}{\sqrt{2}} \bar{p} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) n \cdot \bar{\Lambda} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) p + \text{с.с.}$$

Применяя преобразование Фирца, мы можем переписать \mathcal{L}' в виде

$$\mathcal{L}' = \frac{G'}{\sqrt{2}} \bar{p} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) p \cdot \bar{\Lambda} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) n + \text{с.с.}$$

Если к \mathcal{L}' добавить еще член, пропорциональный произведению нейтральных токов

$$\mathcal{L}'' = \frac{G'}{\sqrt{2}} \bar{n} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) n \cdot \bar{\Lambda} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) n + \text{с.с.},$$

то мы имеем:

$$\mathcal{L}' + \mathcal{L}'' = \frac{G'}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{p} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) p + \bar{n} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) n \right\} \bar{\Lambda} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) n + \text{с.с.} \quad (188)$$

Поскольку сумма в скобке в правой части (188) является изотопическим скаляром, то $\mathcal{L}' + \mathcal{L}''$ преобразуется при изотопических преобразованиях как волновая функция нейтрона, т.е. как изотопический спинор. Таким образом, в рамках теории без нейтральных токов мы не можем объяснить правило $\Delta T = \frac{1}{2}$, если не предположить какие-нибудь специальные динамические модели.

Цитированная литература

1. Г.А.Любарский, теория групп и ее применение в физике, Гостехиздат, 1957, глава XI.
2. И.М.Гельфанд, Р.А.Минлос и З.Я.Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, ГИФМЛ, 1958, глава II.
3. М.А.Наймарк, Линейные представления группы Лоренца, ГИФМЛ, 1958, глава II.
4. Е.Вигнер, Теория групп, ИЛ, 1961, глава ХУП.

Дополнительная литература

Изотопическая инвариантность сильных взаимодействий

1. М.А.Марков, Гипероны и K-мезоны, ГИФМЛ, 1958, часть II.
2. Г.Бете, Ф.Гофман, Мезоны и поля, ИЛ, 1957, том II, глава XXVII.
3. Р.Маршак, Э.Судерман, Введение в физику элементарных частиц, ИЛ, 1962, глава У.

Изотопические свойства электромагнитных и слабых взаимодействий

1. Р. Маршак, Э. Судерман, Введение в физику элементарных частиц, ИЛ, 1962, глава У.
2. Л.Б. Окунь, Слабое взаимодействие элементарных частиц, ГИФМЛ, 1963, §§ 7,6,9, 14.
3. M.Gell-Mann and A.H.Rosenfeld, Ann.Rev.Nucl.Sci., 7, 467 (1957).
4. K.M.Watson, Phys.Rev., 85, 852 (1952).
5. T.D.Lee and C.N.Yang, Phys.Rev., 119, 1414 (1960).
6. В.М. Шехтер, ЭТФ, 41, 1953 (1961).
7. Нгуен Ван Хьеу, ЭТФ, 45, 202 (1963).

Введение

В теории изотопической инвариантности элементарные частицы образуют изотопические мультиплеты, описываемые неприводимыми представлениями изотопической группы $SU(2)$. Векторы состояния частиц в некотором изотопическом мультиплете являются собственными векторами одного из трех инфинитезимальных операторов данного представления. В качестве этого оператора мы выбрали T_3 . Итак, частицы с разными зарядами в данном мультиплете характеризуются соответствующими собственными значениями одного из инфинитезимальных операторов. Иначе говоря, одно из квантовых чисел, характеризующих элементарные частицы - заряд связан с одним из генераторов группы симметрии. Как известно, в число квантовых чисел, определяющих данную частицу или систему частиц, кроме заряда, входят также гиперзаряд, барионное число и другие величины. Естественным обобщением изотопической инвариантности является теория симметрии, в которой каждый мультиплет может содержать частицы с разными зарядами, изотопическими спинами и гиперзарядами. Такая группа симметрии должна иметь некоторый генератор, связанный с гиперзарядом. Так как эта величина для каждой частицы имеет вполне определенное значение, то соответствующий оператор Y , диагональный вместе с T_3 , должен коммутировать с T_3 . Таким образом, естественным обобщением изотопической симметрии является симметрия некоторой группы, имеющей два коммутирующих генератора, один из которых может быть отождествлен с T_3 , а другой связан с гиперзарядом. С другой стороны, новая группа симметрии должна содержать изотопическую группу $SU(2)$ как подгруппу, если каждый изотопический мультиплет полностью лежит в некотором мультиплете новой симметрии. Таким образом, группа высшей симметрии, обобщающей изотопическую инвариантность, должна удовлетворять двум условиям:

- 1) она является группой второго ранга,
- 2) она содержит подгруппу $SU(2)$.

Одной из таких групп оказывается группа унитарной симметрии $SU(3)$, многие предсказания которой были подтверждены экспериментом. Целью этой главы является изучение общих свойств группы $SU(3)$ и её представлений. Полученные результаты затем применяются к изучению классификации элементарных частиц. В последующих главах будут рассмотрены экспериментальные следствия унитарной симметрии в процессах сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий.

§ I. Генераторы группы $SU(3)$

Как было показано в главе I, п. IV, § I, генераторами группы $SU(n)$ являются $n^2 - 1$ эрмитовых матриц $n \times n$ с нулевыми шпурами. Для группы $SU(3)$ такие генераторы могут быть выбраны следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ & & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

Они удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2if_{ijk} \lambda_k \quad (2)$$

Структурные константы f_{ijk} полностью антисимметричны по отношению к перестановкам индексов. Значения независимых отличных от нуля констант f_{ijk} равны

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{346} = f_{367} = \frac{1}{2},$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Коммутационные соотношения (2) полностью определяют структуру группы. В дальнейшем нам понадобятся также следующие соотношения для матриц λ_i :

$$\text{sp}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij} \quad (3)$$

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = 2d_{ijk} \lambda_k + \frac{4}{3} \delta_{ij} \quad (4)$$

где константы d_{ijk} полностью симметричны относительно перестановок индексов. Среди них независимыми ненулевыми оказываются

$$d_{146} = d_{157} = d_{256} = -d_{277} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = \frac{1}{2}.$$

Выбор генераторов в виде матриц (1) удобен тем, что эти матрицы аналогичны матрицам σ_i для группы $SU(2)$ и при изучении различных подгрупп $SU(2)$ группы $SU(3)$ сразу видно, какие матрицы к каким подгруппам относятся. В данном выборе λ_3 и λ_8 коммутируют и связаны с квантовыми числами частиц: зарядом и гиперзарядом. Нетрудно увидеть, что λ_1, λ_2 и λ_3 образуют алгебру Ли группы $SU(2)$. В дальнейшем эти генераторы будут отождествлены с генераторами изотопической группы. Тогда λ_3 связан с зарядом, а второй диагональный оператор λ_8 связан с гиперзарядом. При изучении изотопической инвариантности иногда удобно вместо σ_{\pm} и σ_3 пользоваться σ_{\pm} . По аналогии с этим мы положим

$$t_{\pm} = \frac{\lambda_1 \pm i\lambda_2}{2}, \quad u_{\pm} = \frac{\lambda_4 \pm i\lambda_5}{2}, \quad v_{\pm} = \frac{\lambda_6 \pm i\lambda_7}{2}, \quad t_3 = h_3 = \frac{1}{2}\lambda_3, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}y = h_2 = \frac{1}{2}\lambda_8. \quad (5)$$

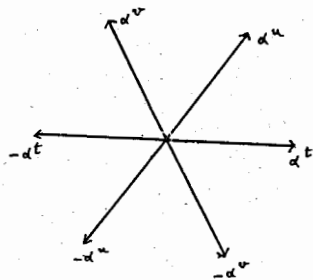
Мы имеем тогда коммутационные соотношения

$$[h_i, h_i] = 0, \quad [h_i, t_{\pm}] = \pm \alpha_i^{\pm} t_{\pm}, \quad [h_i, u_{\pm}] = \pm \alpha_i^{\pm} u_{\pm}, \quad [h_i, v_{\pm}] = \pm \alpha_i^{\pm} v_{\pm}, \quad i=1,2 \quad (6)$$

где

$$\alpha_i^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i^{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \alpha_i^{\pm} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Представим значения $\pm \alpha_i^{\pm}$, $\pm \alpha_i^{\pm}$, $\pm \alpha_i^{\pm}$ двумерными векторами с компонентами $\pm \alpha_1^{\pm}$, $\pm \alpha_2^{\pm}$ и $\pm \alpha_3^{\pm}$ на оси ox и oy , соответственно. Мы получаем так называемую корневую диаграмму группы $SU(3)$, а векторы с данными компонентами называем корнями



При изучении изотопической инвариантности мы видим, что среди изотопических преобразований зарядовая симметрия, соответствующая специальному преобразованию с матрицей

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

играет особую роль. Аналогом этого преобразования в группе $SU(3)$ является преобразование с матрицей

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме ε_t , можно ввести два других преобразования подобного типа, а именно

$$\varepsilon_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этих преобразованиях генераторы t_{\pm} , u_{\pm} и v_{\pm} группы $SU(3)$ трансформируются следующим образом:

$$\varepsilon_t t_{\pm} \varepsilon_t^{-1} = -t_{\mp}, \quad \varepsilon_t u_{\pm} \varepsilon_t^{-1} = -v_{\pm}, \quad \varepsilon_t v_{\pm} \varepsilon_t^{-1} = u_{\pm} \quad (8)$$

$$\varepsilon_u t_{\pm} \varepsilon_u^{-1} = -v_{\mp}, \quad \varepsilon_u u_{\pm} \varepsilon_u^{-1} = -u_{\mp}, \quad \varepsilon_u v_{\pm} \varepsilon_u^{-1} = t_{\mp}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_v t_{\pm} \varepsilon_v^{-1} = -u_{\pm}, \quad \varepsilon_v u_{\pm} \varepsilon_v^{-1} = t_{\pm}, \quad \varepsilon_v v_{\pm} \varepsilon_v^{-1} = -v_{\mp}, \quad (10)$$

а для операторов h_1 и h_2 мы имеем:

$$\varepsilon_t h_1 \varepsilon_t^{-1} = -h_1, \quad \varepsilon_t h_2 \varepsilon_t^{-1} = h_2, \quad (11)$$

$$\varepsilon_u h_1 \varepsilon_u^{-1} = \frac{1}{2}(h_1 - \sqrt{3}h_2), \quad \varepsilon_u h_2 \varepsilon_u^{-1} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}h_1 + h_2), \quad (12)$$

$$\varepsilon_v h_1 \varepsilon_v^{-1} = \frac{1}{2}(h_1 + \sqrt{3}h_2), \quad \varepsilon_v h_2 \varepsilon_v^{-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}h_1 - h_2). \quad (13)$$

Группа $SU(3)$ полностью определяется своими генераторами. Соотношения (8) - (13) показывают, что она полностью определяется заданием трех генераторов t_{\pm} и h_2 подгруппы $SU(2)$ и дискретных преобразований, соответствующих матрицам ε_u и ε_v . Смысл этих дискретных преобразований будет изучен подробно в § 6. При этом будем пользоваться коммутационными соотношениями между h_i и $\varepsilon_t, \varepsilon_u$ и ε_v

$$[h_i, \varepsilon_t] = -2\alpha_i^{\pm} \varepsilon_t (\alpha_i^{\pm} h_i), \quad [h_i, \varepsilon_u] = -2\alpha_i^{\pm} \varepsilon_u (\alpha_i^{\pm} h_i), \quad [h_i, \varepsilon_v] = -2\alpha_i^{\pm} \varepsilon_v (\alpha_i^{\pm} h_i), \quad (14)$$

или в векторном виде

$$[\vec{h}_i, \varepsilon_t] = -2\vec{\alpha}_i^{\pm} \varepsilon_t (\vec{\alpha}_i^{\pm} \vec{h}_i), \quad [\vec{h}_i, \varepsilon_u] = -2\vec{\alpha}_i^{\pm} \varepsilon_u (\vec{\alpha}_i^{\pm} \vec{h}_i), \quad [\vec{h}_i, \varepsilon_v] = -2\vec{\alpha}_i^{\pm} \varepsilon_v (\vec{\alpha}_i^{\pm} \vec{h}_i). \quad (14')$$

§ 2. Неприводимые представления группы $SU(3)$.

Теория представлений группы $SU(n)$ была изложена в первой главе, п. IV. Применяем теперь эти результаты к группе $SU(3)$. Спинорные индексы обозначаем через α, β и т.д. Так как каждый индекс принимает три значения, то не существует полностью антисимметричного спинора ранга больше 3, а полностью антисимметричные спиноры третьего ранга $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ и $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ являются инвариантами. Мы будем выбирать эти спиноры так, чтобы $\varepsilon_{123} = \varepsilon^{123} = 1$. При помощи этих спиноров можно превращать каждую пару антисимметричных верхних индексов в нижний индекс и каждую пару антисимметричных нижних индексов в верхний индекс

$$\psi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \psi^{[\beta\gamma]}, \quad \psi^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \psi_{[\beta\gamma]}. \quad (15)$$

Это означает, что все неприводимые представления группы $SU(3)$ можно рассматривать как спиноры, симметричные по всем верхним индексам и по всем нижним индексам и имеющие нулевые шпур. Неприводимое представление, соответствующее спинору с p верхними симметричными индексами и q нижними симметричными индексами, обозначим через $D(q, p)$. Так, например, $D(q, 0)$ соответствует ковариантному спинору ранга q , а $D(0, p)$ - контравариантному спинору ранга p .

Подсчитаем число независимых компонент ковариантного спинора ранга q . Если каждый индекс принимал бы только два значения, то число независимых компонент этого спинора было бы равно $q+1$, как это имеет место для группы $SU(2)$ (см. главу II, п. I, § I). В действительности, каждый индекс принимает три значения. Рассмотрим теперь только те компоненты,

для которых q' индексов принимает значения 1 и 2, а $q - q'$ остальных равны 3. Число таких компонент равно $q' + 1$. Так как q' меняется от нуля до q , то число всех компонент симметричного ковариантного спинора ранга q равно

$$N(q, 0) = \sum_{q'=0}^q (q'+1) = \frac{(q+1)(q+2)}{2}$$

Аналогично, число независимых компонент симметричного контравариантного спинора ранга p равно

$$N(0, p) = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

Рассмотрим теперь смешанный спинор ранга $p+q$, q раз ковариантный и p раз контравариантный $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_q \beta_1 \dots \beta_p}$. Число компонент такого спинора было бы равно

$$N(q, 0) \times N(0, p) = \frac{1}{4} (q+1)(q+2)(p+1)(p+2),$$

если все шпуры

$$\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_q \beta_1 \dots \beta_p} = \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_q \beta_1 \dots \beta_p}$$

были бы произвольными. Так как число таких шпуров равно числу компонент смешанного спинора ранга $p+q-2$, $(q-1)$ раз ковариантного и $(p-1)$ раз контравариантного, т.е. равно

$$N(q-1, 0) \times N(0, p-1) = \frac{1}{4} q(q+1)p(p+1),$$

то для неприводимого спинора ранга $p+q$, все шпуры которого равны нулю, мы имеем

$$\frac{1}{4} q(q+1)p(p+1)$$

условий. Итак, число независимых компонент неприводимого смешанного спинора, q раз ковариантного и p раз контравариантного, равно

$$N(q, p) = \frac{1}{4} (q+1)(q+2)(p+1)(p+2) - \frac{1}{4} q(q+1)p(p+1) = \frac{1}{2} (p+1)(q+1)(p+q+2).$$

Так, например,

$$N(1, 0) = 3, \quad N(0, 1) = 3, \quad N(1, 1) = 8, \quad N(3, 0) = 10, \quad N(0, 3) = 10, \quad N(2, 2) = 27.$$

Инфинитезимальные операторы представления, соответствующие генераторам $t_{\pm}, u_{\pm}, v_{\pm}$ и h_i , обозначаем через $T_{\pm}, U_{\pm}, V_{\pm}$ и H_i , соответственно, а инфинитезимальные операторы, соответствующие генераторам λ_i , - через Λ_i . Для ковариантного спинора первого ранга

$$(\Lambda_i)_{\alpha\beta} = (\lambda_i)_{\alpha\beta},$$

а для контравариантного спинора первого ранга

$$(\Lambda_i)_{\alpha\beta} = (\bar{\lambda}_i)_{\alpha\beta} = -(\lambda_i^T)_{\alpha\beta} = -(\lambda_i)_{\beta\alpha}.$$

Пользуясь формулами для инфинитезимальных операторов произведений представлений, данными в главе I (см. (82) и (83)), мы можем получить выражения инфинитезимальных операторов для любого представления. Если в пространстве $E_{q\bar{p}}$, преобразующемся по представлению

$$u \otimes \dots \otimes u \otimes u^* \otimes \dots \otimes u^*,$$

выберем ортонормированный базис $\frac{1}{2} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_q \beta_1 \dots \beta_p}$, то действие Λ_i на эти векторы выражается формулой

$$\Lambda_i \vec{e}_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \sum_{\alpha=1}^q (\lambda_i)_{\alpha\alpha'} \vec{e}_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha \dots \alpha' \dots \alpha_q} - \sum_{\alpha=1}^p (\lambda_i^T)_{\beta\beta'} \vec{e}_{\beta_1 \dots \beta' \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}. \quad (16)$$

Так как генераторы h_i диагональны, то соответствующие инфинитезимальные операторы H_i также диагональны. Обозначим число ковариантных индексов, равных 1, 2 и 3, через $q(1), q(2)$ и $q(3)$, соответственно, а число контравариантных индексов - через $p(1), p(2)$ и $p(3)$. Тогда из формулы (16) и конкретного вида матриц λ_i нетрудно увидеть, что базисный вектор с данными числами индексов, равных 1, 2 и 3, соответствует следующим собственным значениям операторов H_i :

$$H_1 \vec{e}_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \left\{ \frac{1}{2} [q(1) - p(1)] - \frac{1}{2} [q(2) - p(2)] \right\} \vec{e}_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}, \quad (17)$$

$$H_2 \vec{e}_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{3}} [q(1) - p(1)] + \frac{1}{2\sqrt{3}} [q(2) - p(2)] - \frac{1}{\sqrt{3}} [q(3) - p(3)] \right\} \vec{e}_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}. \quad (18)$$

Аналогичные соотношения также имеют место для канонического базиса неприводимых представлений.

Собственные значения операторов H_i мы будем рассматривать как компоненты двумерных векторов, которые называем весами. Изображая эти векторы на графике, мы получаем так называемую весовую диаграмму. Тогда базисные векторы с некоторым весом выражаются одной точкой на весовой диаграмме. Во многих случаях использование весовой диаграммы оказывается весьма удобным.

Произведение двух неприводимых представлений, вообще говоря, приводимо и разлагается на неприводимые представления. Рассмотрим некоторые примеры. Как известно, любой произвольный смешанный спинор вида ψ_{α}^{β} , преобразующийся по представлению $3 \otimes \bar{3}$, разлагается на сумму инвариантного спинора, пропорционального δ_{α}^{β} , и неприводимого спинора с нулевым шпуром (см. главу I, п. IV, формулу (II3))

$$\psi_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha}^{\beta} \chi^{\gamma}_{\gamma} + \left(\chi_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha}^{\beta} \chi^{\gamma}_{\gamma} \right).$$

Мы имеем, таким образом, закон

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$$

или

$$D(1, 0) \otimes D(0, 1) = D(0, 0) \oplus D(1, 1).$$

Если для получения неприводимых спиноров из произвольного смешанного спинора второго ранга следует вычесть шпур или образовать шпур, то для получения неприводимых спиноров из произвольного ковариантного или контравариантного спинора необходимо симметризовать или антисимметризовать индексы

$$\psi_{\alpha\beta} = \psi_{[\alpha\beta]} + \psi_{\{\alpha\beta\}} = \frac{1}{2} (\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2} (\psi_{\alpha\beta} - \psi_{\beta\alpha}).$$

Так как антисимметричный ковариантный спинор второго ранга эквивалентен контравариантному спинору первого ранга (см. соотношения (15)), то отсюда получаем закон умножения представлений

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$$

или

$$D(1,0) \otimes D(1,0) = D(2,0) \oplus D(0,1).$$

Аналогично

$$\bar{3} \otimes \bar{3} = \bar{6} \oplus 3$$

или

$$D(0,1) \otimes D(0,1) = D(0,2) \oplus D(1,0).$$

Приведем ещё несколько формул, которые мы можем получить таким же методом:

$$6 \otimes 3 = 8 \oplus 10,$$

$$D(2,0) \otimes D(1,0) = D(1,1) \oplus D(3,0),$$

$$\bar{6} \otimes \bar{3} = 8 \oplus \bar{10},$$

$$D(0,2) \otimes D(0,1) = D(1,1) \oplus D(0,3),$$

$$6 \otimes \bar{6} = 1 \oplus 8 \oplus 27,$$

$$D(2,0) \otimes D(0,2) = D(0,0) \oplus D(1,1) \oplus D(2,2),$$

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 27$$

$$D(1,1) \otimes D(1,1) = D(0,0) \oplus D(1,1) \oplus D(1,1) \oplus D(3,0) \oplus D(0,3) \oplus D(2,2)$$

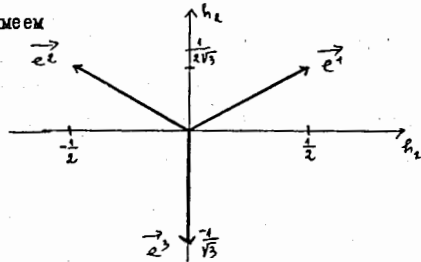
$$10 \otimes \bar{10} = 1 \oplus 8 \oplus 27 \oplus 64$$

$$D(3,0) \otimes D(0,3) = D(0,0) \oplus D(1,1) \oplus D(2,2) \oplus D(3,3).$$

§ 3. Некоторые спиноры низших рангов

Изучим теперь подробно некоторые простейшие неприводимые представления. Некоторые из этих представлений будут использованы в дальнейшем. По фундаментальному представлению $D(1,0)$ преобразуется трехмерное комплексное пространство E_1 с базисом \vec{e}^α , $\alpha = 1, 2, 3$.

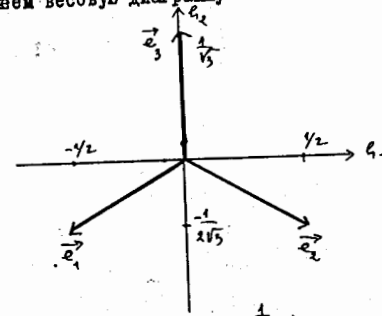
Векторы в этом пространстве являются ковариантными спинорами первого ранга с компонентами ψ_α . Каждый базисный вектор соответствует некоторому весу. Представляя эти векторы на весовой диаграмме, мы имеем



Из этой диаграммы сразу видно, что

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \vec{e}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \vec{e}^1, \quad \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \vec{e}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \vec{e}^2, \quad \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \vec{e}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \vec{e}^3. \quad (19)$$

Аналогично, для контраградиентного к фундаментальному представлению - контравариантного спинора первого ранга мы имеем весовую диаграмму



$$\text{и соответствующие уравнения} \quad \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \vec{e}_1, \quad \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \vec{e}_2, \quad \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \vec{e}_3. \quad (20)$$

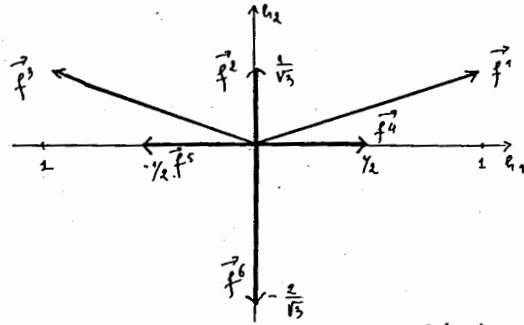
Рассмотрим теперь представление $D(2,0)$. Канонический базис этого представления получается из базиса $\vec{e}^{\alpha\beta}$ представления $U \otimes U$ путём симметризации индексов:

$$\vec{e}^{\{\alpha\beta\}} = \frac{\vec{e}^{\alpha\beta} + \vec{e}^{\beta\alpha}}{\|\vec{e}^{\alpha\beta} + \vec{e}^{\beta\alpha}\|}$$

Итак, в исходном базисе $\vec{e}^{\alpha\beta}$ шесть базисных векторов $\vec{e}^{\{\alpha\beta\}}$ представления $D(2,0)$ имеют следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} \vec{f}^1 = \vec{e}^{\{11\}} &: \quad \psi_{11} = 1, \\ \vec{f}^2 = \vec{e}^{\{12\}} &: \quad \psi_{12} = \psi_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \vec{f}^3 = \vec{e}^{\{22\}} &: \quad \psi_{22} = 1, \\ \vec{f}^4 = \vec{e}^{\{13\}} &: \quad \psi_{13} = \psi_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \vec{f}^5 = \vec{e}^{\{23\}} &: \quad \psi_{23} = \psi_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \vec{f}^6 = \vec{e}^{\{33\}} &: \quad \psi_{33} = 1. \end{aligned} \quad (21)$$

Из обеих формул (17) и (18) сразу видно, какими собственными значениями операторов H_2 соответствуют эти векторы. Мы имеем, таким образом, весовую диаграмму



Чтобы получить соответствующие результаты для представления $D(0,2)$, достаточно заменить нижние индексы на верхние и обратно, и менять знаки весов всех базисных векторов.

В дальнейшем будем часто пользоваться представлением $D(1,1)$, по которому преобразуется смешанный спинор второго ранга ψ_p^α с нулевым шпуром $\psi_\alpha^\alpha = 0$. Как известно, произвольный смешанный спинор второго ранга ψ_p^α разлагается в сумму спинора с нулевым шпуром и инвариантного спинора, пропорционального δ_p^α

$$\psi_p^\alpha = \left(\psi_p^\alpha - \frac{1}{3} \delta_p^\alpha \psi_\beta^\beta \right) + \frac{1}{3} \delta_p^\alpha \psi_\beta^\beta$$

Соответственно, пространство $E_{2,1}$ с базисом \vec{e}_p^α , преобразуемое по представлению $U \otimes U^*$, разлагается на два ортогональных подпространства. Инвариантный спинор δ_p^α принадлежит одномерному подпространству с базисом

$$\vec{\delta} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{e}_1^1 + \vec{e}_2^2 + \vec{e}_3^3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_p^\alpha \vec{e}_p^\alpha$$

В исходном базисе этот вектор имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\psi_1^1 = \psi_2^2 = \psi_3^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (22)$$

Базисные векторы во втором подпространстве, преобразуемые по представлению $D(1,1)$, ортогональны вектору (22). Очевидно, что базисные векторы \vec{e}_p^α с $\alpha \neq p$ удовлетворяют этому условию. Число этих векторов равно шести. Два остальных имеют вид линейных комбинаций векторов \vec{e}_1^1, \vec{e}_2^2 и \vec{e}_3^3 . Эти комбинации должны быть выбраны так, чтобы они были ортогональными вектору (22), нормированными и ортогональными друг к другу. Этим условиям удовлетворяют следующие комбинации:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1^1 - \vec{e}_2^2), \quad \frac{1}{\sqrt{6}} (\vec{e}_1^1 + \vec{e}_2^2 - 2\vec{e}_3^3)$$

Таким образом, базисы в пространстве $D(1,1)$ можно выбрать в виде

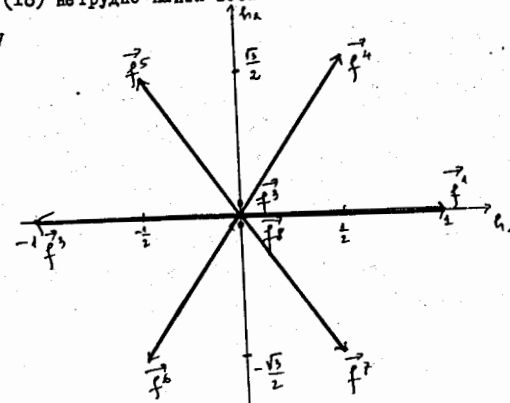
$$\vec{e}_1^1, \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1^1 - \vec{e}_2^2), \vec{e}_1^2, \vec{e}_2^1, \vec{e}_2^2, \vec{e}_2^3, \vec{e}_3^1, \vec{e}_3^2, \frac{1}{\sqrt{6}} (\vec{e}_1^1 + \vec{e}_2^2 - 2\vec{e}_3^3)$$

В исходном базисе эти векторы имеют следующие ненулевые компоненты

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \vec{e}_1^1 : \psi_1^1 = 1, \\ \vec{f}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1^1 - \vec{e}_2^2) : \psi_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \psi_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \vec{f}_3 &= \vec{e}_1^2 : \psi_1^2 = 1, \\ \vec{f}_4 &= \vec{e}_2^1 : \psi_2^1 = 1, \\ \vec{f}_5 &= \vec{e}_2^2 : \psi_2^2 = 1, \\ \vec{f}_6 &= \vec{e}_2^3 : \psi_2^3 = 1, \\ \vec{f}_7 &= \vec{e}_3^1 : \psi_3^1 = 1, \\ \vec{f}_8 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\vec{e}_1^1 + \vec{e}_2^2 - 2\vec{e}_3^3) : \psi_1^1 = \psi_2^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \psi_3^3 = -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

(23)

На основе формул (17) и (18) нетрудно найти веса этих векторов. В результате мы имеем следующую весовую диаграмму



Рассмотрим, наконец, представление $D(3,0)$, базис которого состоит из векторов

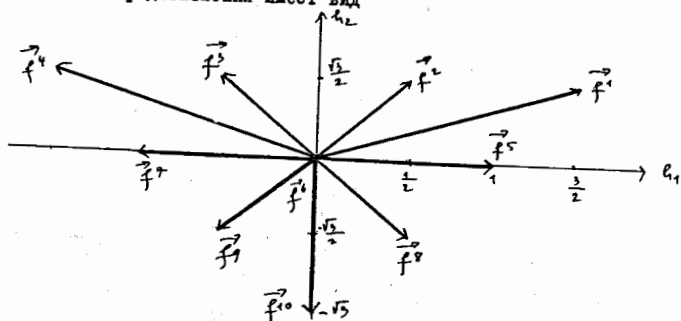
$$\vec{e} \{ \alpha p r \} = \frac{\sum \vec{e}^{\alpha p r}}{\rho(\alpha p r)} \parallel \frac{\sum \rho(\alpha p r) \vec{e}^{\alpha p r}}{\rho(\alpha p r)} \parallel$$

В исходном базисе эти векторы имеют следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \vec{e} \{ 111 \} : \psi_{111} = 1, \\ \vec{f}_2 &= \vec{e} \{ 211 \} : \psi_{211} = \psi_{121} = \psi_{112} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \vec{f}_3 &= \vec{e} \{ 221 \} : \psi_{221} = \psi_{212} = \psi_{122} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \vec{f}_4 &= \vec{e} \{ 222 \} : \psi_{222} = 1, \\ \vec{f}_5 &= \vec{e} \{ 113 \} : \psi_{113} = \psi_{131} = \psi_{311} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \vec{f}_6 &= \vec{e} \{ 313 \} : \psi_{313} = \psi_{133} = \psi_{132} = \psi_{312} = \psi_{321} = \psi_{213} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \\ \vec{f}_7 &= \vec{e} \{ 223 \} : \psi_{223} = \psi_{232} = \psi_{322} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \vec{f}_8 &= \vec{e} \{ 133 \} : \psi_{133} = \psi_{331} = \psi_{331} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \vec{f}_9 &= \vec{e} \{ 233 \} : \psi_{233} = \psi_{323} = \psi_{332} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\vec{f}_{10} = \vec{e}^{1333} \quad \chi_{333} = 1.$$

Весовая диаграмма данного представления имеет вид



Чтобы получить соответствующие результаты для представления $D(0,3)$ достаточно заменить верхние индексы на нижние и наоборот, и менять знак весов всех базисных векторов.

Отметим, что для построения рассмотренных неприводимых представлений можно применить метод, изложенный в главе I (см. п. III, § 4). Рассмотрим, например, представление $D(1,1)$. Очевидно, что базисный вектор \vec{e}_1^1 в пространстве E_{12} принадлежит этому представлению. Инфинитезимальные операторы Λ_i данного представления могут перевести этот вектор в остальные векторы (23) или их линейные комбинации. Действительно, мы имеем

$$T_+ \vec{e}_2^1 = \vec{e}_1^1 - \vec{e}_2^1, \quad T_- (\vec{e}_1^1 - \vec{e}_2^1) = 2\vec{e}_2^1,$$

$$V_+ \vec{e}_1^1 = \vec{e}_2^1, \quad T_+ \vec{e}_1^1 = -\vec{e}_2^1,$$

$$U_+ \vec{e}_2^1 = \vec{e}_1^1, \quad T_- \vec{e}_2^1 = -\vec{e}_1^1,$$

$$U_+ \vec{e}_1^1 = \vec{e}_2^1 - \vec{e}_3^1.$$

Мы получаем все векторы \vec{e}_β^1 с $\alpha \neq \beta$. Для векторов с $\alpha = \beta$ имеем две комбинации

$$\vec{e}_1^1 - \vec{e}_2^1, \quad \vec{e}_1^1 - \vec{e}_3^1.$$

Из них можно образовать две другие ортогональные комбинации, а именно

$$\vec{e}_1^1 - \vec{e}_2^1$$

$$\vec{e}_1^1 - \vec{e}_3^1 - \frac{1}{2}(\vec{e}_1^1 - \vec{e}_2^1) = \frac{1}{2}(\vec{e}_1^1 + \vec{e}_2^1 - 2\vec{e}_3^1).$$

Таким образом, все базисные векторы (23) получены.

§ 4. Подгруппы $SU(2)$

Группа $SU(3)$ содержит три различных подгруппы $SU(2)$. Каждая из них оставляет инвариантным один из трех базисных векторов трехмерного пространства, в котором действуют

все преобразования группы $SU(3)$. Нетрудно увидеть, что генераторами одной из таких подгрупп являются t_2 и t_3 . Эту подгруппу называем T-подгруппой. Другими подгруппами $SU(2)$ являются подгруппы с генераторами

$$u_2, \quad u_3 = \frac{1}{4}(\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8) \quad (25)$$

и

$$v_2, \quad v_3 = \frac{1}{4}(-\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8). \quad (26)$$

Их называем U-подгруппой и V-подгруппой, соответственно. Каждое неприводимое представление группы $SU(3)$ содержит различные неприводимые представления одной из этих подгрупп, причем неприводимые представления одной подгруппы не совпадают с неприводимыми представлениями других.

Генератор $t_2 = \frac{1}{2}\lambda_3$ коммутирует со всеми генераторами T-подгруппы. Следовательно, в каждом неприводимом представлении T-подгруппы инфинитезимальный оператор $H_2 = \frac{1}{2}\lambda_3$ кратен единице. Иначе говоря, все состояния одного T-мультиплета соответствуют одному и тому же собственному значению оператора H_2 или оператора

$$Y^t = \frac{2}{\sqrt{3}} H_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8. \quad (27)$$

Аналогично, оператор

$$Y^u = H_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} H_2 = \frac{1}{2} \lambda_3 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda_8 \quad (28)$$

коммутирует с генераторами U-подгруппы, а

$$Y^v = -(H_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} H_2) = -\frac{1}{2} \lambda_3 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda_8 \quad (29)$$

коммутирует с генераторами V-подгруппы. Для каждого неприводимого представления U-подгруппы (или V-подгруппы) Y^u (или Y^v) имеет вполне определенное значение.

Рассмотрим расщепление некоторых неприводимых представлений группы $SU(3)$ на неприводимые представления её подгрупп $SU(2)$. Начнём с фундаментального представления с базисом

\vec{e}^1, \vec{e}^2 и \vec{e}^3 . Так как t_2 и t_3 действуют только на \vec{e}^1 и \vec{e}^2

$$t_2 \vec{e}^1 = \vec{e}^1, \quad t_+ \vec{e}^2 = \vec{e}^1, \quad t_3 \vec{e}^1 = \frac{1}{2} \vec{e}^1, \quad t_3 \vec{e}^2 = -\frac{1}{2} \vec{e}^2,$$

$$t_2 \vec{e}^3 = t_3 \vec{e}^3 = 0,$$

то \vec{e}^1 и \vec{e}^2 образуют неприводимое представление T-подгруппы. Это - фундаментальное представление группы $SU(2)$. Вектор \vec{e}^3 является базисом одномерного представления. Иначе говоря, представление $D(1,0)$ расщепляется на T-спинор (с T-спином $\frac{1}{2}$) с базисом \vec{e}^1 и \vec{e}^2 и T-скаляр \vec{e}^3 (с T-спином 0). Аналогично, оно расщепляется на U-спинор (с U-спином $\frac{1}{2}$) с базисом \vec{e}^1 и \vec{e}^3 и U-скаляр \vec{e}^2 (с U-спином 0) или на V-спинор (с V-спином $\frac{1}{2}$) с базисом \vec{e}^2 и \vec{e}^3 и V-скаляр \vec{e}^1 (с V-спином 0). Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
 Y^t \vec{e}^{42} &= \frac{1}{2} \vec{e}^{42}, & Y^t \vec{e}^3 &= -\frac{2}{3} \vec{e}^3, \\
 Y^u \vec{e}^{43} &= \frac{1}{2} \vec{e}^{43}, & Y^u \vec{e}^2 &= -\frac{2}{3} \vec{e}^2, \\
 Y^v \vec{e}^{23} &= \frac{1}{2} \vec{e}^{23}, & Y^v \vec{e}^1 &= -\frac{2}{3} \vec{e}^1.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Для представления $D(0, 1)$ мы имеем такое же расщепление. В данном случае знаки в правых частях (30) следует заменить на обратные.

Для изучения расщеплений высших представлений весьма удобно пользоваться следующим методом. Выберем какой-нибудь базисный вектор, который принадлежит определенному неприводимому представлению некоторой подгруппы. Так как инфинитезимальные операторы этой подгруппы переводят этот вектор в остальные базисные векторы данного представления или их комбинации, то для получения базиса этого представления достаточно подействовать на выбранный вектор всеми инфинитезимальными операторами рассматриваемой подгруппы. Проиллюстрируем этот метод на примере представления $D(4, 1)$. Рассмотрим вектор \vec{e}_2^1 , соответствующий значениям $T_3 = 1$ и $Y^t = 0$. Если этот вектор не принадлежит определенному неприводимому представлению, то он имеет вид суммы двух или нескольких векторов, принадлежащих различным неприводимым представлениям. Все последние векторы должны быть собственными векторами операторов T_3 и Y^t с одними и теми же собственными значениями в силу условий $T_3 \vec{e}_2^1 = \vec{e}_2^1$ и $Y^t \vec{e}_2^1 = 0$. Однако \vec{e}_2^1 является единственным вектором со значениями $T_3 = 1$ и $Y^t = 0$. Следовательно, он должен принадлежать определенному неприводимому представлению. Действуем теперь на этот вектор всеми операторами T_{\pm} и T_3 . Мы получаем тогда базис представления с $T_3 = 1, Y^t = 0$

$$T = 1, Y^t = 0 : \quad \vec{e}_2^1, \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1^1 - \vec{e}_2^1), \vec{e}_2^2. \tag{31}$$

Аналогично, из \vec{e}_3^1 получаем T-спинор с $T = \frac{1}{2}$ и $Y^t = 1$

$$T = \frac{1}{2}, Y^t = 1 : \quad \vec{e}_3^1, \vec{e}_3^2, \tag{31'}$$

а из \vec{e}_1^3 получаем другой T-спинор

$$T = \frac{1}{2}, Y^t = -1 : \quad \vec{e}_2^3, \vec{e}_1^3. \tag{31''}$$

Последний вектор в (23)

$$T = 0, Y^t = 0 : \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{e}_1^1 + \vec{e}_2^2 - 2\vec{e}_3^3) \tag{31'''}$$

является T-скаляром с $T = 0, Y^t = 0$.

Аналогично, представление $D(4, 1)$ расщепляется на U-мультиплеты или V-мультиплеты следующим образом:

$$\begin{aligned}
 U = 1, Y^u = 0 : & \quad \vec{e}_3^1, \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1^1 - \vec{e}_2^1), \vec{e}_2^3, \\
 U = \frac{1}{2}, Y^u = 1 : & \quad \vec{e}_2^1, \vec{e}_2^2, \\
 U = \frac{1}{2}, Y^u = -1 : & \quad \vec{e}_3^2, \vec{e}_1^2, \\
 U = 0, Y^u = 0 : & \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{e}_1^1 + \vec{e}_2^2 - 2\vec{e}_3^3);
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 V = 1, Y^v = 0 : & \quad \vec{e}_3^2, \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1^2 - \vec{e}_2^2), \vec{e}_2^1, \\
 V = \frac{1}{2}, Y^v = 1 : & \quad \vec{e}_2^1, \vec{e}_2^2, \\
 V = \frac{1}{2}, Y^v = -1 : & \quad \vec{e}_3^1, \vec{e}_1^1, \\
 V = 0, Y^v = 0 : & \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{e}_1^2 + \vec{e}_2^3 - 2\vec{e}_1^1).
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Рассмотрим, наконец, представление $D(3, 0)$. Мы имеем следующие T-мультиплеты, U-мультиплеты и V-мультиплеты:

$$\begin{aligned}
 T = \frac{3}{2}, Y^t = 1 : & \quad \vec{e}^{\{111\}}, \vec{e}^{\{112\}}, \vec{e}^{\{122\}}, \vec{e}^{\{222\}}, \\
 T = 1, Y^t = 0 : & \quad \vec{e}^{\{113\}}, \vec{e}^{\{123\}}, \\
 T = \frac{1}{2}, Y^t = -1 : & \quad \vec{e}^{\{333\}}, \\
 T = 0, Y^t = -2 : & \quad \vec{e}^{\{333\}};
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 U = \frac{3}{2}, Y^u = 1 : & \quad \vec{e}^{\{111\}}, \vec{e}^{\{113\}}, \vec{e}^{\{333\}}, \\
 U = 1, Y^u = 0 : & \quad \vec{e}^{\{112\}}, \vec{e}^{\{132\}}, \vec{e}^{\{322\}}, \\
 U = \frac{1}{2}, Y^u = -1 : & \quad \vec{e}^{\{222\}}, \\
 U = 0, Y^u = -2 : & \quad \vec{e}^{\{333\}};
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
 V = \frac{3}{2}, Y^v = 1 : & \quad \vec{e}^{\{222\}}, \vec{e}^{\{223\}}, \vec{e}^{\{233\}}, \vec{e}^{\{333\}}, \\
 V = 1, Y^v = 0 : & \quad \vec{e}^{\{221\}}, \vec{e}^{\{231\}}, \vec{e}^{\{331\}}, \\
 V = \frac{1}{2}, Y^v = -1 : & \quad \vec{e}^{\{221\}}, \vec{e}^{\{311\}}, \\
 V = 0, Y^v = -2 : & \quad \vec{e}^{\{111\}}.
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

§ 5. Дискретные преобразования

В § I было показано, что задание T-подгруппы и дискретных преобразований, соответствующих матрицам ϵ_u и ϵ_v , эквивалентно заданию всей группы $SU(3)$. Аналогично, группа $SU(3)$ полностью определяется заданием U-подгруппы и дискретных преобразований ϵ_t, ϵ_u или заданием V-подгруппы и дискретных преобразований ϵ_t, ϵ_u . Чтобы выяснить смысл этих дискретных преобразований, мы будем пользоваться соотношениями (I4), или в векторном виде - (I4'). Пусть E_t, E_u и E_v - преобразования в пространствах неприводимых представлений, соответствующие преобразованиям ϵ_t, ϵ_u и ϵ_v группы $SU(3)$. Мы имеем тогда следующие коммутационные соотношения между этими операторами E_t, E_u и E_v и инфинитезимальными операторами H_i :

$$[H_i, E_t] = -2\alpha_i^t E_t(\alpha_k^t H_k), \quad [H_i, E_u] = -2\alpha_i^u E_u(\alpha_k^u H_k), \quad [H_i, E_v] = -2\alpha_i^v E_v(\alpha_k^v H_k), \tag{37}$$

или в векторном виде

$$[\vec{H}, E_t] = -2\vec{\alpha}^t E_t(\vec{\alpha}^t \vec{H}), \quad [\vec{H}, E_u] = -2\vec{\alpha}^u E_u(\vec{\alpha}^u \vec{H}), \quad [\vec{H}, E_v] = -2\vec{\alpha}^v E_v(\vec{\alpha}^v \vec{H}). \tag{37'}$$

Рассмотрим теперь результат действия преобразований E_t, E_u и E_v на собственные векторы $|\lambda_i\rangle$ операторов H_i . Здесь λ_i - собственные значения H_i . Мы имеем

или

$$\vec{H}|h_i\rangle = h_i|h_i\rangle \quad (38)$$

$$\vec{H}|h_i\rangle = \vec{h}|h_i\rangle \quad (38')$$

Тогда из (37') получаем, например,

$$\begin{aligned} \vec{H} E_t |h_i\rangle &= E_t \vec{H} |h_i\rangle - 2\vec{\alpha}^t E_t (\vec{\alpha}^t \vec{H}) |h_i\rangle = E_t \vec{h}|h_i\rangle - 2\vec{\alpha}^t E_t (\vec{\alpha}^t \vec{h}) |h_i\rangle \\ &= [\vec{h} - 2\vec{\alpha}^t (\vec{\alpha}^t \vec{h})] E_t |h_i\rangle \end{aligned}$$

т.е.

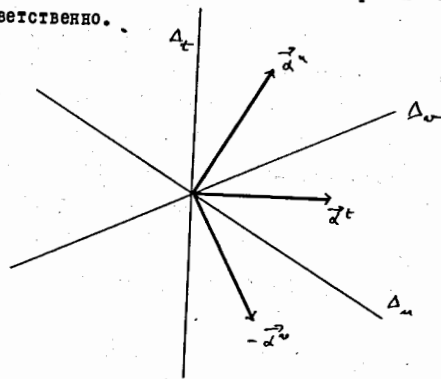
$$\vec{H} E_t |h_i\rangle = [\vec{h} - 2\vec{\alpha}^t (\vec{\alpha}^t \vec{h})] E_t |h_i\rangle \quad (39)$$

Таким образом, если $|h_i\rangle$ - собственный вектор оператора \vec{H} , соответствующий собственному значению h_i , то $E_t |h_i\rangle$ есть также собственный вектор этого оператора с собственным значением $h_i - 2\vec{\alpha}^t (\vec{\alpha}^t \vec{h})$. Так как $\vec{\alpha}^t \vec{\alpha}^t = 1$, то $(\vec{\alpha}^t \vec{h})$ равно проекции вектора \vec{h} на $\vec{\alpha}^t$. Следовательно, векторы \vec{h} и $\vec{h} - 2\vec{\alpha}^t (\vec{\alpha}^t \vec{h})$ имеют одну и ту же проекцию на ось, перпендикулярную к $\vec{\alpha}^t$, а их проекции на $\vec{\alpha}^t$ имеют противоположные знаки. Они переходят друг в друга при отражении относительно прямой Δ_t , перпендикулярной к $\vec{\alpha}^t$. Мы заключаем, таким образом, что если изобразить векторы состояния $|h_i\rangle$ посредством весовых векторов \vec{h} , то преобразование E_t является отражением относительно прямой Δ_t , перпендикулярной к $\vec{\alpha}^t$. Аналогично, мы имеем соотношения

$$\vec{H} E_u |h_i\rangle = [\vec{h} - 2\vec{\alpha}^u (\vec{\alpha}^u \vec{h})] E_u |h_i\rangle, \quad (39')$$

$$\vec{H} E_v |h_i\rangle = [\vec{h} - 2\vec{\alpha}^v (\vec{\alpha}^v \vec{h})] E_v |h_i\rangle, \quad (39'')$$

означающие, что E_u и E_v являются отражениями относительно прямых Δ_u и Δ_v , перпендикулярных к $\vec{\alpha}^u$ и $\vec{\alpha}^v$, соответственно.



Три рассмотренные подгруппы $SU(2)$ можно рассматривать как группы вращений в трехмерных пространствах T-спина, U-спина и V-спина. Во второй главе (п.П, § I) мы показали, что E_t является вращением на угол π вокруг второй оси в трехмерном пространстве

T-спина. Это преобразование называем T-зарядовой симметрией. Аналогично, E_u и E_v являются вращениями на угол π вокруг вторых осей в трехмерных пространствах U-спина и V-спина, соответственно. Их называем U-зарядовой симметрией и V-зарядовой симметрией.

Кроме трех рассмотренных зарядовых симметрий существует ещё одно дискретное преобразование: отражение относительно начала координат на весовой диаграмме. Это отражение называем R-преобразованием. В R-преобразовании веса всех векторов состояний меняют знак $\vec{h} \rightarrow -\vec{h}$, и каждое представление переходит в свое контраградиентное:

$$R D(\lambda, \mu) = D(\lambda, \mu), \quad (40)$$

$$R \begin{matrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \mu_1 & \dots & \mu_n \end{matrix} = \begin{matrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ -\mu_1 & \dots & -\mu_n \end{matrix}, \quad |\mu| = 1$$

Если $\mu \neq 1$, то представление $D(\lambda, \mu)$ переходит при R-преобразовании в другое представление $D(\lambda, \mu)$, и только представления типа $D(\lambda, 1)$ переходят в себя. Очевидно, что R-преобразование не является элементом группы $SU(3)$, в то время как зарядовые симметрии входят в группу $SU(3)$.

II. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И РЕЗОНАНСОВ В УНИТАРНОЙ СИММЕТРИИ

§ I. УНИТАРНЫЕ МУЛЬТИПЛЕТЫ

Применим полученные результаты к изучению классификации элементарных частиц и резонансов. Мы постулируем, что элементарные частицы и резонансы образуют унитарные мультиплеты, описываемые неприводимыми представлениями группы $SU(3)$. Далее предполагаем, что генераторы группы $SU(3)$ коммутируют с генераторами однородной группы Лоренца, а также с отражениями пространства - времени. Тогда, в силу леммы Шура (см. главу I, п.Ш, § 4), все частицы в одном унитарном мультиплете имеют одинаковые спин и чётность. Группа $SU(3)$ содержит три подгруппы $SU(2)$. Одна из этих подгрупп, а именно T-подгруппа, будет рассмотрена как изотопическая группа. В I, § 4 было изучено расщепление некоторых унитарных мультиплетов на мультиплеты её подгруппы $SU(2)$. В частности, формулы (3I) - (3I'') и (34) показывают, какие изотопические мультиплеты содержатся в унитарном октуплете (т.е. в представлении $D(1, 1)$) и в унитарном декуплете (т.е. в представлении $D(3, 0)$).

Рассмотрим сначала унитарный октуплет. Он состоит из изотопического триплета с $Y^t = 0$, двух изотопических дублетов с $Y^t = \pm 1$ и изотопического синглета с $Y^t = 0$. С другой стороны, существуют восемь псевдоскалярных мезонов и восемь баркионов со спином и чётностью $\frac{1}{2}^+$, образующих также те же изотопические мультиплеты:

$$\begin{aligned}
T=1, Y=0 &: \quad \pi^+, \pi^0 \quad \sim \quad \Sigma^+, \Sigma^0, \\
T=\frac{1}{2}, Y=1 &: \quad K^+, K^0 \quad \sim \quad \rho^+, \rho^0, \\
T=\frac{1}{2}, Y=-1 &: \quad \bar{K}^0, K^- \quad \sim \quad \bar{\Sigma}^0, \Sigma^-, \\
T=0, Y=0 &: \quad \eta \quad \sim \quad \lambda.
\end{aligned}$$

Следовательно, естественно предположить, следуя Гелл-Манну и Неману, что эти мезоны и эти барионы образуют унитарные октететы. Для этих мультиплетов $Y^t = Y$. Однако это ещё не означает, что инфинитезимальный оператор Y^t может быть отождествлен с оператором гиперзаряда Y для любого мультиплета. Действительно, для некоторого неприводимого представления, например, фундаментального представления Y^t и Y могут быть связаны следующим образом:

$$Y = a Y^t + b I,$$

где I - единичный оператор, а a и b - константы.

Мы требуем, чтобы частицы и античастицы преобразовывались по неприводимым представлениям, контраградиентным друг к другу. Тогда для представления, контраградиентного к фундаментальному, мы имеем

$$Y = a \tilde{Y}^t - b \tilde{I}, \quad \tilde{Y}^t = -(Y^t)^T,$$

где \tilde{I} - единичный оператор для рассматриваемого представления.

Пусть теперь Y_1 и Y_2 - операторы гиперзаряда для двух представлений. Тогда для представления, являющегося произведением этих представлений, оператор гиперзаряда имеет вид

$$Y = Y_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes Y_2.$$

Иначе говоря, операторы гиперзаряда для произведений представлений определяются так же как инфинитезимальные операторы произведений представлений (см. главу I, формула (83)). В частности, для представления $D(1, 1)$ мы имеем

$$Y = (a Y^t + b I) \otimes \tilde{I} + I \otimes (a \tilde{Y}^t - b \tilde{I}) = a (Y^t \otimes \tilde{I} + I \otimes \tilde{Y}^t) = a Y^t.$$

Аналогично можно показать, что для представлений $D(q, p)$ с $q = p$ оператор гиперзаряда Y пропорционален инфинитезимальному оператору Y^t

$$Y = a Y^t.$$

Это соотношение в действительности имеет место для унитарного октетета, если $a = 1$. Таким образом, если мы требуем, чтобы восемь псевдоскалярных мезонов и восемь барионов $\frac{1}{2}^+$ образовывали унитарные мультиплеты, то для фундаментального и контраградиентного к нему представления гиперзаряд Y связан со вторым диагональным генератором соотношениями

$$Y = Y^t + b I \quad (4I)$$

$$Y = \tilde{Y}^t - b \tilde{I}, \quad (4I')$$

соответственно.

Чтобы определить константу b , необходимо рассмотреть представления $D(q, p)$ с $q \neq p$.

Мы имеем тогда:

$$Y = Y^t + b(q-p)I. \quad (42)$$

В частности, для унитарного декуплета $q=3, p=0$

$$Y = Y^t + 3bI.$$

Унитарный декуплет содержит следующие изотопические мультиплеты (см. (34)): $T=\frac{3}{2}$ и $Y^t=1$; $T=1$ и $Y^t=0$, $T=\frac{1}{2}$ и $Y^t=-1$, $T=0$ и $Y^t=2$. С другой стороны, существуют барионные резонансы со спином и чётностью $\frac{3}{2}^+$, которые могут быть отождествлены с тремя изотопическими мультиплететами с $T=\frac{3}{2}, 1$ и $\frac{1}{2}$ из декуплета. Это Δ -резонанс с $T=\frac{3}{2}, Y=1$, Y^* -резонанс с $T=1$ и $Y=0$, Ξ^* -резонанс с $T=\frac{1}{2}$ и $Y=-1$. Если эти резонансы образуют унитарный декуплет, то для этого мультиплета мы имеем также $Y = Y^t$. Отсюда следует, что $b=0$. Кроме того, должен существовать некоторый барион с $T=0$ и $Y=-2$. Это - недавно обнаруженный Ω^- -гиперон.

Таким образом, классификация известных псевдоскалярных мезонов или барионов $\frac{1}{2}^+$ в унитарной симметрии требует, чтобы гиперзаряд Y был связан с инфинитезимальным оператором Y^t соотношением (42), где b - произвольная константа. Если барионные резонансы $\frac{3}{2}^+$ образуют унитарный декуплет, то $b=0$, и для любых представлений инфинитезимальный оператор Y^t является оператором гиперзаряда.

Рассмотрим теперь произвольный мультиплет. Из формул (18) и (27) следует, что базисный вектор $\vec{e}_{p_1 \dots p_r}^{q_1 \dots q_r}$ описывает состояние с гиперзарядом, равным $\frac{1}{3} \{ [q(1) - p(1)] + [q(2) - p(2)] - 2[q(3) - p(3)] \}$

$$Y \vec{e}_{p_1 \dots p_r}^{q_1 \dots q_r} = \frac{1}{3} \{ [q(1) - p(1)] + [q(2) - p(2)] - 2[q(3) - p(3)] \} \vec{e}_{p_1 \dots p_r}^{q_1 \dots q_r} \quad (43)$$

где $q(i)$, $q(2)$ и $q(3)$ - числа ковариантных индексов, равных 1, 2 и 3, соответственно, а $p(1)$, $p(2)$ и $p(3)$ - числа контравариантных индексов. Так как для каждого мультиплета суммы $q(1) + q(2) + q(3) = q$ и $p(1) + p(2) + p(3) = p$ полностью определены, то $q(i)$ увеличивается на единицу, например, если $q(3)$ уменьшается на единицу. Из формулы (43) следует, что тогда гиперзаряд увеличивается на единицу. Поэтому в каждом унитарном мультиплете Y принимает максимальное значение, если $q(1) + q(2) = q$,

$q(3) = 0$, $p(1) = p$, $p(2) + p(3) = 0$. Это максимальное значение равно

$$Y_{\max} = \frac{q}{3} + \frac{2p}{3}.$$

Аналогично, минимальное значение Y_{\min} равно

$$Y_{\min} = -\left(\frac{p}{3} + \frac{2q}{3}\right).$$

Итак, в каждом мультиплете гиперзаряд принимает значения

$$-\frac{2q+p}{3}, -\frac{2q+p}{3} + 1, \dots, \frac{2q+p}{3} - 1, \frac{2q+p}{3}.$$

Перепишем Y_{\max} в виде

$$Y_{\max} = q + \frac{2}{3}(p-q).$$

Очевидно, что гиперзаряд принимает целочисленные значения, только если $p-q = 3n$, где n - целые числа. Все частицы в мультиплетах с $p-q \neq 3n$ имеют дробные гиперзаряды и, следовательно, дробные заряды. В частности, частицы в унитарном триплете, осуществляющем фундаментальное представление, имеют гиперзаряды $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ и заряды $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$, соответственно.

В заключение отметим, что для описания октуплета иногда удобно вместо спинора ψ_β^α с $\psi_\alpha^\alpha = 0$ ввести восьмимерный вектор O_i :

$$\psi_\beta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)_\beta^\alpha O_i \quad (44)$$

Тогда из (3) получаем обратное соотношение

$$O_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_\beta^\alpha (\lambda_i)_\alpha^\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sp} (\psi \lambda_i) \quad (45)$$

§ 2. Мультиплеты подгруппы $SU(2)$ и дискретные преобразования

Каждый унитарный мультиплет содержит различные мультиплеты подгруппы $SU(2)$. Расщепление унитарных октуплета и декуплета на изотопические мультиплеты, т.е. мультиплеты T-подгруппы, было дано в § I.

Октуплет барионов $\frac{1}{2}^+$, например, содержит следующие изотопические мультиплеты (см. (31) - (31'''))

$$\begin{aligned} T=1, Y=0: & \quad \Sigma^+ = \vec{e}_1^+, \quad \Sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1^+ - \vec{e}_2^+), \quad \Sigma^- = \vec{e}_2^+, \\ T=\frac{1}{2}, Y=1: & \quad \rho = \vec{e}_3^+, \quad n = \vec{e}_3^+, \\ T=\frac{1}{2}, Y=-1: & \quad \bar{\Sigma}^0 = \vec{e}_2^-, \quad \bar{\Sigma}^- = \vec{e}_1^-, \\ T=0, Y=0: & \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{6}} (\vec{e}_1^+ + \vec{e}_2^+ - 2\vec{e}_3^+), \end{aligned} \quad (46)$$

а декуплет содержит следующие изотопические мультиплеты (см. (34))

$$\begin{aligned} T=\frac{3}{2}, Y=1: & \quad \Delta^{++} = \vec{e}^{1111}, \quad \Delta^+ = \vec{e}^{1112}, \quad \Delta^0 = \vec{e}^{1122}, \quad \Delta^- = \vec{e}^{1222}, \\ T=1, Y=0: & \quad \gamma^{*+} = \vec{e}^{1123}, \quad \gamma^{*0} = \vec{e}^{1123}, \quad \gamma^{*-} = \vec{e}^{1223}, \\ T=\frac{1}{2}, Y=-1: & \quad \bar{\Sigma}^{*0} = \vec{e}^{1333}, \quad \bar{\Sigma}^{*-} = \vec{e}^{1233}, \\ T=0, Y=-2: & \quad \Omega^- = \vec{e}^{3333}. \end{aligned} \quad (47)$$

Отметим, что мы должны ввести знак минус перед \vec{e}_i^+ , так как в теории изотопической инвариантности мы условились рассматривать \vec{e}_i^0 и \vec{e}_i^+ как компоненты ковариантного спинора

$$\vec{e}_1^+ = \vec{e}_1^0, \quad \vec{e}_2^+ = \vec{e}_2^0,$$

а в формуле (46) состояния с $T = \frac{1}{2}, Y = -1$ являются компонентами контравариантного спинора

$$\vec{e}_\alpha^- = \epsilon_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta^+,$$

т.е.

$$\vec{e}_\alpha^- = \vec{e}_\alpha^+, \quad \vec{e}_\alpha^- = -\vec{e}_\alpha^+ = -\vec{e}_\alpha^+.$$

Из формул (46) и (47) можно получить компоненты спинора, описывающего какую-нибудь частицу. Так например, для Σ^0 мы имеем $\psi_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \psi_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, все остальные компоненты равны нулю, а единственной ненулевой компонентой спинора, описывающего протон, является $\psi_1^3 = 1$. Иногда удобно представить октуплет барионов в виде матрицы

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & \rho \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & n \\ -\bar{\Sigma}^+ & \bar{\Sigma}^0 & -\frac{\Sigma^-}{\sqrt{2}} \lambda \end{pmatrix} \quad (48)$$

по аналогии с представлением изотопических триплетов в виде матриц 2×2 . Для октуплета псевдоскалярных мезонов мы имеем такую же матрицу

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ -K^- & \bar{K}^0 & -\frac{\eta}{\sqrt{6}} \eta \end{pmatrix} \quad (49)$$

Так как мультиплеты частиц и античастиц описываются контраградиентными друг к другу представлениями, то для антибарионов мы имеем матрицу

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{\Lambda}^0}{\sqrt{6}} & \bar{\Sigma}^- & \bar{\Sigma}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & -\frac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{\Lambda}^0}{\sqrt{6}} & \bar{\Sigma}^0 \\ \bar{\rho} & \tilde{n} & -\frac{\tilde{\Lambda}^0}{\sqrt{6}} \tilde{\lambda} \end{pmatrix} \quad (50)$$

Рассмотрим теперь расщепление унитарного октуплета и декуплета на мультиплеты U - и V -спиноров. Октуплет расщепляется согласно формулам (32) и (33). Для идентификации базисных векторов мультиплетов U -спина и V -спина в этих формулах необходимо комбинации

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1^+ - \vec{e}_2^+), \quad \frac{1}{\sqrt{6}} (\vec{e}_1^+ + \vec{e}_2^+ - 2\vec{e}_3^+)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_2^+ - \vec{e}_3^+), \quad \frac{1}{\sqrt{6}} (\vec{e}_2^+ + \vec{e}_3^+ - 2\vec{e}_1^+)$$

выразить через базисные векторы (31)-(31''') изотопических мультиплетов, т.е. через физические векторы состояния частиц. Мы имеем для октуплета барионов $\frac{1}{2}^+$, например,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1^+ - \vec{e}_2^+) &= \frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda, \\ \frac{1}{\sqrt{6}} (\vec{e}_1^+ + \vec{e}_2^+ - 2\vec{e}_3^+) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma^0 - \frac{1}{2} \lambda, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_2^+ - \vec{e}_3^+) = -\frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda,$$

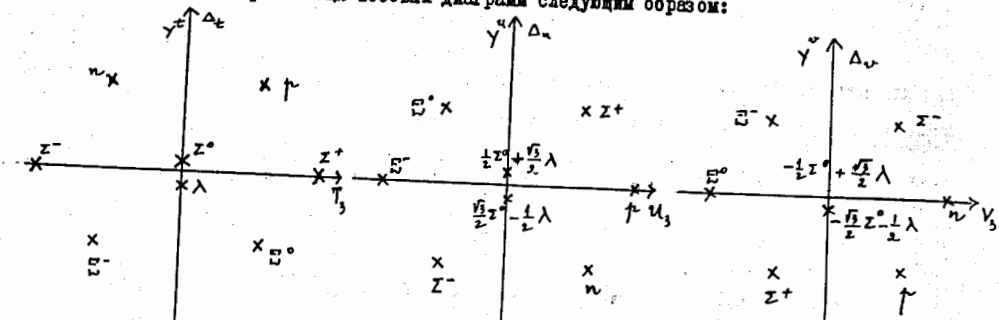
$$\frac{1}{\sqrt{6}} (\vec{e}_2^+ + \vec{e}_3^+ - 2\vec{e}_1^+) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma^0 - \frac{1}{2} \lambda.$$

Из соотношений (32), (33), (46) и (51) мы получаем связь между мультиплетами T-спина, U -спина и V -спина, содержащимися в октуплете барионов $\frac{1}{2}^+$:

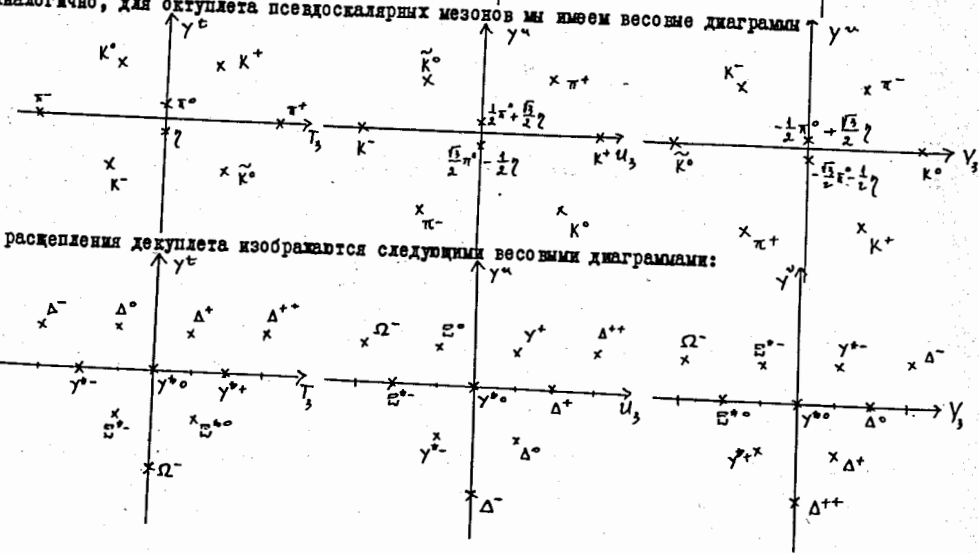
$$\begin{aligned}
 U=1, Y^0=0: & \quad \rho, \frac{1}{2}Z^0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, -E^-, \\
 U=\frac{1}{2}, Y^0=1: & \quad Z^+, E^-, \\
 U=\frac{1}{2}, Y^0=-1: & \quad n, Z^-, \\
 U=0, Y^0=0: & \quad \frac{\sqrt{3}}{2}Z^0 - \frac{1}{2}\lambda;
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
 V=1, Y^0=0: & \quad n, -\frac{1}{2}Z^0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, E^-, \\
 V=\frac{1}{2}, Y^0=1: & \quad Z^-, -E^-, \\
 V=\frac{1}{2}, Y^0=-1: & \quad \rho, Z^+, \\
 V=0, Y^0=0: & \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}Z^0 - \frac{1}{2}\lambda.
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

Расщепления октуплета барионов $\frac{1}{2}^+$ на мультиплеты T-спина, U-спина и V-спина можно изобразить графически при помощи весовых диаграмм следующим образом:



Аналогично, для октуплета псевдоскалярных мезонов мы имеем весовые диаграммы



а расщепления декуплета изображаются следующими весовыми диаграммами:

В каждой весовой диаграмме частицы, лежащие на одной и той же горизонтальной прямой, принадлежат одному и тому же мультиплету соответствующей подгруппы $SU(2)$.

Рассмотрим, наконец, дискретные преобразования E_+ , E_u , E_v . Мы показали, что в T-зарядовой симметрии E_+ векторы состояния частиц преобразуются следующим образом:
 $\rho \rightarrow n, n \rightarrow -\rho, Z^+ \rightarrow -Z^+, Z^0 \rightarrow -Z^0, E^+ \rightarrow -E^+, E^0 \rightarrow E^0, E^- \rightarrow E^-, \lambda \rightarrow \lambda,$
 $K^+ \rightarrow K^0, K^0 \rightarrow -K^+, \pi^+ \rightarrow -\pi^+, \pi^0 \rightarrow -\pi^0, K^+ \rightarrow -K^-, K^- \rightarrow K^0, Z \rightarrow Z,$
 $\Delta^{++} \rightarrow \Delta^+, \Delta^+ \rightarrow -\Delta^+, \Delta^0 \rightarrow \Delta^+, \gamma^+ \rightarrow -\gamma^+, \gamma^0 \rightarrow -\gamma^0, \gamma^- \rightarrow \gamma^+, \gamma^0 \rightarrow \gamma^0, \Omega^- \rightarrow \Omega^-, \Omega^0 \rightarrow \Omega^0, \Omega^+ \rightarrow \Omega^+ \tag{54}$

Аналогично, при U-зарядовой симметрии

$$\begin{aligned}
 Z^+ \rightarrow E^+, E^+ \rightarrow -Z^+, \rho \leftrightarrow E^-, \left(\frac{1}{2}Z^+ + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right) \rightarrow -\left(\frac{1}{2}Z^+ + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right), n \rightarrow Z^-, Z^- \rightarrow -n, \left(\frac{\sqrt{3}}{2}Z^0 - \frac{1}{2}\lambda\right) \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}Z^0 - \frac{1}{2}\lambda\right), \\
 \pi^+ \rightarrow \tilde{K}^+, \tilde{K}^+ \rightarrow -\pi^+, K^+ \rightarrow -K^-, \left(\frac{1}{2}\pi^+ + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right) \rightarrow -\left(\frac{1}{2}\pi^+ + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right), K^+ \rightarrow \pi^+, \pi^+ \rightarrow -K^+, \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi^+ - \frac{1}{2}\lambda\right) \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi^+ - \frac{1}{2}\lambda\right), \\
 \Delta^{++} \rightarrow \Omega^-, \Omega^- \rightarrow -\Delta^{++}, \gamma^+ \rightarrow -E^+, E^+ \rightarrow \gamma^+, \Delta^+ \leftrightarrow -E^+, \gamma^0 \rightarrow -\gamma^0, \Delta^0 \rightarrow \gamma^+, \gamma^+ \rightarrow -\Delta^+, \Delta^- \rightarrow \Delta^-, \tag{55}
 \end{aligned}$$

а при V-зарядовой симметрии

$$\begin{aligned}
 Z^+ \rightarrow -E^+, E^+ \rightarrow Z^-, n \leftrightarrow -E^-, \left(-\frac{1}{2}Z^+ + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right) \rightarrow -\left(-\frac{1}{2}Z^+ + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right), \rho \rightarrow Z^+, Z^+ \rightarrow -\rho, \left(\frac{\sqrt{3}}{2}Z^0 + \frac{1}{2}\lambda\right) \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}Z^0 + \frac{1}{2}\lambda\right), \\
 \pi^+ \rightarrow -K^-, K^- \rightarrow \pi^+, K^0 \leftrightarrow -\tilde{K}^0, \left(-\frac{1}{2}\pi^+ + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right) \rightarrow -\left(-\frac{1}{2}\pi^+ + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right), K^+ \rightarrow \pi^+, \pi^+ \rightarrow -K^+, \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi^+ + \frac{1}{2}\lambda\right) \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi^+ + \frac{1}{2}\lambda\right), \\
 \Delta^- \rightarrow \Omega^-, \Omega^- \rightarrow -\Delta^-, \gamma^+ \rightarrow -E^+, E^+ \rightarrow \gamma^+, \Delta^0 \leftrightarrow -E^+, \gamma^0 \rightarrow -\gamma^0, \Delta^+ \rightarrow \gamma^+, \gamma^+ \rightarrow -\Delta^+, \tag{56} \\
 \Delta^{++} \rightarrow \Delta^{++}.
 \end{aligned}$$

Мы показали, что эти преобразования являются отражениями относительно прямых, перпендикулярных к корням $\vec{\alpha}^t$, $\vec{\alpha}^u$ и $\vec{\alpha}^v$. На соответствующих весовых диаграммах они являются отражениями относительно осей ординат Y^u , Y^v и Y^w , соответственно.

Что касается R-преобразования, то оно переводит представление $D(3,0)$, например, в представление $D(0,3)$, т.е. переводит унитарный декуплет барионных резонансов $\frac{1}{2}^+$ в некоторый "сопряженный" декуплет, содержащий такие же изотопические мультиплеты, что и обычный декуплет, но с обратными гиперзарядами. Такого мультиплета до сих пор ещё не было обнаружено. Так как R-преобразование превращает верхние индексы в нижние и обратно, то октуплеты барионов $\frac{1}{2}^+$ и псевдоскалярных мезонов преобразуются следующим образом:

$$R B_p^{\alpha} R^{-1} = \gamma_B^R B_{\alpha}^p, \quad R P_p^{\alpha} R^{-1} = \gamma_P^R P_{\alpha}^p, \quad |\gamma_B^R| = |\gamma_P^R| = 1. \tag{57}$$

Отметим, что мезонные мультиплеты, описываемые представлениями $D(1,1)$ с $q=\rho$, пере-

ходят в себя при зарядовом сопряжении. Так, для октетета псевдоскалярных мезонов мы имеем:

$$\pi^+ \leftrightarrow \pi^-, \quad \pi^0 \leftrightarrow \pi^0, \quad K^+ \leftrightarrow K^-, \quad K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0, \quad \eta \leftrightarrow \eta,$$

т.е.

$$C P_\rho^\alpha C^{-1} = P_\alpha^\rho, \quad (58)$$

а для октетета векторных мезонов или мезонов 2^+

$$C V_\rho^\alpha C^{-1} = -V_\alpha^\rho, \quad C T_\rho^\alpha C^{-1} = T_\alpha^\rho. \quad (58')$$

Аналогичные законы преобразования изотопических мультиплетов были рассмотрены в главе II (формула (88)). Барнионный октетет, например, преобразуется следующим образом:

$$C B_\rho^\alpha C^{-1} = \bar{B}_\alpha^\rho, \quad (58)$$

т.е. переходит в мультиплет античастиц.

Соотношения (57) - (58') показывают, что для мезонных мультиплетов последовательное осуществление R - преобразования и C - преобразования переводит каждую частицу в себя. Это комбинированное преобразование обозначим через $G' = RC$. Мы имеем тогда:

$$G' P_\rho^\alpha G'^{-1} = \rho_\rho^\rho P_\rho^\alpha, \quad G' V_\rho^\alpha G'^{-1} = \rho_\rho^\rho V_\rho^\alpha, \quad (59)$$

$$| \rho_\rho^\rho | = | \rho_\rho^\rho | = 1.$$

Величину ρ_ρ^ρ называем G' -чётностью частиц. Она является обобщением понятия G -чётности в теории изотопической инвариантности. Сохранение G' -чётности даёт новое правило отбора в процессах взаимодействий частиц. Так, например, для векторного мезона, являющегося унитарным синглетом, G' -чётность совпадает с C -чётностью, т.е. равна -1 , поскольку волновая функция этого мезона не меняет знака при R -отражении. Этот мезон не может распадаться на два псевдоскалярных мезона (или два векторных мезона) из одного и того же октетета, так как G' -чётность системы двух частиц из одного мезонного октетета равна $+1$.

§ 3. Массовая формула и смешивание

Если унитарная симметрия выполняется точно, то частицы в каждом унитарном мультиплете должны иметь одну и ту же массу. Следовательно, наличие разницы масс частиц в унитарных мультиплетах означает, что унитарная симметрия нарушается в сильных взаимодействиях. Очевидно, что изучение унитарной симметрии имеет смысл, только если нарушающее симметрию взаимодействие достаточно слабо по сравнению с основным взаимодействием, в котором симметрия выполняется точно. Итак, мы предполагаем, что лагранжиан сильных взаимодействий, например, состоит из двух частей, первая из которых инвариантна относительно группы $SU(3)$,

а вторая часть, неинвариантная относительно группы $SU(3)$, даёт малые вклады во все матричные элементы диаграмм сильных взаимодействий. К этой второй части применяем теорию возмущений и ограничиваемся первым приближением. Очевидно, что только в этом случае унитарная симметрия может давать реальные следствия.

Посмотрим теперь, каким условиям должна удовлетворять часть лагранжиана, нарушающая унитарную симметрию. Так как гиперзаряд сохраняется, то эта часть должна быть инвариантной относительно калибровочных преобразований волновых функций

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha Y} \psi,$$

т.е. должна быть собственной функцией оператора гиперзаряда Y , соответствующей собственному значению, равному нулю. Далее, изотопическая инвариантность требует, чтобы эта часть лагранжиана была изотопическим инвариантом. Минимальным неприводимым представлением группы $SU(3)$, содержащим изотопический синглет с нулевым гиперзарядом, является октетет. Итак, если мы предположим, что нарушающая симметрию часть лагранжиана преобразуется по некоторому возможному представлению с минимальным числом компонент, то она должна быть компонентой с $T=0, Y=0$ некоторого октетета. В § I было показано, что для описания октетета вместо спинора ψ_ρ^α можно пользоваться восьмимерным вектором O_i :

$$O_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_\rho^\alpha (\lambda_i)_\alpha^\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} s_\rho (\psi \lambda_i).$$

Из формул (31) - (31''') следует, что компонента с $T=0, Y=0$ октетета соответствует восьмимерному вектору

$$O_i = 0, \quad i \leq 7, \quad O_8 = 1.$$

Если же теперь восемь компонент октетета представим в виде матрицы типа (48) - (50), то компонента с $T=0, Y=0$ дается формулой

$$O_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} s_\rho (\psi \lambda_8) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_\rho^\alpha (\lambda_8)_\alpha^\rho.$$

Нарушение симметрии приводит к расщеплению масс частиц в унитарных мультиплетах. Следовательно, массовый член в лагранжиане содержит часть, не инвариантную относительно группы $SU(3)$. В первом порядке по нарушающему симметрию взаимодействию эта часть является компонентой с $T=0, Y=0$ некоторого октетета. Так, например, массовый член в лагранжиане барионного поля имеет общий вид

$$\mathcal{L}_M = M_0 \bar{B}_\rho^\alpha B_\alpha^\rho + a_1 \bar{B}_\rho^\alpha B_\rho^\beta (\lambda_8)_\alpha^\beta + a_2 \bar{B}_\rho^\beta B_\rho^\alpha (\lambda_8)_\alpha^\beta. \quad (60)$$

Первый член в (60) является инвариантом, а два последних члена являются компонентами октететов. Неинвариантная часть лагранжиана состоит из двух независимых членов, так как произведение двух представлений $D(1, 1)$ содержит два представления $D(1, 1)$. Из формул (60) мы можем выразить массы частиц через три константы M_0, a_1 и a_2 , и следовательно, получить соотношения между массами частиц. Однако для этой цели более удобно пользоваться

другим выражением, эквивалентным (60), а именно

$$L_M = a \bar{B}_p^\alpha B_\alpha^p + b \bar{B}_2^\beta B_\beta^2 + c \bar{B}_3^\gamma B_\gamma^3 \quad (60')$$

Константы a, b и c в этой формуле выражаются линейно через M_0, a_1 и a_2 . Пользуясь матрицей (48) для \bar{B} и транспонированной матрицей для B , мы получаем из формулы (60) следующие выражения для масс частиц:

$$\begin{aligned} M_N &= a + c, \\ M_\Sigma &= a + b, \\ M_\Lambda &= a, \\ M_\Lambda &= a + \frac{2}{3}(b + c). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что массы баронов должны удовлетворять соотношению, полученному Гелл-Манном

$$3M_\Lambda + M_\Sigma = 2(M_N + M_E) \quad (61)$$

которое хорошо согласуется с опытом (4.535 Мэв и 4.518 Мэв).

Аналогично, массовый член в лагранжиане декуплета баронов имеет вид

$$L_M = a \bar{D}^{\alpha\rho\sigma} D_{\alpha\rho\sigma} + b \bar{D}^{\beta\alpha\rho} D_{\beta\alpha\rho} \quad (62)$$

Массы частиц выражаются через a и b следующим образом:

$$\begin{aligned} M_\Delta &= a, \\ M_{\Sigma^*} &= a + \frac{1}{3}b, \\ M_{\Sigma^0} &= a + \frac{2}{3}b, \\ M_{\Omega^-} &= a + b. \end{aligned}$$

Отсюда получаем правило интервалов

$$M_{\Sigma^*} - M_\Delta = M_{\Sigma^0} - M_{\Sigma^*} = M_{\Omega^-} - M_{\Sigma^*} \quad (63)$$

Первое равенство хорошо согласуется с экспериментальными данными (147 Мэв и 145 Мэв), а из второго можно предсказать массу Ω^- - гиперона $M_{\Omega^-} = 1.676$ Мэв, что было подтверждено опытом ($M_{\Omega^-}^{\text{эксп}} = 1.675$ Мэв).

Массовые соотношения для мезонов также можно получить аналогично. Поскольку лагранжианы мезонных полей содержат явно квадрат масс, то в данном случае мы имеем соотношения между квадратами масс. Так, например, для октуплета псевдоскалярных мезонов массовый член в лагранжиане имеет вид:

$$L_m = m_0^2 \bar{P}_p^\alpha P_\alpha^p + a_2 \bar{P}_p^\alpha P_\alpha^p (\lambda_p)_\alpha^\alpha + a_3 \bar{P}_p^\beta P_\beta^p (\lambda_p)_\beta^\beta \quad (64)$$

или

$$L_m = a \bar{P}_p^\alpha P_\alpha^p + b \bar{P}_2^\beta P_\beta^2 + c \bar{P}_3^\gamma P_\gamma^3 \quad (64')$$

Квадраты масс мезонов равны

$$\begin{aligned} m_K^2 &= a + c \\ m_{K^*}^2 &= a + b \\ m_\pi^2 &= a \\ m_\eta^2 &= a + \frac{2}{3}(b + c). \end{aligned}$$

Так как \tilde{K} - мезон является античастицей по отношению к K -мезону, то их массы равны, т.е. $c = b$. Нетрудно увидеть, что массы псевдоскалярных мезонов связаны соотношением

$$4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2 \quad (65)$$

согласующимся с опытом с точностью 5% (976 (Мэв)² и 923 (Мэв)²)

Если для трех рассмотренных унитарных мультиплетов массовые формулы хорошо согласуются с опытом, то для векторных мезонов и мезонов λ^+ ситуация совсем иная. Допустим, что известные векторные мезоны ρ и K^* являются компонентами октуплета. Этот октуплет должен содержать некоторый изотопический синглет с $Y=0$, обозначаемый через φ^0 , масса которого определяется через m_ρ^2 и $m_{K^*}^2$ формулой

$$m_{\varphi^0}^2 = \frac{1}{3} [4m_{K^*}^2 - m_\rho^2] = (931 \text{ Мэв})^2.$$

Вместо этого мезона на опыте наблюдались два подобных мезона ω и φ с массами $m_\omega = 783$ Мэв и $m_\varphi = 1020$ Мэв. Очевидно, что никакой из этих мезонов нельзя выбрать в качестве φ^0 .

Сакурай отметил, что этот факт можно объяснить следующим образом. Наряду с октуплетом векторных мезонов ρ, K^*, \tilde{K}^* и φ^0 существует некоторый векторный мезон ω^0 , являющийся унитарным синглетом. Если унитарная симметрия выполняется точно, то матричный элемент S -матрицы между состояниями φ^0 и ω^0 должен быть равным нулю. Поскольку в действительности унитарная симметрия нарушается, то этот матричный элемент отличается от нуля. Иначе говоря, в результате нарушения унитарной симметрии возможен переход $\varphi^0 \leftrightarrow \omega^0$ в сильных взаимодействиях. Диаграмма этого перехода имеет такой же вид, что и диаграмма собственной энергии мезонов, определяющая оператор квадрата масс \mathcal{M}^2 мезонов. Это означает, что недиагональный матричный элемент $\langle \omega^0 | \mathcal{M}^2 | \varphi^0 \rangle$ оператора \mathcal{M}^2 отличается от нуля. Следовательно, состояния ω^0 и φ^0 -мезонов не являются собственными состояниями оператора \mathcal{M}^2 и не могут быть физическими. Физическими должны быть состояния, обозначаемые через ω и φ , для которых недиагональные матричные элементы оператора \mathcal{M}^2 равны нулю. Волновые функции этих состояний являются ортонормированными линейными комбинациями волновых функций ω^0 и φ^0

$$\begin{aligned} \varphi &= \cos\theta \varphi^0 + \sin\theta \omega^0 \\ \omega &= -\sin\theta \varphi^0 + \cos\theta \omega^0. \end{aligned} \quad (66)$$

По определению оператора \mathcal{M}^2 квадраты масс φ^0 - и ω^0 -мезонов равны средним значениям оператора \mathcal{M}^2 в соответствующих состояниях

$$m_{\varphi^0}^2 = \langle \varphi^0 | \mathcal{M}^2 | \varphi^0 \rangle, \quad m_{\omega^0}^2 = \langle \omega^0 | \mathcal{M}^2 | \omega^0 \rangle.$$

Аналогично

$$m_{\varphi}^2 = \langle \varphi | \pi^2 | \varphi \rangle, \quad m_{\omega}^2 = \langle \omega | \pi^2 | \omega \rangle.$$

Подставляя в последние матричные элементы выражения (66) и в соотношение

$$\langle \varphi | \pi^2 | \omega \rangle = \langle \omega | \pi^2 | \varphi \rangle = 0,$$

мы получим три уравнения

$$\cos^2 \theta m_{\varphi}^2 + \sin^2 \theta m_{\omega}^2 + 2 \sin \theta \cos \theta \delta_{\varphi\omega} = m_{\varphi}^2, \quad (67)$$

$$\sin^2 \theta m_{\varphi}^2 + \cos^2 \theta m_{\omega}^2 - 2 \sin \theta \cos \theta \delta_{\varphi\omega} = m_{\omega}^2, \quad (68)$$

$$(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \delta_{\varphi\omega} + \sin \theta \cos \theta (m_{\omega}^2 - m_{\varphi}^2) = 0, \quad (69)$$

где

$$\delta_{\varphi\omega} = \langle \varphi^0 | \pi^2 | \omega^0 \rangle = \langle \omega^0 | \pi^2 | \varphi^0 \rangle.$$

Решая эти уравнения, мы можем определить три неизвестных величины: m_{ω}^2 , $\cos \theta$ и $\delta_{\varphi\omega}$.

В частности, для угла смешивания θ получаем

$$\cos 2\theta = \frac{2m_{\varphi}^2 - m_{\omega}^2 - m_{\omega}^2}{m_{\varphi}^2 - m_{\omega}^2}, \quad \theta \approx 39', 40'. \quad (70)$$

Поскольку между состояниями октетлета и синглета происходит смешивание, и эти результаты всегда будем рассматривать одновременно, то мы говорим, что они образуют новый мультиплет - нонулет.

Для мезонов 2^+ имеет место такая же ситуация. На опыте известно существование девяти мезонов 2^+ с массами $m_{\rho} = 1310$ Мэв (A_2 -мезон), $m_{\kappa} = 1430$ Мэв, $m_{\omega} = 1250$ Мэв (f -мезон) и $m_{\varphi} = 1520$ Мэв (f' -мезон). Как и в случае мезонов 1^- , ни ω' -мезон, ни φ' -мезон нельзя рассмотреть как компонента октетлета. Здесь, по-видимому, также происходит процесс смешивания, и мы имеем нонулет мезонов 2^+ . Угол смешивания θ' определяется соотношением вида (70)

$$\cos 2\theta' = \frac{2m_{\varphi'}^2 - m_{\rho'}^2 - m_{\omega'}^2}{m_{\varphi'}^2 - m_{\omega'}^2}, \quad m_{\varphi'}^2 = \frac{1}{3} [4m_{\rho'}^2 - m_{\rho'}^2] \quad (70')$$

Отсюда получаем $\theta' \approx 27^\circ$. Отметим, что небольшое разногласие с опытом в случае псевдоскалярных мезонов можно объяснить, предполагая слабое смешивание между X - и γ -мезонами.

Рассмотрим, наконец, барионные резонансы со спином и четностью $\frac{3}{2}^-$. В настоящее время известно существование четырех таких резонансов

$T=0, Y=0$:	$M = 1520$ Мэв
$T=\frac{1}{2}, Y=1$:	$M = 1512$ Мэв
$T=\frac{1}{2}, Y=-1$:	$M = 1820$ Мэв
$T=1, Y=0$:	$M = 1660$ Мэв.

Эти резонансы нельзя включить в один унитарный октетлет $\lambda', N', \Sigma', \Sigma'$, так как их массы не удовлетворяют формуле (61)

$$3M_{\lambda'} + M_{\Sigma'} = 2(M_{N'} + M_{\Sigma'}).$$

Если три из указанных резонансов принадлежат этому октетлету, то из массовой формулы можно определить массу четвертого. Мы имеем следующие случаи:

- 1) $M_{N'} = 1512$ Мэв, $M_{\lambda'} = 1520$ Мэв, $M_{\Sigma'} = 1660$ Мэв. Тогда $M_{\Sigma'} = 1598$ Мэв.
- 2) $M_{N'} = 1512$ Мэв, $M_{\Sigma'} = 1660$ Мэв, $M_{\Sigma'} = 1820$ Мэв. Тогда $M_{\lambda'} = 1668$ Мэв.
- 3) $M_{N'} = 1512$ Мэв, $M_{\lambda'} = 1520$ Мэв, $M_{\Sigma'} = 1820$ Мэв. Тогда $M_{\Sigma'} = 2104$ Мэв.

Возможен случай, когда наряду с рассматриваемым октетлетом барионных резонансов $\frac{1}{2}^-$ существует также унитарный синглет λ'' и между состояниями λ' и λ'' происходит смешивание. В данном случае три последних резонанса принадлежат октетлету (N', Σ', Σ'), а резонанс с $T=0, Y=0, M=1520$ Мэв является суперпозицией резонанса λ с массой $M_{\lambda'} = 1668$ Мэв и синглета λ'' . Масса другого суперпозиционного состояния, ортогонального к состоянию резонанса с массой $M = 1520$ Мэв, пока неизвестна.

В заключение приведем общую массовую формулу Окубо, справедливую для всех унитарных мультиплетов:

$$M = M_0 + aY + b \left[T(T+1) - \frac{Y^2}{4} \right]$$

для барионов и

$$m^2 = m_0^2 + aY + b \left[T(T+1) - \frac{Y^2}{4} \right]$$

для мезонов.

III. МОДЕЛЬ КВАРКОВ С ДРОБНЫМИ ЗАРЯДАМИ И МОДЕЛИ УНИТАРНОЙ СИММЕТРИИ БЕЗ ДРОБНЫХ ЗАРЯДОВ.

§ I. Модель с триплетом фундаментальных частиц.

До настоящего времени было сделано много попыток построить модели элементарных частиц, в которых мезоны и многие из барионов являются составными системами, образованными из более фундаментальных частиц. Так, например, Ферми и Янг выдвинули идею о том, что λ -мезоны могут быть рассмотрены как составные системы пар нуклон-антинуклон. Саката, Марков, Окуи и др. развивали схему Ферми-Янга и построили модель, в которой из трех фундаментальных частиц ρ, ω, λ образуются все мезоны и остальные барионы. Если имеет место полное вырождение между тремя фундаментальными частицами ρ, ω, λ , то модель Саката-Маркова-Окуи также обладает симметрией группы $SU(3)$, непосредственным следствием которой является существование псевдоскалярных и векторных синглетов и октетлетов, как это отметили Салам, Икеда и др. Разница между этой моделью и так называемым "восьмерным путем" Гелла-Манна и Неемана

заключается в том, что в первой модели барионы p, n, Λ образуют триплет, а во второй эти барионы вместе с пятью остальными известными барионами $\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^-$ образуют октет.

Перейдем теперь к построению модели составных частиц, предложенной Гелл-Манном и Цвейгом, в которой имеет место восьмимерная унитарная симметрия Гелл-Манна и Неемана. Отметим прежде всего, что фундаментальные частицы должны образовывать мультиплет, преобразующийся по фундаментальному представлению, т.е. образуют триплет. Дело в том, что всякое неприводимое представление группы $SU(3)$ может быть получено следующим методом: следует вначале образовать произведение q фундаментальных представлений и r представлений, контраградиентных к фундаментальному, и затем разложить это произведение на неприводимые. Таким путем мы можем получить, в частности, представление $D(q, r)$. С другой стороны, если фундаментальные частицы образуют фундаментальный мультиплет, т.е. преобразуются по фундаментальному представлению, то волновая функция системы q фундаментальных частиц и r их античастиц преобразуется по представлению, содержащемуся в произведении q фундаментальных и r контраградиентных к фундаментальному представлений. Отсюда следует, что в таком случае всякое неприводимое представление можно реализовать в виде волновой функции систем фундаментальных частиц и их античастиц. Эти фундаментальные частицы будем называть кварками и обозначать через t_p, t_n, t_λ по аналогии с p, n, Λ в модели Сакаты-Маркова-Окуны. Как было показано в П.П. § I, они имеют заряды $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ и гиперзаряды $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$, соответственно. Предположим, что их спин равен $\frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь состояния систем кварк-антикварк. Волновые функции этих систем образуют представление $D(1,0) \otimes D(0,1)$, которое разлагается на неприводимые представления $D(1,0)$ и $D(1,1)$. Следовательно, синглеты и октеты псевдоскалярных и векторных мезонов можно считать составными системами пар кварк-антикварк. Отметим, что эта возможность отождествления псевдоскалярных и векторных мезонов не является единственной, а только простейшей. Пользуясь формулами типа (46) для псевдоскалярных мезонов, например, нетрудно получить следующие соответствия:

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow (\tilde{t}_n t_p), \quad \pi^0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{t}_p t_p - \tilde{t}_n t_n), \quad \pi^- \rightarrow (\tilde{t}_p t_n), \\ K^+ &\rightarrow (\tilde{t}_\lambda t_p), \quad K^0 \rightarrow (\tilde{t}_\lambda t_n), \quad K^- \rightarrow (\tilde{t}_p t_\lambda), \quad \bar{K}^0 \rightarrow (\tilde{t}_n t_\lambda) \quad (71) \\ \eta &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} (\tilde{t}_p t_p + \tilde{t}_n t_n - 2\tilde{t}_\lambda t_\lambda), \quad \chi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} (\tilde{t}_p t_p + \tilde{t}_n t_n + \tilde{t}_\lambda t_\lambda). \end{aligned}$$

Очевидно, что октет барионов нельзя рассматривать как системы кварк-антикварк. Для того чтобы найти составные системы, которые могут быть отождествлены с этими барионами, рассмотрим прежде всего декуплет барионных резонансов, волновые функции которых преобразуются по представлению $D(3,0)$. Отметим, что простейшим методом построения представления $D(3,0)$ является симметризация произведения трех фундаментальных представлений. Следова-

тельно, простейшими составными системами, которые могут быть отождествлены с барионными резонансами из декуплета, являются системы трех кварков, причём унитарные волновые функции этих систем полностью симметричны относительно перестановок кварков. Поскольку барионные резонансы несут барионное число, равное единице, то барионное число кварка равно $\frac{1}{3}$. Теперь мы можем однозначно ответить на вопрос, какими системами могут быть барионы из октета. Они должны быть системами трех кварков, так как их барионное число равно единице. Как известно, из произведения трех фундаментальных представлений можно образовать неприводимое представление путем симметризации по первому и второму индексам, например, и затем антисимметризации по второму и третьему индексам. Мы получаем тогда спинор $\chi_{\{p\}r}$, эквивалентный спинору $\chi_{\bar{p}}^r$ с нулевым шпуром.

Таким образом, мы можем получить октет из произведения трёх фундаментальных представлений путем симметризации по одной паре индексов и антисимметризации по другой. Иначе говоря, барионы из октета также являются системами трёх кварков, причём унитарные волновые функции этих систем симметричны относительно перестановок одной пары кварков и антисимметричны по другой паре.

Если кварки существуют, то их массы не могут быть меньше $\frac{1}{3}$ массы нуклона, поскольку в таком случае нуклоны были бы нестабильными и распадались бы на три кварка. Кварки могут рождаться вместе с их античастицами в процессах столкновения мезонов и барионов с протоном при достаточно большой энергии, а также в аннигиляции пар протон-антипротон. До сих пор они ещё не были обнаружены. Этот факт можно объяснить, если предполагать, что массы кварков велики, а относительно малые значения масс барионов и мезонов обусловлены тем, что энергия связи этих систем большая. Однако остается непонятным, почему до сих пор не были обнаружены другие составные системы с дробными зарядами, например, системы двух кварков, двух кварков и антикварка и т.д., массы которых также могут быть порядка масс барионов и мезонов.

В заключение отметим, что, по крайней мере, один из трёх кварков должен быть стабильным. Поэтому если кварки действительно существуют, то они должны рождаться при столкновении частиц высоких энергий в космических лучах с нуклонами в атмосфере. Положительные стабильные кварки или антикварки могут захватывать атомные электроны и образовывать связанные системы электрон-кварк (антикварк) с дробными отрицательными зарядами. Поскольку подобные системы стабильны, то они либо накапливаются со временем, либо захватываются положительными ионами в атмосфере, например, и образуют вместе с этими ионами нейтральные молекулы. Такие системы можно было бы обнаружить при помощи различных физических и химических методов.

§2. Модели с четырьмя фундаментальными частицами.

Попробуем теперь построить модели унитарной симметрии без дробных зарядов. Для этого напомним прежде всего физические требования, из которых вытекает существование частиц с дробными зарядами и гиперзарядами. В п.П, § I мы показали, что отождествление восьмикомпонентных семейств барионов (N, Σ, Λ, Ξ) и мезонов (K, \bar{K}, π, η) с унитарными октуплетами приводит к следующему соотношению между оператором гиперзаряда Y для фундаментального представления и генератором y^t группы $SU(3)$

$$Y = y^t + b I, \quad y^t = \begin{pmatrix} 1/3 & & \\ & 1/3 & \\ & & -2/3 \end{pmatrix}$$

а для контраградиентного к нему представления

$$Y = \tilde{y}^t - b I, \quad \tilde{y}^t = - \begin{pmatrix} 1/3 & & \\ & 1/3 & \\ & & -2/3 \end{pmatrix}.$$

где b - произвольная константа.

Мы можем выбрать эту константу b так, чтобы заряды и гиперзаряды фундаментальных частиц были целыми. Это означает, в частности, что октуплет мезонов можно рассматривать как системы кварка и антикварка с целыми зарядами. Если же мы ещё требуем, чтобы известные барионные резонансы были системами трёх кварков, то тогда константа b обязательно равна нулю, что приводит к дробным значениям зарядов кварков. Таким образом, для того, чтобы построить модель без дробных зарядов, достаточно свободиться от последнего требования.

Нетрудно видеть, что заряды кварков равны ± 1 или 0 только в двух случаях, когда

$$b = \frac{2}{3} \text{ и } b = -\frac{4}{3}, \text{ так как для кварков}$$

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} & & \\ & \frac{2}{3} + \frac{1}{2} & \\ & & -\frac{4}{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

В обоих этих случаях октуплеты и синглеты мезонов могут быть рассмотрены как системы кварк-антикварк. Поскольку из одних этих кварков нельзя построить барионы и барионные резонансы, то в качестве фундаментальной частицы необходимо ввести наряду с этим триплетом кварков, по крайней мере, ещё один кварк. Этот кварк обозначим через λ и будем считать его унитарным синглетом. Мы имеем, таким образом, составную модель с четырьмя фундаментальными частицами со спином $\frac{1}{2}$, три из которых образуют унитарный триплет t_p, t_n, t_λ , а четвертый λ является унитарным синглетом. Предположим, что заряд и гиперзаряд синглетного кварка λ равны нулю. Тогда известные барионы (N, Σ, Λ, Ξ) могут быть рассмотрены как системы, состоящие из триплетного кварка, триплетного антикварка и синглетного кварка, т.е. состоящие из октуплетного мезона и синглетного кварка. Барионное число кварков тогда равно единице.

Как было показано, кварки имеют заряды ± 1 и 0, если $b = \frac{2}{3}$ или $b = -\frac{4}{3}$. Если мы сохраняем данное выше определение гиперзаряда

$$Y = y^t + b I,$$

то в первом случае кварки t_p, t_n, t_λ имеют гиперзаряды 1, 0, 0, а во втором случае их гиперзаряды равны -1, -1, -2, соответственно. Если же мы хотим, чтобы гиперзаряды кварков по абсолютному значению не превосходили единицу, то во втором случае необходимо ввести новое квантовое число Z , равное -1 для триплетных кварков, например. Положим далее

$$Y = -Z + y^t + b I.$$

Тогда триплетные кварки имеют гиперзаряды 0, 0, -1, а заряд Q равен

$$Q = T_3 + \frac{Y+Z}{2}.$$

Эта формула применима также и к синглетному кварку λ , если для этой частицы $Z = 0$.

Таким образом, в первом случае кварки имеют следующие заряды, гиперзаряды и изотопические спины

	Q	Y	T_3	T
t_p	1	1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
t_n	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
t_λ	0	0	0	0
λ	0	0	0	0

связанные между собой формулой

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}. \quad (72)$$

Во втором же случае наряду с известными квантовыми числами существует ещё одно новое квантовое число Z , связанное с остальными формулой

$$Q = T_3 + \frac{Y+Z}{2}, \quad (73)$$

и значения этих квантовых чисел для кварков равны

	Q	Y	Z	T_3	T
t_p	0	0	-1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
t_n	-1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
t_λ	-1	-1	-1	0	0
λ	0	0	0	0	0

Новое квантовое число Z называем суперзарядом. Поскольку Q, T_3 и Y сохраняются, то суперзаряд Z сохраняется. Отметим, что в первом случае можно также ввести новое квантовое число Z , отличающее синглетный кварк от триплетных. Если унитарная симметрия выполняется строго, то это новое квантовое число также сохраняется, так как тогда переход $t_\lambda \leftrightarrow \lambda$ запрещен. С другой стороны, можно предполагать, что переход $t_\lambda \leftrightarrow \lambda$ является причиной нарушения унитарной симметрии в любых процессах сильных взаимодействий. В данном

случае существует тесная связь между несохранением нового квантового числа Z и нарушением унитарной симметрии.

Перейдем теперь к изучению структуры мезонов. В обоих рассматриваемых моделях девять известных псевдоскалярных мезонов, например, могут быть отождествлены с состояниями систем кварк-антикварк таким же образом, что и в модели с триплетом кварков с дробными зарядами (см. (71)). Другими состояниями систем кварк-антикварк являются $(\tilde{t}_p s)$, $(\tilde{t}_n s)$, $(\tilde{t}_\lambda s)$, $(\tilde{s} t_p)$, $(\tilde{s} t_n)$, $(\tilde{s} t_\lambda)$, $(\tilde{s} s)$. Если их спин и чётность равны 0^- , то мы имеем ещё семь псевдоскалярных мезонов: два унитарных триплета и один унитарный синглет. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\rightarrow (\tilde{s} s), & \sigma &\rightarrow (\tilde{s} t_p), & \tau &\rightarrow (\tilde{s} t_n), & \delta &\rightarrow (\tilde{s} t_\lambda), \\ \tilde{\sigma} &\rightarrow (\tilde{t}_p s), & \tilde{\tau} &\rightarrow (\tilde{t}_n s), & \tilde{\delta} &\rightarrow (\tilde{t}_\lambda s). \end{aligned} \quad (74)$$

В первой модели их квантовые числа равны

	Q	Y	T_3	T
ε	0	0	0	0
σ	1	1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
τ	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
δ	0	0	0	0

а во второй мы имеем:

	Q	Y	Z	T_3	T
ε	0	0	0	0	0
σ	0	0	-1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
τ	-1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
δ	-1	-1	-1	0	0

Аналогично, кроме девяти известных векторных мезонов мы имеем векторные мезоны $\varepsilon^*, \sigma^*, \tau^*$ и δ^* с такими же квантовыми числами, что и псевдоскалярные мезоны $\varepsilon, \sigma, \tau, \delta$. В первой модели квантовые числа σ^* и τ^* равны соответствующим квантовым числам K^{*+} и K^{*0} . Они могут быть отождествлены с K^* -мезонами (K^* -резонанс с $M=725$ Мэв), если последние имеют спин и чётность 1^- . Во второй же модели триплетные мезоны $\sigma, \tau, \delta, \sigma^*, \tau^*, \delta^*$ имеют отличные от нуля суперзаряды. Они не могут распадаться на известные мезоны по сильным взаимодействиям, даже если их массы достаточно велики. Поэтому некоторые из них могут распадаться только по слабым взаимодействиям, если в последних суперзаряд не сохраняется, и они имеют времена жизни порядка времен жизни K и π -мезонов.

Состояния систем кварков и антикварков, которые могут быть отождествлены с известными барионами и барионными резонансами, также можно построить аналогично. На этом не будем

останавливаться. Отметим только важный факт, что во второй модели существуют барионы с отличными от нуля суперзарядами. Некоторые из этих барионов либо стабильны, либо распадаются только по слабым взаимодействиям.

В рассматриваемых моделях с четырьмя кварками полное вырождение по трём кваркам t_p, t_n, t_λ приводит к унитарной симметрии сильных взаимодействий. Если же имеется полное вырождение по всем четырём кваркам, то имеет место более высокая симметрия - симметрия $SU(4)$ Таржана и Теплица, Маки, Хара, Владимирского и др.

§ 3. Модели с несколькими триплетами кварков

Трудность с дробными зарядами и барионными числами можно также преодолеть, если предполагать, что элементарные частицы образуются из нескольких триплетов фундаментальных частиц. Одна из моделей такого типа была предложена Швингером. В этой модели существуют два фундаментальных триплета: фермионный триплет ψ_α с зарядами $-1, 0, 0$ и барионным числом 1 , и бозонный триплет φ_α с зарядами $-1, 0, 0$ и барионным числом 2 . Известные барионы тогда могут быть отождествлены с состояниями систем $\tilde{\psi}^p \varphi_\alpha$, а известные мезоны - системам $\tilde{\varphi}^p \varphi_\alpha$ или $\tilde{\psi}^p \psi_\alpha$. Очевидно, что в данном случае наряду с октетными барионами $\frac{1}{2}^+$, псевдоскалярных и векторных мезонов должны существовать соответствующие синглеты. В частности, должен существовать девятый барион с $J^P = \frac{1}{2}^+, T=0, Y=0, Q=0$.

В модели Швингера имеется также некоторое новое сохраняющееся квантовое число, отличающее фундаментальные фермион ψ_α и бозон φ_α и связанное с остальными квантовыми числами формулой типа (73). Наряду с известными частицами, для которых это новое квантовое число равно нулю, существуют также мультиплеты, для которых последнее не равно нулю. Некоторые частицы в этих мультиплетах стабильны, по крайней мере, относительно сильных и электромагнитного взаимодействий.

Другими моделями без дробных зарядов являются модели с тремя фундаментальными триплетами со спином $\frac{1}{2}$. Подобные схемы были предложены Боголюбовым и др. и Намбу. Обозначим фундаментальные частицы через q_α, r_α и $s_\alpha, \alpha=1,2,3$. Предположим, что их изотопические спины T , заряды Q , гиперзаряды Y и барионные числа B равны

	Q	Y	B	T_3	T
q_1	1	1	1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
q_2	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
q_3	0	0	1	0	0
r_1	1	0	1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
r_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
r_3	0	-1	1	0	0
s_1	0	0	-1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
s_2	-1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
s_3	-1	-1	-1	0	0

Введем ещё одно квантовое число Z , равное 0 для q_α , +1 для c_α и -1 для s_α . Тогда имеет место формула (73). В этой модели мезоны отождествляются с системами $\tilde{q}^{\alpha} q_{\beta}$, $\tilde{c}^{\alpha} c_{\beta}$ и $\tilde{s}^{\alpha} s_{\beta}$, по аналогии с моделью с одним триплетом (см. (71)), а барионы $\frac{1}{2} q_{\alpha} q_{\beta} s_{\gamma}$ и барионные резонансы $\frac{3}{2} c_{\alpha} c_{\beta} s_{\gamma}$ - с системами трёх фундаментальных частиц ($q_{\alpha} c_{\beta} s_{\gamma}$). При этом унитарные части волновых функций этих систем обладают такими же свойствами симметрии относительно перестановок фундаментальных частиц, что и в модели с триплетом кварков с дробными зарядами и барионным числом (см. § I). Иначе говоря, волновая функция декуплета симметрична относительно перестановок индексов q_{α} , c_{β} , s_{γ} , а волновая функция октуплета получается путём симметризации по одной паре индексов и затем антисимметризации по другой. Обозначим через Q_0 , Y_0 матрицы заряда и гиперзаряда кварков в модели с одним триплетом, а Q_q , Y_q , Q_c , Y_c , Q_s , Y_s - матрицы заряда и гиперзаряда фундаментальных частиц в рассматриваемой модели. Мы имеем соотношения

$$\begin{aligned} Q_q &= Q_0 + \frac{1}{3}, & Y_q &= Y_0 + \frac{2}{3}, \\ Q_c &= Q_0 + \frac{1}{3}, & Y_c &= Y_0 - \frac{1}{3}, \\ Q_s &= Q_0 - \frac{2}{3}, & Y_s &= Y_0 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} Q_q + Q_c + Q_s &= 3 Q_0, \\ Y_q + Y_c + Y_s &= 3 Y_0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что системы ($q_{\alpha} c_{\beta} s_{\gamma}$) имеют такие же заряды и гиперзаряды, что и соответствующие системы кварков с дробными зарядами и барионным числом в модели с одним триплетом. Нетрудно увидеть, что барионное число и изотопические спины соответствующих систем двух моделей также равны. Так, например, в модели с одним триплетом мы имеем следующее отождествление

$$\Delta^{++} = (t_p t_p t_p), \quad \Omega^- = (t_{\lambda} t_{\lambda} t_{\lambda}), \quad Y^+ = \frac{1}{\sqrt{3}} (t_p t_p t_{\lambda} + t_p t_{\lambda} t_p + t_{\lambda} t_p t_p),$$

и т.д., а в модели с тремя триплетами

$$\Delta^+ = (q_1 c_1 s_1), \quad \Omega^- = (q_3 c_3 s_3), \quad Y^+ = \frac{1}{\sqrt{3}} (q_1 c_1 s_3 + q_1 c_3 s_1 + q_3 c_1 s_1),$$

и т.д.

В рассматриваемой схеме с тремя фундаментальными триплетами полное вырождение по частицам в каждом триплете приводит к унитарной симметрии или точнее - симметрии $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$, а полное вырождение по всем девяти частицам соответствует симметрии $SU(9)$. Последней, по-видимому, не существует, или она нарушается весьма сильно, так как в противном случае существовали бы частицы с ненулевыми суперзарядами Z с массами порядка масс барионов и мезонов, причём эти частицы с $Z \neq 0$ должны были бы рождаться в паре при столкновении нуклонов и мезонов достаточно высоких энергий.

Рассмотрим, наконец, модель с двумя триплетами q_{α} и c_{α} со спином $\frac{1}{2}$, предложенную Багри, Нунтом и Ван Ховом. В этой модели существует также новое сохраняющееся квантовое число Z . Квантовые числа фундаментальных частиц равны

	Q	Y	Z	B	T ₃	T
q_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
q_2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
q_3	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0
c_1	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
c_2	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
c_3	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	0	0

Нетрудно проверить, что в этой схеме мезоны могут быть отождествлены с состояниями систем $\tilde{q}^{\alpha} q_{\beta}$ или $\tilde{c}^{\alpha} c_{\beta}$, а барионы и барионные резонансы - систем $\tilde{c}^{\alpha} q_{\beta} q_{\gamma}$. На основе этой модели Багри, Нунт и Ван Хов предложили симплектическую симметрию $Sp(6)$, более широкую, чем унитарная симметрия.

Литература:

Группа SU(3) и её представления

1. M. Ikeda, S. Ogawa and Y. Ohnuki, Prog.Theor.Phys., 22, 715 (1959), 23, 1673 (1960).
2. R.E. Behrens, J. Dretlen, C. Fronsdal and W. Lee, Rev.Mod.Phys., 34, 1(1962).
3. J.J. De Swart, Rev.Mod.Phys., 35, 916 (1963).
4. Я.А. Смородинский, УФН, 84, 3 (1964).
5. В.И. Огиевецкий, Лекция на международной зимней школе, Дубна, 1964 г.

Классификация элементарных частиц и резонансов по неприводимым представлениям группы SU(3)

1. M.Gell-Mann, Phys.Rev. 125, 1065 (1962).
2. Y.Ne'eman, Nucl.Phys., 26, 222 (1961).
3. S.L.Glashow and J.J.Sakurai, Nuovo Cim., 26, 622 (1962).
4. S.Meshkov, C.A.Levenson, and H.J.Lipkin, Phys.Rev.Lett., 10, 361 (1963).

Массовая формула и смешивание

1. M.Gell-Mann, Phys.Rev.125, 1607 (1962).
2. S.Okubo, Progr.Theor.Phys., 27, 949 (1962).
3. J.J.Sakurai, Phys.Rev.Lett., 9, 472 (1962).

Модели

1. M.Gell-Mann, Phys.Lett. 8, 214 (1964).
2. G.Zweig, preprint CERN, 8182 /TH 401, 8419 /TH. 412, 1964.
3. P.Tarjanne and V.L.Terplitz, Phys.Rev.Lett. 11, 447 (1963).
4. Z.Maki, Progr.Theor.Phys., 31, 331 (1964).
5. Y.Nara, Phys.Rev.134, B701 (1964).
6. В.В. Владимирский, Доклад на Международной конференции по физике высоких энергий, г. Дубна, 1964 г.
7. J.Schwinger, Phys.Rev.135, B816 (1964).
8. Н.Н. Боголюбов, В.А. Матвеев, Нгуен Ван Хьен, Д. Стоянов, Б.В. Струминский, А.Н. Тавхелидзе и В.П. Шелест, препринт ОИЯИ, Р. 2141, 1965.
9. Y.Nambu, preprint EFINS-65-6, 1965.
10. H.Baer, J.Nuyts and L.Van Hove, Phys.Lett., 9, 279 (1964).

ГЛАВА IV

УНИТАРНАЯ СИММЕТРИЯ И СИЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
I. ТРЕХЛИНЕЙНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ И ТРЕХЧАСТИЧНЫЕ ВЕРШИНЫ

§ I. Трехлинейные лагранжианы взаимодействия

В теории изотопической инвариантности существуют соотношения между константами связи для частиц в одних и тех же изотопических мультиплеттах. Например, все константы связи π -мезонов с нуклонами выражаются через одну произвольную константу, и лагранжиан взаимодействия π -мезонов с нуклонами имеет вид (см. главу II, формулы (65) и (67)):

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = i\sqrt{2} g_{\pi NN} \pi_k^a \bar{N}_a = i g_{\pi NN} \pi_k \bar{N} \tau_k N.$$

Аналогично, в унитарной симметрии константы связи для всех частиц в одних и тех же унитарных мультиплеттах связаны между собой. В качестве примера рассмотрим трехлинейное взаимодействие октетта псевдоскалярных мезонов с октеттом барионов $1/2^+$. Этот лагранжиан является инвариантной линейной комбинацией произведений типа

$$\bar{B}_\beta^\alpha \gamma_5 B_\delta^\gamma P_\alpha^\tau,$$

где B - волновая функция барионов, \bar{B} - сопряженная к B волновая функция, а P - волновая функция псевдоскалярных мезонов. Как известно, для образования инвариантов из этих произведений необходимо провести суммирование по всем парам верхних и нижних индексов. Нетрудно увидеть, что существует два различных способа суммирования, в результате которых получаем два независимых инварианта

$$\bar{B}_\beta^\alpha \gamma_5 B_\gamma^\delta P_\alpha^\gamma \pm \bar{B}_\beta^\gamma \gamma_5 B_\delta^\alpha P_\beta^\alpha.$$

Таким образом, в унитарной симметрии трехлинейный лагранжиан взаимодействия октетта псевдоскалярных мезонов с октеттом барионов $1/2^+$ зависит от двух произвольных констант и имеет вид

$$\mathcal{L}_{PBB} = \frac{i}{\sqrt{2}} g^F [\bar{B}_\beta^\delta \gamma_5 B_\gamma^\alpha - \bar{B}_\beta^\alpha \gamma_5 B_\gamma^\delta] P_\alpha^\gamma + \frac{i}{\sqrt{2}} g^D [\bar{B}_\beta^\delta \gamma_5 B_\gamma^\alpha + \bar{B}_\beta^\alpha \gamma_5 B_\gamma^\delta] P_\beta^\alpha. \quad (1)$$

Как известно, для описания октеттов псевдоскалярных мезонов и барионов $1/2^+$ можно пользоваться восьмимерными векторами B_i и P_i , $i = 1, 2, \dots, 8$, вместо спиноров B_β^α и P_β^α (см. главу III, формулы (44) и (45))

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2}} P_\beta^\alpha (\lambda_i)_\alpha^\beta, \quad B_i = \frac{1}{\sqrt{2}} B_\beta^\alpha (\lambda_i)_\alpha^\beta; \quad P_\beta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)_\beta^\alpha P_i, \quad B_\beta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)_\beta^\alpha B_i.$$

Тогда трехлинейный лагранжиан взаимодействия можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{L}_{PBB} = \frac{i}{4} g^F \bar{B}_i \gamma_5 B_j P_k \operatorname{sp}([\lambda_i, \lambda_j] \lambda_k) + \frac{i}{4} g^D \bar{B}_i \gamma_5 B_j P_k \operatorname{sp}(\{\lambda_i, \lambda_j\} \lambda_k).$$

Так как

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2if_{ijk} \lambda_k, \quad \{\lambda_i, \lambda_j\} = 2d_{ijk} \lambda_k + \frac{4}{3} \delta_{ij}, \quad \text{Sp} \lambda_i \lambda_j = 2\delta_{ij}$$

то мы имеем

$$\text{Sp}([\lambda_i, \lambda_j] \lambda_k) = 4if_{ijk}, \quad \text{Sp}(\{\lambda_i, \lambda_j\} \lambda_k) = 4d_{ijk}.$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{L}_{\text{PBB}} = -g^F f_{ijk} \bar{B}_i \gamma_5 B_j P_k + ig^D d_{ijk} \bar{B}_i \gamma_5 B_j P_k. \quad (2)$$

Напомним, что из двух трехмерных векторов группы $SU(2)$ можно образовать один вектор путем векторного умножения с коэффициентами ϵ_{ijk}

$$[\vec{A} \times \vec{B}]_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k.$$

В случае восьмимерных векторов группы $SU(3)$ мы имеем иное положение: из двух восьмимерных векторов A_j и B_j можно образовать два восьмимерных вектора двумя способами, в которых используются коэффициенты f_{ijk} или d_{ijk}

$$[\vec{A} \times \vec{B}]_i^F = f_{ijk} A_j B_k, \quad [\vec{A} \times \vec{B}]_i^D = d_{ijk} A_j B_k.$$

В соответствии с названиями коэффициентов векторного умножения первый тип связи в (2) называется типом F , а второй — типом D .

В теории изотопической инвариантности трехлинейный лагранжиан взаимодействия псевдоскалярных мезонов с барионами $I/2^+$ содержит 12 независимых членов и, следовательно, 12 произвольных констант (см. главу II, п.П, § 2). В унитарной симметрии эти константы выражаются через две независимые константы f и g^D в (I) или (2). Чтобы найти эти выражения, достаточно подставить в (I) матрицы B^a , $B^{\bar{a}}$ и P^a , данные в главе III, п.П, § 2:

$$B_3^3 = -\frac{2}{\sqrt{6}} \lambda, \quad B_4^a = \Sigma_4^a + \frac{1}{\sqrt{6}} \lambda \delta_4^a, \quad B_2^3 = N_2, \quad B_3^a = \Xi^a = e^{i\alpha} \Xi_4^a, \\ P_3^3 = -\frac{2}{\sqrt{6}} \lambda, \quad P_4^a = \pi_4^a + \frac{1}{\sqrt{6}} \lambda \delta_4^a, \quad P_2^3 = K_2, \quad P_3^a = \tilde{K}^a = e^{-i\alpha} \tilde{K}_4^a.$$

Получим тогда:

$$\mathcal{L}_{\text{PBB}} = i\sqrt{2} g^F \pi_2^3 \Sigma_4^3 \Sigma_4^3 + \frac{i}{\sqrt{2}} (g^D - g^F) \pi_2^3 \bar{N}^a \gamma_5 N_2 \\ + \frac{i}{\sqrt{2}} (g^D + g^F) \pi_2^3 \Xi_4^a \gamma_5 \Xi_4^a + \frac{i}{\sqrt{3}} g^D \pi_2^3 [\bar{\lambda} \gamma_5 \Sigma_4^3 + \bar{\Sigma}_4^3 \gamma_5 \lambda] \\ + i\sqrt{\frac{2}{3}} g^D \lambda \bar{\Sigma}_4^a \gamma_5 \Sigma_4^a - \frac{i}{2\sqrt{3}} (3g^F + g^D) \lambda \bar{N}^a \gamma_5 N_2 \quad (3) \\ + \frac{i}{2\sqrt{3}} (3g^F - g^D) \lambda \bar{\Xi}_4^a \gamma_5 \Xi_4^a - i\sqrt{\frac{2}{3}} g^D \lambda \bar{\lambda} \gamma_5 \lambda$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2}} (g^D - g^F) K_2 \bar{\Sigma}_4^a \gamma_5 \Xi_4^a + \frac{i}{\sqrt{2}} (g^D - g^F) \tilde{K}^a \bar{\Xi}_4^a \gamma_5 \Sigma_4^a \\ + \frac{i}{\sqrt{2}} (g^D + g^F) K_2 \bar{N}^a \gamma_5 \Sigma_4^a + \frac{i}{\sqrt{2}} (g^D + g^F) \tilde{K}^a \bar{\Sigma}_4^a \gamma_5 N_2 \\ - \frac{i}{2\sqrt{3}} (3g^F + g^D) K_2 \bar{\lambda} \gamma_5 \Xi_4^a - \frac{i}{2\sqrt{3}} (3g^F + g^D) \tilde{K}^a \bar{\Xi}_4^a \gamma_5 \lambda \\ + \frac{i}{2\sqrt{3}} (3g^F - g^D) K_2 \bar{N}^a \gamma_5 \lambda + \frac{i}{2\sqrt{3}} (3g^F - g^D) \tilde{K}^a \bar{\lambda} \gamma_5 N_2.$$

Сравнивая это выражение с определениями констант в теории изотопической инвариантности (см. главу II, п.П, § 2), мы получим выражения последних констант через g^F и g^D :

$$g_{\pi NN} = \frac{1}{2} (g^D - g^F), \quad g_{\pi \Xi \Xi} = \frac{1}{2} (g^D + g^F), \\ g_{\eta NN} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} (3g^F + g^D), \quad g_{\eta \Xi \Xi} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (3g^F - g^D), \\ g_{\pi \Sigma \Sigma} = g^F, \quad g_{\eta \Sigma \Sigma} = \sqrt{\frac{2}{3}} g^D, \\ g_{\eta \lambda \lambda} = -\sqrt{\frac{2}{3}} g^D, \quad g_{\pi \Sigma \lambda} = \frac{1}{\sqrt{3}} g^D, \\ g_{K \Sigma N} = \frac{1}{2} (g^D + g^F), \quad g_{K \Xi \Xi} = \frac{1}{2} (g^D - g^F), \\ g_{K \lambda N} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (3g^F - g^D), \quad g_{K \lambda \Sigma} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} (3g^F + g^D).$$

Аналогично, для трехлинейного взаимодействия октетета и синглета векторных мезонов с октететом барионов $I/2^+$ имеем

$$\mathcal{L}_{\text{VBB}} = \frac{i}{\sqrt{2}} f^F [\bar{B}_r^p \gamma_\mu B_p^a - \bar{B}_p^a \gamma_\mu B_r^p] (V_r)_a^r \\ + \frac{i}{\sqrt{2}} f^D [\bar{B}_r^p \gamma_\mu B_p^a + \bar{B}_p^a \gamma_\mu B_r^p] (V_r)_a^r \\ + \frac{i}{\sqrt{2}} f^S \bar{B}_p^a \gamma_\mu B_p^a \omega_r^0, \quad (5)$$

где $(V_\mu)_\rho^\alpha$ и ω_μ° - волновые функции октуплета и синглета векторных мезонов. Отсюда получаем, учитывая смешивание состояний ρ° и ω° мезонов,

$$\begin{aligned} g_{\rho NN} &= \frac{1}{2}(f^D - f^F), & g_{\rho \Xi \Xi} &= \frac{1}{2}(f^D + f^F), \\ g_{\omega NN} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta f^S + \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin \theta (3f^F + f^D), & g_{\omega \Xi \Xi} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta f^S - \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin \theta (3f^F - f^D), \\ g_{\eta NN} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta f^S - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos \theta (3f^F + f^D), & g_{\eta \Xi \Xi} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta f^S + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos \theta (3f^F - f^D), \\ g_{\rho \Sigma \Sigma} &= f^F, & g_{\rho \Lambda \Lambda} &= \frac{1}{\sqrt{3}} f^D, \\ g_{\omega \Sigma \Sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta f^S + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta f^D, & g_{\omega \Lambda \Lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta f^S + \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta f^D, \\ g_{\omega \Lambda \Lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta f^S + \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta f^D, & g_{\eta \Lambda \Lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta f^S - \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta f^D, \\ g_{\kappa^+ \Sigma N} &= \frac{1}{2}(f^D + f^F), & g_{\kappa^+ \Xi \Xi} &= \frac{1}{2}(f^D - f^F), \\ g_{\kappa^+ \Lambda N} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(3f^F - f^D), & g_{\kappa^+ \Lambda \Xi} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}(3f^F + f^D). \end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, следствия R -инвариантности лагранжиана взаимодействия. Так как векторные мезоны из октуплета могут распадаться на два псевдоскалярных мезона, то их G' -четность равна +1. Следовательно, при R -отражении их волновые функции преобразуются следующим образом:

$$R V_\rho^\alpha R^{-1} = -V_\alpha^\beta$$

С другой стороны, при R -отражении билинейные комбинации волновых функций в лагранжиане (5) преобразуются следующим образом

$$R (\bar{B}_\rho^\alpha \chi_\mu B_\rho^\beta \pm \bar{B}_\rho^\beta \chi_\mu B_\rho^\alpha) R^{-1} = \pm (\bar{B}_\rho^\beta \chi_\mu B_\rho^\alpha \pm \bar{B}_\rho^\alpha \chi_\mu B_\rho^\beta).$$

Отсюда следует, что лагранжиан (5) R -инвариантен, только если $f^D = 0$. Аналогично, в зависимости от G' -четности псевдоскалярных мезонов одна из констант g^F и g^D в (1) равна нулю, если этот лагранжиан инвариантен относительно R -преобразования. Опыт показывает, что обе эти константы отличны от нуля, причем $g^D/g^F \approx \frac{3}{2}$. Это означает, по-видимому, что в действительности R -инвариантность не имеет места. Другим аргументом в пользу этого заключения является то, что R -инвариантность требует, например, существования сопряженного декуплета $D(0,3)$ вместе с декуплетом барионных резонансов $D(3,0)$, так как один из этих мультиплетов переходит в другой при R -преобразовании, а такого сопряженного декуплета до сих пор еще не было обнаружено.

§ 2. Соотношения между константами распадов резонансов

Применим теперь развитый в предыдущем параграфе метод к изучению соотношений между константами распадов мезонных и барионных резонансов. Рассмотрим сначала распады векторного мезона ω° , являющегося унитарным синглетом, на два псевдоскалярных мезона из октуплета. Матричный элемент, инвариантный относительно группы $SU(3)$, имеет следующую унитарную структуру:

$$M_{\omega^\circ \rightarrow \rho\rho} = f \omega^\circ \gamma_\mu \bar{P}_\rho^\alpha(q_1) P_\alpha^\beta(q_2) = f \omega^\circ \gamma_\mu \bar{P}_\rho [P(q_2) \bar{P}(q_1)], \quad (7)$$

где q_1 и q_2 - импульсы псевдоскалярных мезонов.

При зарядовом сопряжении C этот матричный элемент меняет знак, так как

$$C \omega^\circ C^{-1} = -\omega^\circ, \quad C P_\rho^\alpha C^{-1} = P_\rho^\alpha$$

(см. главу III, п. II, § 2). Следовательно, требование инвариантности S -матрицы относительно зарядового сопряжения, т.е. сохранение C -четности, запрещает распад векторного синглета ω° на два псевдоскалярных мезона. Такой же запрет дает требование статистики Бозе: полная волновая функция одинаковых бозонов симметрична относительно перестановки этих частиц. Так как два псевдоскалярных мезона, рождающихся в распаде векторного мезона, находятся в P -состоянии, и пространственная часть их волновой функции антисимметрична относительно перестановки псевдоскалярных мезонов, то унитарная часть волновой функции должна быть также антисимметричной. С другой стороны, унитарная часть (7) матричного элемента распада $\omega^\circ \rightarrow P + P$ симметрична относительно перестановки псевдоскалярных мезонов ($S_P [P(q_1) \bar{P}(q_2)] = S_P [P(q_2) \bar{P}(q_1)]$) в противоречии с выводом о том, что унитарная часть волновой функции антисимметрична. Таким образом, требование статистики Бозе также запрещает распады синглета ω° на два псевдоскалярных мезона:

$$M_{\omega^\circ \rightarrow \rho\rho} = 0. \quad (8)$$

Аналогично, из C -инвариантности или из требования статистики Бозе следует, что в распаде октуплета векторных мезонов на два псевдоскалярных мезона из октуплета дает вклад только связь типа F , а константа связи типа D равна нулю, т.е.

$$\begin{aligned} M_{V \rightarrow \rho\rho} &= g V_\rho^\alpha(\vec{r}) [P_\alpha^\beta(q_1) \bar{P}_\beta^\gamma(q_2) - P_\alpha^\gamma(q_2) \bar{P}_\beta^\beta(q_1)] \\ &= g S_P \{ V(\vec{r}) [P(q_1) \bar{P}(q_2) - \bar{P}(q_2) P(q_1)] \}. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая смешивание между ρ° и ω° -мезонами, мы получаем отсюда константы связи для конкретных распадов

$$g_{\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0} = \sqrt{2} g, \quad g_{\rho^+ \rightarrow \pi^+ \eta} = 0, \quad (10)$$

$$g_{\rho^+ \rightarrow \kappa^+ \pi^0} = \frac{1}{\sqrt{2}} g, \quad g_{\rho^+ \rightarrow \kappa^+ \kappa^0} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta g,$$

где θ - угол ρ - ω -смешивания. Таким образом, в унитарной симметрии константы взаимодействия для распадов векторных мезонов на пары псевдоскалярных мезонов связаны соотношением

$$g_{\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0} : g_{\rho^+ \rightarrow \kappa^+ \pi^0} : g_{\rho^+ \rightarrow \kappa^+ \kappa^0} = 1 : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{2}, \quad (11)$$

$$g_{\rho^+ \rightarrow \pi^+ \eta} = 0.$$

Соотношения между константами процессов в (10) и константами других наблюдаемых распадов можно получить из изотопической инвариантности. Если массы всех частиц в одном унитарном мультиплете были бы одинаковыми, то из соотношений (II) мы получили бы сразу соотношения между вероятностями соответствующих распадов. Однако из-за нарушения симметрии массы частиц в каждом мультиплете не равны между собой, и необходимо учесть разницу кинематических факторов в выражениях вероятностей. В следующем параграфе будут получены соотношения между вероятностями в предположении о том, что для констант связи имеет место соотношение, вытекающие из унитарной симметрии.

В отличие от истинно нейтральных векторных мезонов истинно нейтральные мезоны 2^+ имеют C -четность $+1$. Поэтому C -инвариантность не запрещает распады мезона 2^+ , являющегося унитарным синглетом и обозначаемого через ω^0 , на два псевдоскалярных мезона из октуплета. Эти распады также не запрещены требованием статистики Бозе, поскольку рождающиеся псевдоскалярные мезоны находятся в D^+ -состоянии, и пространственная часть волновой функции двух псевдоскалярных мезонов симметрична. Матричный элемент рассматриваемых распадов имеет следующую унитарную структуру:

$$M_{\omega^0 \rightarrow PP} = g \omega^0 \gamma^{\mu\nu} [\bar{P}(q_1) \bar{P}(q_2)] \quad (12)$$

Что касается распадов октуплета мезонов 2^+ на пары псевдоскалярных мезонов из октуплета, то из C -инвариантности или из требования статистики Бозе следует, что только связь типа D дает вклад:

$$M_{T \rightarrow PP} = f \gamma^{\mu\nu} [\bar{P}_\alpha^r(q_1) \bar{P}_\beta^s(q_2) + \bar{P}_\alpha^s(q_2) \bar{P}_\beta^r(q_1)] = f \gamma^{\mu\nu} \{ T(\tau) [\bar{P}(q_1) \bar{P}(q_2) + \bar{P}(q_2) \bar{P}(q_1)] \} \quad (13)$$

Как и в главе III, частицы из октуплета мезонов 2^+ обозначим через g^+ , K^+ , \tilde{K}^+ и g^0 , а смешанные состояния g^0 и ω^0 - через g' и ω' . Учитывая смешивание между g^0 и ω^0 , из (12) и (13) получим выражения констант связи конкретных распадов через g и f .

$$\begin{aligned} g_{g^+ \rightarrow K^+ \tilde{K}^0} &= f, & g_{g^+ \rightarrow \pi^+ \eta} &= \sqrt{\frac{2}{3}} f, \\ g_{K^+ \rightarrow K^+ \pi^0} &= f, & g_{K^+ \rightarrow K^+ \eta} &= -\frac{1}{\sqrt{6}} f, \\ g_{g^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0} &= \sqrt{\frac{2}{3}} f \cos \theta' - g \sin \theta', & g_{\omega^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0} &= \sqrt{\frac{2}{3}} f \sin \theta' + g \cos \theta', \\ g_{g^+ \rightarrow K^+ K^0} &= -\frac{1}{\sqrt{6}} f \cos \theta' - g \sin \theta', & g_{\omega^+ \rightarrow K^+ K^0} &= -\frac{1}{\sqrt{6}} f \sin \theta' + g \cos \theta', \\ g_{g^+ \rightarrow \eta \eta} &= -\sqrt{\frac{2}{3}} f \cos \theta' - g \sin \theta', & g_{\omega^+ \rightarrow \eta \eta} &= -\sqrt{\frac{2}{3}} f \sin \theta' + g \cos \theta', \end{aligned} \quad (14)$$

где θ' - угол смешивания между g^0 и ω^0 - мезонами. Таким образом, мы имеем следующие соотношения между константами распадов мезонов 2^+ на два псевдоскалярных мезона

$$g_{g^+ \rightarrow K^+ \tilde{K}^0} : g_{g^+ \rightarrow \pi^+ \eta} : g_{K^+ \rightarrow K^+ \pi^0} : g_{K^+ \rightarrow K^+ \eta} = 1 : \sqrt{\frac{2}{3}} : 1 : \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (15)$$

$$3g_{g^+ \rightarrow \eta \eta} + g_{g^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0} = 4g_{g^+ \rightarrow K^+ K^0}, \quad 3g_{\omega^+ \rightarrow \eta \eta} + g_{\omega^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0} = 4g_{\omega^+ \rightarrow K^+ K^0} \quad (16)$$

$$|g_{g^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0}|^2 + |g_{\omega^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0}|^2 = |g_{g^+ \rightarrow \eta \eta}|^2 + |g_{\omega^+ \rightarrow \eta \eta}|^2 \quad (17)$$

$$|g_{g^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0}|^2 + |g_{\omega^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0}|^2 = |g_{g^+ \rightarrow K^+ K^0}|^2 + |g_{\omega^+ \rightarrow K^+ K^0}|^2 + \frac{1}{2} |g_{g^+ \rightarrow K^+ \tilde{K}^0}|^2 \quad (18)$$

не считая изотопических соотношений. В частном случае, когда $\cos \theta' = \sqrt{\frac{2}{3}}$, мы имеем еще два простых соотношения:

$$g_{\omega^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0} : g_{g^+ \rightarrow K^+ K^0} = -\sqrt{2}, \quad (19)$$

$$g_{\omega^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0} - g_{\omega^+ \rightarrow \eta \eta} = \frac{2\sqrt{2}}{3} g_{g^+ \rightarrow K^+ \tilde{K}^0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (g_{g^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0} - g_{g^+ \rightarrow \eta \eta}). \quad (20)$$

Из соотношений (15) - (20) можно получить соотношения между вероятностями распада, учитывая разницу фазовых объемов различных распадов.

Мезоны 2^+ могут распадаться на псевдоскалярный и векторный мезоны. Из C -инвариантности и инвариантности относительно группы $SU(3)$ следует, что матричные элементы этих распадов равны:

$$M_{\omega^0 \rightarrow \omega^0 P} = 0, \quad (21)$$

$$M_{\omega^0 \rightarrow VP} = 0, \quad (22)$$

$$M_{T \rightarrow \omega^0 P} = 0, \quad (23)$$

$$M_{T \rightarrow VP} = g \gamma^{\mu\nu} [\bar{V}_\alpha^r \bar{P}_\beta^s - \bar{V}_\alpha^s \bar{P}_\beta^r] \quad (24)$$

В данном случае константы взаимодействия для всех распадов выражаются через одну произвольную константу

$$\begin{aligned} g_{g^+ \rightarrow g^+ \pi^0} &= \sqrt{2} g, & g_{g^+ \rightarrow g^+ \eta} &= 0, \\ g_{g^+ \rightarrow \omega \pi^+} &= 0, & g_{g^+ \rightarrow \eta \pi^+} &= 0, \\ g_{K^+ \rightarrow K^+ \pi^0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} g, & g_{K^+ \rightarrow K^+ \eta} &= \frac{1}{\sqrt{2}} g, \\ g_{K^+ \rightarrow K^+ \omega} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta' g, & g_{g^+ \rightarrow K^+ K^0} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta' g, \\ g_{g^+ \rightarrow g^+ \pi^-} &= 0, & g_{g^+ \rightarrow \omega \eta} &= 0, \\ g_{\omega^+ \rightarrow g^+ \pi^-} &= 0, & g_{\omega^+ \rightarrow \omega \eta} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, мы имеем следующие соотношения между константами распадов мезонов 2^+ на векторный и псевдоскалярный мезоны

$$g_{g^+ \rightarrow g^+ \pi^0} : g_{K^+ \rightarrow K^+ \pi^0} : g_{K^+ \rightarrow K^+ \eta} : g_{K^+ \rightarrow K^+ \omega} : g_{g^+ \rightarrow K^+ K^0} = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta' : \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta', \quad (26)$$

не считая изотопических соотношений. Отметим, что равенство нулю ряда констант в (25) является следствием сохранения G -четности.

Рассмотрим теперь распады декуплета барионных резонансов $3/2^+$ на октуплет барионов и октуплет псевдоскалярных мезонов. Матричные элементы этих распадов имеют следующую унитарную структуру:

$$M_{D \rightarrow BP} = g \bar{B}_\alpha^r \bar{P}_\beta^s D_{\alpha\beta} \epsilon^{\rho\sigma\tau} \quad (27)$$

Для констант связи конкретных процессов мы имеем с точностью до знака

$$g_{\Delta^{++} \rightarrow p \pi^+} = g, \quad g_{Y^{*+} \rightarrow \Lambda \pi^+} = \frac{1}{\sqrt{2}} g, \quad (28)$$

$$g_{Y^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \pi^0} = \frac{1}{\sqrt{6}} g, \quad g_{\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^- \pi^+} = \frac{1}{\sqrt{3}} g$$

т.е.

$$g_{\Delta^{++} \rightarrow p \pi^+} : g_{Y^{*+} \rightarrow \Lambda \pi^+} : g_{Y^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \pi^0} : g_{\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^- \pi^+} = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{6}} : \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (29)$$

Остальные соотношения между константами наблюдаемых распадов являются следствиями изотопической инвариантности.

В предыдущей главе мы обсудили возможность существования октетета барионных резонансов $3/2^- : N', \Sigma', \Lambda', \Xi'$. Матричные элементы распадов этого октетета на октет барионов $1/2^+$ и октет псевдоскалярных мезонов содержат две произвольные константы:

$$M_{B' \rightarrow B P} = g_1 \bar{P}^{\alpha} \bar{B}'^{\beta} B^{\gamma} + g_2 \bar{P}^{\alpha} \bar{B}'^{\beta} B^{\gamma} \alpha. \quad (30)$$

Подставляя в (30) матрицы P^{α} , B^{α} и B'^{α} , данные в главе III (п. II, § 2), мы можем получить соотношения между константами конкретных процессов:

$$g_{\Sigma'^+ \rightarrow \Lambda \pi^+} = g_{\Lambda'^+ \rightarrow \Sigma^+ \pi^+} = -g_{\Lambda'^+ \rightarrow \Lambda \pi^+}, \quad (31)$$

$$g_{\Xi'^0 \rightarrow \Xi^- \pi^+} = g_{\Sigma'^+ \rightarrow p \bar{K}^0}, \quad (32)$$

$$g_{\Xi'^0 \rightarrow \Sigma^+ \bar{K}^0} = g_{\Sigma'^+ \rightarrow n \pi^+}, \quad (33)$$

$$g_{\Xi'^0 \rightarrow \Lambda \bar{K}^0} = g_{\Sigma'^+ \rightarrow p \pi^+}. \quad (34)$$

Если существует барионный синглет Λ'' , то константы связи всех распадов этого бариона на барион $1/2^+$ и псевдоскалярный мезон равны между собой

$$g_{\Lambda'' \rightarrow \Sigma^+ \pi^-} = g_{\Lambda'' \rightarrow p \bar{K}^-} = g_{\Lambda'' \rightarrow \Lambda \pi^0}. \quad (35)$$

§ 3. Соотношения между вероятностями

Для того, чтобы получить соотношения между вероятностями распадов, знать соотношения между константами не достаточно, поскольку кинематические факторы в выражениях вероятностей зависят от масс частиц, а частицы в каждом унитарном мультиплете в действительности имеют разные массы. Иначе говоря, для каждого типа распада необходимо иметь выражение вероятности через константу связи и массы распадающейся и рождающихся частиц.

Мы можем показать, что матричные элементы M и вероятности W типов распада, рассмотренных в предыдущем параграфе, имеют вид:

Распад $1^- \rightarrow 0^+ 0^-$

$$M = g_i (q_1 - q_2)_{\mu} \bar{q}(q_2) \bar{q}(q_1) V_{\mu}(p),$$

где $q(q_i)$ и q_i - волновые функции и импульсы псевдоскалярных мезонов, $V_{\mu}(p)$ и p - волновая функция и импульс векторного мезона;

$$W = \frac{|g_i|^2}{6\pi M^2} |\vec{k}|^3, \quad (36)$$

где M - масса векторного мезона; m_i - массы псевдоскалярных мезонов; \vec{k} - трехмерный импульс рождающихся частиц в системе центра масс:

$$|\vec{k}| = \frac{M}{2} \sqrt{1 - 2 \frac{m_1^2 + m_2^2}{M^2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{M^4}}$$

Распад $2^+ \rightarrow 0^- + 0^-$

$$M = g_i (q_1 - q_2)_{\mu} (q_1 - q_2)_{\nu} \bar{q}(q_1) \bar{q}(q_2) T_{\mu\nu}(p),$$

где $T_{\mu\nu}(p)$ - волновая функция мезона 2^+ с импульсом p ;

$$W = \frac{4}{15\pi} \frac{|g_i|^2}{M^2} |\vec{k}|^5, \quad (37)$$

где M - масса мезона 2^+ , \vec{k} - трехмерный импульс рождающихся частиц в системе центра масс.

Распад $2^+ \rightarrow 1^- + 0^-$

$$M = g_i \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} (q_1 - q_2)_{\mu} p_{\nu} \bar{V}_{\sigma}(q_1) \bar{q}(q_2) T_{\sigma\tau}(p) (q_1 - q_2)_{\epsilon},$$

где $T_{\sigma\tau}(p)$, $V_{\sigma}(q_i)$ и $q(q_i)$ - волновые функции мезонов 2^+ , 1^- и 0^- с импульсами p , q_1 и q_2 соответственно;

$$W = \frac{2}{5\pi} |g_i|^2 |\vec{k}|^5, \quad (38)$$

где M , m_1 и m_2 - массы мезонов 2^+ , 1^- и 0^- , соответственно, \vec{k} - трехмерный импульс рождающихся частиц в системе центра масс.

Распад $3/2^+ \rightarrow 1/2^+ + 0^-$

$$M = g_i \bar{u}(p_2) u_{\mu}(p_1) q_{\nu} \bar{q}(q),$$

где $u_{\mu}(p_1)$, $u(p_2)$ и $q(q)$ - волновые функции барионов $3/2^+$, $1/2^+$ и мезона 0^- с импульсами p_1 , p_2 и q , соответственно;

$$W = \frac{|g_i|^2}{24\pi} \frac{[(M_1 + M_2)^2 - m^2]}{M_1^2} |\vec{k}|^3, \quad (39)$$

где M_1 , M_2 и m - массы барионов $3/2^+$, $1/2^+$ и мезона 0^- , соответственно, \vec{k} - трехмерный импульс рождающихся частиц в системе центра масс.

Распад $3/2^- \rightarrow 1/2^+ + 0^-$

$$M = g_i \bar{u}(p_2) \gamma_5 u_{\mu}(p_1) q_{\nu} \bar{q}(q),$$

$$W = \frac{|g_i|^2}{24\pi} \frac{[(M_1 - M_2)^2 - m^2]}{M_1^2} |\vec{k}|^3. \quad (40)$$

Здесь использованы такие же обозначения, как и в предыдущем случае.

На основе формул для вероятностей (36) - (40) мы можем получить соотношения между вероятностями распадов, рассмотренных в предыдущем параграфе, в предположении о том, что для констант связи имеют место соотношения, являющиеся следствиями унитарной симметрии. Отметим, что в случае, когда для одной частицы существуют разные изотопические каналы распада, необходимо сложить вероятности всех соответствующих распадов. Например, по определению

$$W(Y^* \rightarrow \Sigma \pi) = W(Y^* \rightarrow \Sigma^+ \pi^0) + W(Y^* \rightarrow \Sigma^0 \pi^+) =$$

$$= W(\gamma^{*0} \rightarrow \Sigma^+ \pi^-) + W(\gamma^{*0} \rightarrow \Sigma^0 \pi^0) + W(\gamma^{*0} \rightarrow \Sigma^- \pi^+).$$

Полученные соотношения между вероятностями для четырех первых типов распада даны в таблицах I-IV. В таблице V даны соотношения между вероятностями распадов $3/2^- \rightarrow 1/2^+ + 0^-$ в случае, когда октуплет барионов $3/2^-$ состоит из частиц $N'(1512)$, $\Sigma'(1660)$, $\Lambda'(1668)$, $\Xi'(1820)$, а $\Lambda''(1520)$ является синглетом. В таблице VI даны соотношения между вероятностями распадов $3/2^- \rightarrow 1/2^+ + 0^-$ в другом случае, когда октуплет образуют $N'(1512)$, $\Sigma'(1660)$, $\Lambda'(1520)$ и $\Xi'(1598)$. Для сравнения в этих таблицах указаны также экспериментальные данные.

Таблица I

Отношение вероятностей	Теоретическое предсказание	Экспериментальное значение
$\frac{W(\rho \rightarrow \pi \eta)}{W(\rho \rightarrow 2\pi)}$	0	
$\frac{W(K^* \rightarrow K\pi)}{W(\rho \rightarrow 2\pi)}$	0,28	$0,47 \pm 0,03$
$\frac{W(\rho \rightarrow K\bar{K})}{W(\rho \rightarrow 2\pi)}$	0,022	$0,023 \pm 0,008$

Таблица II

Отношение вероятностей	Теоретическое предсказание	Экспериментальное значение
$\frac{W(\rho' \rightarrow \pi \eta)}{W(\rho' \rightarrow K\bar{K})}$	1,83	$0,83 \pm 0,5$
$\frac{W(K' \rightarrow K\eta)}{W(\rho' \rightarrow K\bar{K})}$	0,25	< 1
$\frac{W(K' \rightarrow K\pi)}{W(\rho' \rightarrow K\bar{K})}$	7,5	6 ± 5
$\frac{W(\rho' \rightarrow 2\pi) + 1,9 W(\omega' \rightarrow 2\pi)}{W(\rho' \rightarrow 2\eta) + 1,2 W(\omega' \rightarrow 2\eta)}$	17	
$\frac{W(\rho' \rightarrow 2\pi) + 1,9 W(\omega' \rightarrow 2\pi)}{W(\rho' \rightarrow K\bar{K}) + 5,4 W(\omega' \rightarrow K\bar{K}) + 6,2 W(\rho' \rightarrow K\bar{K})}$	2,7	

Таблица III

Отношение вероятностей	Теоретическое значение	Экспериментальное значение
$\frac{W(K' \rightarrow K^* \pi)}{W(\rho' \rightarrow \rho \pi)}$	0,37	$0,63 \pm 0,3$
$\frac{W(K' \rightarrow K \rho)}{W(\rho' \rightarrow \rho \pi)}$	0,115	$0,20 \pm 0,09$
$\frac{W(K' \rightarrow \omega K)}{W(\rho' \rightarrow \rho \pi)}$	0,035	$0,1 \pm 0,07$
$\frac{W(\rho' \rightarrow K^* K)}{W(\rho' \rightarrow \rho \pi)}$	0,0037	

Таблица IV

Отношение вероятностей	Теоретическое значение	Экспериментальное значение
$\frac{W(\gamma^* \rightarrow \Sigma \pi)}{W(\Delta \rightarrow N \pi)}$	0,043	$0,02 \pm 0,01$
$\frac{W(\gamma^* \rightarrow \Lambda \pi)}{W(\Delta \rightarrow N \pi)}$	0,355	$0,4 \pm 0,05$
$\frac{W(\Xi^* \rightarrow \Xi \pi)}{W(\Delta \rightarrow N \pi)}$	0,08	$0,06 \pm 0,02$

Таблица V

Отношение вероятностей	Теоретическое значение	Экспериментальное значение
$\frac{W(\Lambda' \rightarrow \Sigma \pi)}{W(\Sigma' \rightarrow \Lambda \pi)}$	1,5	
$\frac{W(\Lambda' \rightarrow \Lambda \eta)}{W(\Sigma' \rightarrow \Lambda \pi)}$	0,0923	
$\frac{W(\Xi' \rightarrow \Xi \pi)}{W(\Sigma' \rightarrow N \bar{K})}$	1,32	$0,78 \pm 0,07$
$\frac{W(\Xi' \rightarrow \Sigma K)}{W(N' \rightarrow N \pi)}$	0,106	$0,080 \pm 0,007$
$\frac{W(\Xi' \rightarrow \Lambda \bar{K})}{W(N' \rightarrow \omega N \eta)}$	182	
$\frac{W(\Lambda'' \rightarrow N \bar{K})}{W(\Lambda'' \rightarrow \Sigma \pi)}$	0,5	$0,55 \pm 0,07$

Таблица У1

Отношение вероятностей	Теоретическое значение	Экспериментальное значение
$\frac{W(\Sigma' \rightarrow \Lambda \pi)}{W(\Lambda' \rightarrow \Sigma \pi)}$	3,7	$0,30 \pm 0,04$
$\frac{W(\Xi' \rightarrow \Xi \pi)}{W(\Sigma' \rightarrow N \tilde{K})}$	2,4	

§ 4. Следствия сохранения U-спина и V-спина

Группа унитарной симметрии содержит три подгруппы SU(2), которые мы назвали группами T-спина, U-спина и V-спина (см. главу III, п. I, § 4). Требование сохранения T-спина, т.е. инвариантность относительно T-подгруппы, приводит к ряду изотопических соотношений между амплитудами процессов распада, рассеяния и рождения частиц. Аналогично, сохранение U-спина или V-спина должно привести к новым соотношениям, не совпадающим со следствиями изотопической инвариантности. Разумеется, что все соотношения, являющиеся следствиями сохранения T-спина, U-спина или V-спина, должны быть получены при помощи развитого выше метода. Однако при изучении конкретных процессов иногда достаточно рассмотреть следствия сохранения U-спина или V-спина. В таком случае удобно рассмотреть волновые функции частиц как спиноры U-подгруппы или V-подгруппы и применить технику группы SU(2). Так, например, мы имеем следующие U-дублеты

$$\begin{pmatrix} \rho^+ \\ \tilde{K}^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \tilde{K}^0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ \frac{1}{2} \pi^+ + \frac{\sqrt{3}}{2} \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$$

с U = 1/2 и U-триплет

с U = 1, по аналогии с T-дублетами

с T = 1/2 и T-триплетом

с T = 1. Из сохранения T-спина (вернее из T-зарядовой симметрии) вытекает следующее соотношение между константами связи для распадов K'-мезона на K- и pi-мезоны

$$g_{K^0 \rightarrow K^+ \pi^-} = g_{K^+ \rightarrow K^0 \pi^+}$$

Аналогично, в силу сохранения U-спина (вернее из U-зарядовой симметрии) имеем:

$$g_{K^0 \rightarrow \pi^+ K^-} = g_{\rho^+ \rightarrow \tilde{K}^0 K^+}$$

Получаем, таким образом, одно из соотношений (15).

В главе III (см. п. I, § I) мы показали, что задание изотопической подгруппы и двух дискретных преобразований - U-зарядовой симметрии и V-зарядовой симметрии полностью эквивалентно заданию группы SU(3) в целом. Это означает, что для изучения следствий унитарной симметрии

достаточно исходить из изотопических соотношений и ко всем этим соотношениям применить

U-зарядовую симметрию и V-зарядовую симметрию. Этот метод, вообще говоря, весьма громоздок, так как U-зарядовая и V-зарядовая симметрии обычно превращают физические (наблюдаемые) процессы в нефизические (ненаблюдаемые) процессы, в которых либо все начальные частицы являются странными частицами (для рассеяния), либо масса распадающейся частицы меньше суммы масс рождающихся частиц (для распада). Однако для изучения некоторых конкретных процессов этот метод может оказаться весьма удобным. Так, например, мы знаем изотопическое соотношение

$$g_{K^0 \rightarrow K^+ \pi^-} = g_{K^+ \rightarrow K^0 \pi^+}$$

При U-зарядовой симметрии (с точностью до знака волновой функции)

$$K^0 \rightarrow \rho^+, K^+ \rightarrow K^-, \pi^+ \rightarrow K^0, K^+ \rightarrow K^0, K^0 \rightarrow \pi^-, \pi^+ \rightarrow \tilde{K}^0,$$

и это соотношение превращается в

$$g_{\rho^+ \rightarrow K^0 K^0} = g_{K^+ \rightarrow \pi^+ \tilde{K}^0}$$

Получаем, таким образом, одно из соотношений в (15).

II. АМПЛИТУДЫ ПРОЦЕССОВ РАССЕЯНИЯ И РОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ

§ I. Унитарная структура амплитуд процессов рассеяния и рождения частиц в сильных взаимодействиях

Мы показали, что в теории унитарной симметрии константы связи для распадов частиц в каждом унитарном мультиплете связаны некоторыми соотношениями. Аналогично, из требования инвариантности S-матрицы относительно преобразований группы унитарной симметрии SU(3) вытекают различные соотношения между амплитудами процессов рассеяния и рождения частиц в сильных взаимодействиях. Теперь мы изучим следствия унитарной симметрии в некоторых таких процессах.

Рассмотрим прежде всего процессы типа

$$P + B \rightarrow P' + B', \quad (I)$$

где P и P' - унитарные октететы псевдоскалярных мезонов, а B и B' - унитарные октететы барионов 1/2+. Обозначим через q и q' 4-импульсы начального и конечного мезонов, через p и p' 4-импульсы начального и конечного барионов, u(p) и u(p') пространственные части волновых функций барионов (или короче - пространственные волновые функции барионов), P_p^alpha, P_p'^alpha, B_p^alpha и B_p'^alpha - унитарные части волновых функций (или унитарные волновые функции) мезонов и барионов, соответственно. Как известно, матричный элемент процесса (I) содержит две независимые спиновые структуры

$$\Gamma_1 = \bar{u}(p') u(p), \quad \Gamma_2 = \bar{u}(p') \hat{Q} u(p), \quad (4I)$$

где Q = 1/2 (q + q'). Что касается унитарной структуры, то в матричный элемент процесса (I) должны входить инварианты относительно группы SU(3) линейные комбинации произведений

$$\bar{B}'^alpha P'^alpha B^alpha P^alpha$$

Мы знаем, что для образования инвариантов из таких произведений необходимо провести суммирование по всем парам нижних и верхних индексов. Если унитарные волновые функции октуплета представим в виде матриц 3×3 , то суммирование по паре индексов из различных матриц означает умножение этих матриц

$$A_{\alpha}^{\beta} B_{\beta}^{\gamma} = (AB)_{\alpha}^{\gamma},$$

а суммирование по паре индексов из одной матрицы дает шпур этой матрицы

$$(AB)_{\alpha}^{\alpha} = \text{sp}(AB).$$

Нетрудно увидеть, что из произведений четырех волновых функций четырех рассматриваемых октуплетов можно образовать девять следующих инвариантов

$$\begin{aligned} & \text{sp}(\bar{B}'B) \text{sp}(\bar{P}'P), \quad \text{sp}(\bar{B}'\bar{P}') \text{sp}(BP), \quad \text{sp}(\bar{B}'P) \text{sp}(B\bar{P}'), \\ & \text{sp}(\bar{B}'B\bar{P}'P), \quad \text{sp}(\bar{B}'B\bar{P}'P'), \quad \text{sp}(B\bar{B}'\bar{P}'P), \\ & \text{sp}(B\bar{B}'P\bar{P}'), \quad \text{sp}(\bar{B}'\bar{P}'BP), \quad \text{sp}(\bar{B}'P\bar{B}'P'). \end{aligned} \quad (42)$$

Может случиться, что не все эти инварианты являются независимыми. Для того чтобы определить число независимых инвариантов, мы посмотрим прежде всего, какие неприводимые представления содержатся в произведении волновых функций частиц в начальном или в конечном состоянии. Из произведений $B_{\beta}^{\alpha} P_{\alpha}^{\beta}$ можно образовать следующие неприводимые представления:

1) инвариант $B_{\beta}^{\alpha} P_{\alpha}^{\beta}$ - путем суммирования по всем парам верхнего и нижнего индексов;

2) два октуплета - путем суммирования по каждой возможной паре индексов и вычитания шпура:

$$B_{\beta}^{\alpha} P_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\gamma}^{\alpha} B_{\beta}^{\delta} P_{\delta}^{\beta}, \quad B_{\gamma}^{\beta} P_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{3} \delta_{\gamma}^{\alpha} B_{\beta}^{\delta} P_{\delta}^{\beta};$$

3) декуплет $D_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} D_{\{\beta\gamma\}}^{[\alpha]}$ - путем симметризации по нижним индексам и антисимметризации по верхним индексам

$$X_{\{\beta\gamma\}}^{[\alpha]} = B_{\beta}^{\alpha} P_{\gamma}^{\beta} + B_{\gamma}^{\alpha} P_{\beta}^{\gamma} - B_{\beta}^{\alpha} P_{\gamma}^{\beta} - B_{\gamma}^{\alpha} P_{\beta}^{\gamma}$$

и вычитания шпура

$$D_{\{\beta\gamma\}}^{[\alpha]} = X_{\{\beta\gamma\}}^{[\alpha]} - \frac{1}{2} \left(\delta_{\beta}^{\alpha} X_{\{\beta\gamma\}}^{[\alpha]} + \delta_{\gamma}^{\alpha} X_{\{\beta\gamma\}}^{[\alpha]} - \delta_{\beta}^{\alpha} X_{\{\alpha\gamma\}}^{[\beta]} - \delta_{\gamma}^{\alpha} X_{\{\alpha\beta\}}^{[\gamma]} \right);$$

4) сопряженный декуплет - путем симметризации по верхним индексам, антисимметризации по нижним индексам и вычитания шпура;

5) 27-плет $\Pi_{\{\beta\gamma\}}^{\{\alpha\beta\}}$ - путем симметризации по верхним индексам и по нижним индексам

$$V_{\{\beta\gamma\}}^{\{\alpha\beta\}} = B_{\beta}^{\alpha} P_{\gamma}^{\beta} + B_{\gamma}^{\alpha} P_{\beta}^{\gamma} + B_{\beta}^{\alpha} P_{\gamma}^{\beta} + B_{\gamma}^{\alpha} P_{\beta}^{\gamma}$$

и вычитания шпура

$$\Pi_{\{\beta\gamma\}}^{\{\alpha\beta\}} = V_{\{\beta\gamma\}}^{\{\alpha\beta\}} - \frac{1}{6} \left(\delta_{\beta}^{\alpha} V_{\{\beta\gamma\}}^{\{\alpha\beta\}} + \delta_{\gamma}^{\alpha} V_{\{\beta\gamma\}}^{\{\alpha\beta\}} + \delta_{\beta}^{\alpha} V_{\{\alpha\beta\}}^{\{\beta\gamma\}} + \delta_{\gamma}^{\alpha} V_{\{\alpha\beta\}}^{\{\beta\gamma\}} \right).$$

В качестве двух независимых окуплетов удобно выбрать симметричную и антисимметричную комбинации

$$B_p^\alpha P_p^\beta + B_p^\beta P_p^\alpha - \frac{2}{3} \delta_p^\alpha \delta_p^\beta B_p^\gamma P_p^\delta, \quad B_p^\alpha P_p^\beta - B_p^\beta P_p^\alpha$$

Симметричный окуплет обозначим через δ_s , а антисимметричный - через δ_a . Таким образом, волновая функция системы в начальном состоянии является суперпозицией следующих неприводимых представлений: 1, δ_s , δ_a , 10, $\bar{10}$, 27 (см. также главу III, п. I, § 2). Волновая функция системы в конечном состоянии также имеет аналогичный вид. Из инвариантности относительно группы $SU(3)$ следует, что матричный элемент S -матрицы равен нулю, если начальное и конечное состояния принадлежат различным неприводимым представлениям группы $SU(3)$. Это означает, что отличны от нуля только матричные элементы восьми следующих переходов:

$$1 \rightarrow 1, \quad \delta_s \rightarrow \delta_s, \quad \delta_a \rightarrow \delta_a, \quad \delta_s \rightarrow \delta_a \\ \delta_a \rightarrow \delta_s, \quad 10 \rightarrow 10, \quad \bar{10} \rightarrow \bar{10}, \quad 27 \rightarrow 27.$$

Таким образом, существуют восемь независимых унитарных амплитуд, инвариантных относительно группы $SU(3)$, через которые выражаются амплитуды всех процессов типа (I). Это означает, что среди девяти инвариантных унитарных амплитуд (42) только восемь являются независимыми, и они удовлетворяют некоторому тождеству. Это тождество всегда можно выбрать так, чтобы оно было полностью симметричным по отношению к перестановкам всех окуплетов. Тогда оно содержит явно комбинации структур (42), симметричные относительно перестановок всех окуплетов. Существуют две такие независимые комбинации: сумма трех первых амплитуд в (42) и сумма шести последних. Искомое тождество имеет вид:

$$a \left[\text{sp}(\bar{B}'B) \text{sp}(\bar{P}'P) + \text{sp}(\bar{B}'\bar{P}') \text{sp}(BP) + \text{sp}(\bar{B}'P) \text{sp}(B\bar{P}') \right] = \\ = b \left[\text{sp}(\bar{B}'\bar{P}'P) + \text{sp}(\bar{B}'P\bar{P}') + \text{sp}(B\bar{B}'\bar{P}'P) + \text{sp}(B\bar{B}'P\bar{P}') \right. \\ \left. + \text{sp}(\bar{B}'\bar{P}'BP) + \text{sp}(\bar{B}'PBP') \right], \quad (43)$$

где a и b - некоторые константы, причем без конкретного рассмотрения нельзя исключить случай, когда одна из них равна нулю. Представим матрицы B_p^α , \bar{B}_p^α , P_p^α , \bar{P}_p^α в виде

$$B_p^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)_p^\alpha B_i, \quad \bar{B}_p^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)_p^\alpha \bar{B}_i, \quad P_p^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)_p^\alpha P_i, \quad \bar{P}_p^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)_p^\alpha \bar{P}_i' \\ (\text{см. главу III, п. II, § I}). \text{ Из (43) мы получаем:}$$

$$a \left[\text{sp}(\lambda_i \lambda_j) \text{sp}(\lambda_k \lambda_l) + \text{sp}(\lambda_i \lambda_k) \text{sp}(\lambda_j \lambda_l) + \text{sp}(\lambda_i \lambda_l) \text{sp}(\lambda_j \lambda_k) \right] = \\ = b \left[\text{sp}(\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l) + \text{sp}(\lambda_i \lambda_j \lambda_l \lambda_k) + \text{sp}(\lambda_j \lambda_i \lambda_k \lambda_l) \right. \\ \left. + \text{sp}(\lambda_j \lambda_i \lambda_l \lambda_k) + \text{sp}(\lambda_i \lambda_k \lambda_j \lambda_l) + \text{sp}(\lambda_i \lambda_l \lambda_j \lambda_k) \right]. \quad (44)$$

Чтобы определить a и b , мы рассмотрим частный случай, когда $i = j = k = l = 3$. Тогда выражения в скобках в обеих частях соотношения (44) равны 12, и мы получаем $12a = 12b$, $a = b$.

Таким образом, между девятью амплитудами (42) существует тождество

$$\begin{aligned} & \text{sp}(\bar{B}B) \text{sp}(\bar{P}'P) + \text{sp}(\bar{B}'\bar{P}') \text{sp}(BP) + \text{sp}(\bar{B}'P) \text{sp}(B\bar{P}') = \\ & = \text{sp}(\bar{B}'B\bar{P}'P) + \text{sp}(\bar{B}'B\bar{P}'P) + \text{sp}(B\bar{B}'\bar{P}'P) + \text{sp}(B\bar{B}'P\bar{P}') \\ & \quad + \text{sp}(\bar{B}'\bar{P}'BP) + \text{sp}(\bar{B}'P\bar{B}'\bar{P}'), \end{aligned} \quad (45)$$

и в качестве независимых инвариантных унитарных амплитуд можно выбрать следующие

$$\begin{aligned} T^1 &= \text{sp}(\bar{B}'B) \text{sp}(\bar{P}'P), \quad T^2 = \text{sp}(\bar{B}'\bar{P}') \text{sp}(BP), \quad T^3 = \text{sp}(\bar{B}'P) \text{sp}(B\bar{P}'), \\ T^4 &= \text{sp}(\bar{B}'B\bar{P}'P), \quad T^5 = \text{sp}(\bar{B}'B\bar{P}'P), \quad T^6 = \text{sp}(B\bar{B}'\bar{P}'P), \\ T^7 &= \text{sp}(B\bar{B}'P\bar{P}'), \quad T^8 = \text{sp}(\bar{B}'\bar{P}'BP) - \text{sp}(\bar{B}'P\bar{B}'\bar{P}'). \end{aligned} \quad (46)$$

Отметим, что при изучении соотношений между амплитудами процессов в принципе можно не заботиться о том, сколько амплитуд являются независимыми, и работать с лишними амплитудами. Дело в том, что коэффициенты этих амплитуд всегда можно выразить линейно через остальные, и амплитуды процессов содержат явно некоторые комбинации всех этих коэффициентов, так что число эффективных независимых коэффициентов равно числу независимых амплитуд.

Теперь можно уже написать общее выражение матричного элемента процесса (I). Этот матричный элемент содержит спиновые независимые амплитуды (41) и унитарные независимые амплитуды (46), т.е. имеет вид

$$M_I = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 \Gamma_i T^j F_i^j(s, t), \quad (47)$$

где $F_i^j(s, t)$ - 16 функций от инвариантных переменных

$$s = -(\hat{p} + \hat{q})^2, \quad t = -(\hat{p} - \hat{p}')^2.$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда процесс (I) является упругим процессом в том смысле, что B и B' являются одним и тем же барионным октетом, а P и P' - одним и тем же октетом псевдоскалярных мезонов: $B' = B$, $P' = P$. В этом случае мы имеем процесс рассеяния

$$P + B \rightarrow P + B,$$

который переходит в себя при отражении времени T , и из инвариантности относительно T -преобразования вытекают некоторые ограничения на произвольные функции $F_i^j(s, t)$. Отметим, что при T -преобразовании начальные частицы превращаются в конечные и наоборот. Поэтому унитарные волновые функции преобразуются следующим образом при T -преобразовании:

$$B_p^{\alpha} \rightarrow \bar{B}_p^{\beta}, \quad \bar{B}_p^{\alpha} \rightarrow B_p^{\beta}, \quad P_p^{\alpha} \rightarrow \bar{P}_p^{\beta}, \quad \bar{P}_p^{\alpha} \rightarrow P_p^{\beta}.$$

Найдем теперь соответствующие преобразования независимых инвариантных амплитуд вида (46) с $B' = B$, $P' = P$. Мы имеем, например,

$$\begin{aligned} \text{sp}(\bar{B}PBP) &= \bar{B}_p^{\beta} \bar{P}_p^{\gamma} B_p^{\delta} P_p^{\epsilon} \rightarrow B_p^{\alpha} P_p^{\beta} \bar{B}_p^{\gamma} \bar{P}_p^{\delta} = \bar{B}_p^{\gamma} P_p^{\beta} B_p^{\alpha} \bar{P}_p^{\delta} \\ &= \text{sp}(\bar{B}P\bar{B}P), \end{aligned}$$

$$\text{sp}(\bar{B}P\bar{B}P) \rightarrow \text{sp}(\bar{B}'P\bar{B}'P).$$

Отсюда следует, что при T -преобразовании амплитуда T^8 меняет знак. Аналогично, можно показать, что все первые семь амплитуд в (46) инвариантны относительно отражения времени. Итак при T -преобразовании

$$\begin{aligned} T^i &\rightarrow T^i, \quad i = 1, 2, \dots, 7 \\ T^8 &\rightarrow -T^8. \end{aligned} \quad (48)$$

Для того чтобы найти преобразования спиновых инвариантных амплитуд (41) отметим прежде всего, что при T -преобразовании конечная частица с импульсом \vec{p}' и поляризацией ϵ' превращается в начальную частицу с импульсом $-\vec{p}'$ и поляризацией $-\epsilon'$, и наоборот. Можно показать, что волновая функция бариона $1/2^+$ с импульсом $-\vec{p}'$ и поляризацией $-\epsilon'$ выражается антилинейно через волновую функцию этой же частицы с импульсом \vec{p}' и поляризацией ϵ' следующим образом:

$$u_{-\epsilon'}(-\vec{p}') = \gamma_4 U \bar{u}_{\epsilon'}(\vec{p}')^T, \quad (49)$$

где U - унитарная матрица, удовлетворяющая соотношениям

$$U^T = -U, \quad U \gamma_4^T U^{-1} = \gamma_4.$$

Аналогично, мы имеем^{x)}

$$\bar{u}_{-\epsilon'}(-\vec{p}') = u_{\epsilon'}(\vec{p}')^T U^{-1} \gamma_4. \quad (50)$$

^{x)} Докажем соотношения (49) и (50). Сделаем соответствующие преобразования уравнения Дира

$$(i\hat{p} + m)u(\vec{p}) = (i[\hat{p}_4 \gamma_4 + \vec{p} \vec{\gamma}] + m)u(\vec{p}) = 0.$$

Мы имеем:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{p})(i\hat{p} + m) &= 0, \quad (i\hat{p} + m)^T \bar{u}(\vec{p})^T = 0, \\ U(i\hat{p} + m)^T \bar{u}(\vec{p})^T &= (i\hat{p} + m)U \bar{u}(\vec{p})^T = 0, \\ \gamma_4(i\hat{p} + m)U \bar{u}(\vec{p})^T &= (i[\hat{p}_4 \gamma_4 - \vec{p} \vec{\gamma}] + m)\gamma_4 U \bar{u}(\vec{p})^T = 0. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\gamma_4 U \bar{u}(\vec{p})^T = u(-\vec{p}').$$

Это соотношение можно также переписать в виде

$$u(-\vec{p}') = \gamma_4 U \gamma_4^T u(\vec{p})^* = U u(\vec{p})^*.$$

Далее, пусть

$$\begin{aligned} \Sigma_3 u_{\alpha} &= \epsilon u_{\alpha}, \\ \Sigma_3 &= \frac{\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_2 \gamma_1}{2i} \end{aligned}$$

где

- оператор проекции спина на оси oz . Тогда, поскольку

$$U \Sigma_3^T = U \frac{\gamma_1^T \gamma_2^T - \gamma_2^T \gamma_1^T}{2i} = \frac{\gamma_2 \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_2}{2i} U = -\Sigma_3 U,$$

Итак, спинные амплитуды (41) преобразуются следующим образом при Γ -преобразовании:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') u(p) &\rightarrow u(p)^T u^{-1} \gamma_n \gamma_n u \bar{u}(p')^T = \bar{u}(p') u(p), \\ \bar{u}(p') : \hat{Q} u(p) &\rightarrow u(p)^T u^{-1} \gamma_n : (\gamma_n \hat{Q} - \vec{\nabla} \vec{Q}) \gamma_n u \bar{u}(p')^T \\ &= u(p)^T : \hat{Q}^T \bar{u}(p')^T = \bar{u}(p') : \hat{Q} u(p), \end{aligned}$$

т.е.

$$\Gamma_j \rightarrow \Gamma_j. \quad (51)$$

Так как матричный элемент (47) инвариантен относительно Γ -преобразования, то из трансформационных свойств (51) и (48) независимых спинных и унитарных амплитуд Γ_j и T^i следует, что две функции $F_i^j(\lambda, t)$ равны нулю. Таким образом, для упругих процессов только семь инвариантных унитарных амплитуд $T^i - T^j$ дают вклад

$$F_i^j(\lambda, t) = 0. \quad (52)$$

Общее выражение матричного элемента процесса

$$B_1 + B_2 \rightarrow B'_1 + B'_2 \quad (III)$$

где B_i и B'_i - октетлеты барионов, также можно получить аналогичным методом. Обозначим через $(B_2)_\rho^{\lambda'}$, $(B_2)_{\rho'}^{\lambda}$, $(B_2)_{\rho}^{\lambda}$ и $(B_2)_{\rho'}^{\lambda'}$ унитарные волновые функции. Тогда, по аналогии с (46) мы имеем следующие независимые унитарные амплитуды

$$\begin{aligned} T^1 &= sp(\bar{B}_2 B_2) sp(\bar{B}_2 B_2), \quad T^2 = sp(\bar{B}_2 B_2) sp(B_2 B_2), \quad T^3 = sp(\bar{B}_2 B_2) sp(\bar{B}_2 B_2), \\ T^4 &= sp(\bar{B}_2 B_2) sp(B_2 B_2), \quad T^5 = sp(\bar{B}_2 B_2) sp(B_2 B_2), \quad T^6 = sp(B_2 B_2) sp(B_2 B_2), \\ T^7 &= sp(B_2 B_2) sp(B_2 B_2), \quad T^8 = sp(\bar{B}_2 B_2) sp(B_2 B_2) - sp(B_2 B_2) sp(B_2 B_2). \end{aligned} \quad (53)$$

Если барионы в процессе (III) имеют спин и четность $1/2^+$, то существуют восемь спинных независимых амплитуд

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \bar{u}(p_2) u(p_2) \bar{u}(p_1) u(p_1), \quad \Gamma_2 = \bar{u}(p_2) : \hat{P}_2 u(p_2) \bar{u}(p_1) : \hat{P}_2 u(p_1), \\ \Gamma_3 &= \bar{u}(p_2) u(p_2) \bar{u}(p_1) : \hat{P}_2 u(p_1), \quad \Gamma_4 = \bar{u}(p_2) : \hat{P}_2 u(p_2) \bar{u}(p_1) u(p_1), \\ \Gamma_5 &= \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_2) \bar{u}(p_1) \gamma_5 u(p_1), \quad \Gamma_6 = \bar{u}(p_2) : \hat{P}_2 \gamma_5 u(p_2) \bar{u}(p_1) : \hat{P}_2 \gamma_5 u(p_1), \\ \Gamma_7 &= \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_2) \bar{u}(p_1) : \hat{P}_2 \gamma_5 u(p_1), \quad \Gamma_8 = \bar{u}(p_2) : \hat{P}_2 \gamma_5 u(p_2) \bar{u}(p_1) \gamma_5 u(p_1), \end{aligned} \quad (54)$$

то

$$\begin{aligned} \sum_3^* u_n^* &= \sum_3^T u_n^* = \epsilon u_n^*, \\ \text{и } \sum_3^T u_n^* &= -\sum_3^* u_n^* = \epsilon u_n^*, \end{aligned}$$

т.е.

$$\sum_3 (\gamma_n u \bar{u}_n^T) = -\epsilon (\gamma_n u \bar{u}_n^T).$$

Это означает, что

$$\gamma_n u \bar{u}_n^T = u_{-\epsilon}.$$

где $P_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, $P_2 = \frac{1}{2}(p_1' + p_2')$. Матричный элемент процесса (III) имеет общий вид

$$M_{II} = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^8 \Gamma_i T^j F_i^j(\lambda, t) \quad (55)$$

где $F_i^j(\lambda, t)$ - функции от инвариантных переменных

$$s = -(p_1 + p_2)^2, \quad t = -(p_1 - p_1')^2.$$

В частном случае, когда $B_1 = B_1'$, $B_2 = B_2'$, т.е. в случае упругого рассеяния, инвариантность относительно отражения времени дает некоторые ограничения на $F_i^j(\lambda, t)$. Как было показано, при Γ -преобразовании

$$\begin{aligned} \Gamma^i &\rightarrow \Gamma^i, \quad i = 1, 2, \dots, 7, \\ \Gamma^8 &\rightarrow -\Gamma^8. \end{aligned} \quad (56)$$

Поскольку

$$u \gamma_5^T u^{-1} = \gamma_5, \quad u(i \hat{P}_i \gamma_5^T) u^{-1} = -i \hat{P}_i \gamma_5,$$

то спинные амплитуды преобразуются следующим образом при Γ -преобразовании

$$\begin{aligned} \Gamma_j &\rightarrow \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, 6 \\ \Gamma_j &\rightarrow -\Gamma_j, \quad j = 7, 8. \end{aligned} \quad (57)$$

Матричный элемент (55) должен быть инвариантным относительно преобразований (56) и (57). Отсюда следует, что

$$F_i^j(\lambda, t) = 0 \quad (58)$$

если $j = 7, 8$, $i = 1, 2, \dots, 7$ и $j = 1, \dots, 6$, $i = 8$. Таким образом, матричный элемент упругого рассеяния октетлетов барионов $1/2^+$ имеет общий вид

$$M_{II} = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^6 \Gamma_i T^j F_i^j(\lambda, t) + \sum_{j=7,8} \Gamma_j T^j F_j^j(\lambda, t), \quad (59)$$

причем в унитарных амплитудах T^i мы положим $B_1' = B_1$, $B_2' = B_2$. Если же барионы в начальном и конечном состояниях являются одинаковыми частицами, то матричный элемент должен быть симметричным относительно перестановки $B_2 \leftrightarrow B_2$, $\bar{B}_1 \leftrightarrow \bar{B}_1$, $p_1 \leftrightarrow p_1$, $p_1' \leftrightarrow p_1'$. Отсюда получаем

$$F_i^3(\lambda, t) = F_i^4(\lambda, t). \quad (60)$$

Кроме того, из требования статистики Ферми вытекают некоторые свойства симметрии относительно замены t на u ,

$$u = -(p_1 - p_1')^2.$$

Однако, на этом останавливаться мы не будем.

Рассмотрим теперь процессы аннигиляции пар барион-антибарион

$$B + \bar{B} \rightarrow P + P', \quad (III)$$

где B и \bar{B} - октетлеты барионов $1/2^+$ и их античастиц, а P и P' - октетлеты псевдоскалярных мезонов. Обозначим через p и p' 4-импульсы бариона и антибариона, а через q и q' 4-импульсы мезонов P и P' . Как и в случае процесса (I), существуют две независимые спинные

амплитуды

$$\Gamma_1 = \bar{v}(p') u(p), \quad \Gamma_2 = \bar{v}(p') \hat{Q} u(p), \quad (61)$$

где $Q = \frac{1}{2}(1 - \gamma_4)$, и восемь независимых унитарных амплитуд, которые можно выбрать следующим образом

$$\begin{aligned} T^1 &= s_p(B\tilde{B}) s_p(\bar{P}\bar{P}'), & T^2 &= s_p(B\tilde{P}) s_p(\tilde{B}\bar{P}') - s_p(B\tilde{P}') s_p(\tilde{B}P), \\ T^3 &= s_p(B\tilde{P}) s_p(\tilde{B}\bar{P}') + s_p(B\tilde{P}') s_p(\tilde{B}P), & T^4 &= s_p[B\tilde{B}(\bar{P}\bar{P}' - \tilde{P}\tilde{P}')], \\ T^5 &= s_p[B\tilde{B}(\bar{P}\bar{P}' + \tilde{P}\tilde{P}')], & T^6 &= s_p[B\tilde{B}(\bar{P}\bar{P}' - \tilde{P}\tilde{P}')], \\ T^7 &= s_p[B\tilde{B}(\bar{P}\bar{P}' + \tilde{P}\tilde{P}')], & T^8 &= s_p[B\tilde{B}(\bar{P}\bar{P}' - \tilde{P}\tilde{P}')]. \end{aligned} \quad (62)$$

Матричный элемент процесса (III) имеет общий вид

$$M_{III} = \sum_{j=1}^8 \sum_{i=1}^8 \Gamma_j T^i F_i^j(\lambda, \nu), \quad (63)$$

причем в качестве инвариантных переменных удобно выбрать следующие

$$\lambda = -(p+p')^2, \quad \nu = \frac{1}{4}(p-p')^2(1-q^2).$$

Требование инвариантности S -матрицы относительно зарядового сопряжения приводит к некоторым ограничениям на $F_i^j(\lambda, \nu)$. Действительно, при C -преобразовании бариона с импульсом \vec{p} превращается в антибарион с тем же импульсом и обратно, а мезон с унитарной волновой функцией P_p^a превращается в мезон с волновой функцией P_p^a и т.д.

Поэтому унитарные амплитуды (62) преобразуются следующим образом

$$\begin{aligned} T^i &\rightarrow T^i, \quad i = 1, 3, 5, 7, 8 \\ T^i &\rightarrow -T^i, \quad i = 2, 4, 6. \end{aligned} \quad (64)$$

Что касается спиновых амплитуд (61), то C -преобразование приводит к замене $p \leftrightarrow p'$ и изменению знака каждой амплитуды, так как барион подчиняется статистике Ферми. Итак,

$$\bar{v}(p') u(p) \rightarrow -\bar{v}(p) u(p'), \quad \bar{v}(p') \hat{Q} u(p) \rightarrow -\bar{v}(p) \hat{Q} u(p').$$

Пользуясь соотношениями

$$u(p) = C \bar{v}(p')^T, \quad \bar{v}(p) = [C^{-1} u(p)]^T,$$

где C - матрица зарядового сопряжения

$$C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T, \quad C^T = -C,$$

мы видим, что при C -преобразовании спиновые амплитуды (61) преобразуются следующим образом

$$\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1, \quad \Gamma_2 \rightarrow -\Gamma_2. \quad (65)$$

Отметим, что при этом переменная λ не меняется, но переменная ν меняет знак:

$$F_i^j(\lambda, \nu) \rightarrow F_i^j(\lambda, -\nu). \quad (66)$$

Из (64) - (66) следует, что матричный элемент (63) может быть инвариантным относительно C -образования только если функции $F_i^j(\lambda, \nu)$ удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{aligned} F_i^j(\lambda, -\nu) &= F_i^j(\lambda, \nu) \text{ для } \begin{cases} j=1, & i=1,3,5,7,8 \\ j=2, & i=2,4,6, \end{cases} \\ F_i^j(\lambda, -\nu) &= -F_i^j(\lambda, \nu) \text{ для } \begin{cases} j=2, & i=1,3,5,7,8, \\ j=1, & i=2,4,6. \end{cases} \end{aligned} \quad (67)$$

Если мезоны P и P' являются одним и тем же октетом псевдоскалярных мезонов, то в силу статистики Бозе матричный элемент (63) инвариантен относительно перестановки двух мезонов, т.е. относительно замены $q \leftrightarrow q'$, $P \leftrightarrow P'$. Так как при этом преобразовании

$$T^i \rightarrow (-1)^{i+1} T^i, \quad (68)$$

$$\Gamma_j \rightarrow (-1)^{j+1} \Gamma_j, \quad (69)$$

и $\nu \rightarrow -\nu$, то функции $F_i^j(\lambda, \nu)$ должны удовлетворять условиям

$$F_i^j(\lambda, -\nu) = (-1)^{i+j} F_i^j(\lambda, \nu). \quad (70)$$

Сравнивая с (67), мы получим

$$F_8^j(\lambda, \nu) = 0. \quad (71)$$

Таким образом, по аналогии со случаем упругого рассеяния мезона на барионе, матричный элемент аннигиляции пары барион-антибарион на пару псевдоскалярных мезонов из одного и того же октуплета зависит от семи унитарных амплитуд.

Рассмотрим, наконец, рождение декуплета барионных резонансов $3/2^+$ при столкновении октуплета псевдоскалярных мезонов с октуплетом барионов $1/2^+$

$$P + B \rightarrow P' + D. \quad (IV)$$

В данном случае из унитарных волновых функций частиц можно образовать шесть инвариантных амплитуд:

$$\begin{aligned} T^1 &= \bar{D} \begin{matrix} \langle \lambda \rho \rangle \\ [rs] \end{matrix} \bar{P}'^r B_p^\sigma P_p^\sigma, & T^2 &= \bar{D} \begin{matrix} \langle \lambda \rho \rangle \\ [rs] \end{matrix} \bar{P}'^r B_p^\sigma P_p^\sigma, \\ T^3 &= \bar{D} \begin{matrix} \langle \lambda \rho \rangle \\ [rs] \end{matrix} \bar{P}'^r B_p^\sigma \bar{P}'^s, & T^4 &= \bar{D} \begin{matrix} \langle \lambda \rho \rangle \\ [rs] \end{matrix} \bar{P}'^r B_p^\sigma \bar{P}'^s, \\ T^5 &= \bar{D} \begin{matrix} \langle \lambda \rho \rangle \\ [rs] \end{matrix} \bar{P}'^r B_p^\sigma P_p^\sigma, & T^6 &= \bar{D} \begin{matrix} \langle \lambda \rho \rangle \\ [rs] \end{matrix} \bar{P}'^r B_p^\sigma P_p^\sigma, \\ & & \bar{D} \begin{matrix} \langle \lambda \rho \rangle \\ [rs] \end{matrix} &= \epsilon_{rst} \bar{D} \begin{matrix} \langle \lambda \rho \rangle \\ [rst] \end{matrix}. \end{aligned} \quad (72)$$

Можно показать, что среди этих унитарных амплитуд только четыре являются независимыми. Однако на этом останавливаться мы не будем, поскольку в принципе можно работать с лишними амплитудами, как это было отмечено выше при изучении мезон-барионного рассеяния. Матричный элемент процесса (IV) имеет вид

$$M_{IV} = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \Gamma_j T^i F_i^j(\lambda, \nu), \quad (73)$$

где унитарные амплитуды T^i даны в (72), а спиновые амплитуды Γ_j выражаются через пространственные волновые функции бариона $1/2^+$ $u(p)$ и барионного резонанса $u_\mu(p')$ следующим образом

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \bar{u}_\mu(p') (q - q')_\mu \gamma_5 u(p), & \Gamma_2 &= \bar{u}_\mu(p') (q + q')_\mu \gamma_5 u(p), \\ \Gamma_3 &= \bar{u}_\mu(p') (q - q')_\mu \gamma_5 \frac{\hat{q} + \hat{q}'}{2} u(p), & \Gamma_4 &= \bar{u}_\mu(p') (q + q')_\mu \gamma_5 \frac{\hat{q} + \hat{q}'}{2} u(p). \end{aligned} \quad (74)$$

Здесь через q и q' обозначаются 4-импульсы мезонов P и P' .

В заключение отметим, что аналогичным методом также можно получить матричные элементы процессов рождения векторных мезонов и барионных резонансов

$$P+B \rightarrow V+B, \quad (VI)$$

$$B+B \rightarrow B+D, \quad (VII)$$

$$B+\bar{B} \rightarrow V+B, \quad (VIII)$$

$$P+B \rightarrow V+D. \quad (IX)$$

§ 2. Соотношения между амплитудами процессов

Из общих выражений матричных элементов рассмотренных процессов рассеяния, аннигиляции и рождения частиц можно получить соотношения между сечениями конкретных процессов. Перейдем теперь к выводу этих соотношений.

Рассмотрим прежде всего процессы мезон-барионного рассеяния. Для изучения соотношений между их сечениями достаточно рассмотреть унитарную структуру. Мы имеем тогда матричный элемент

$$M_I = \sum_{i=1}^7 T^i A_i, \quad (75)$$

где A_i — функции от пространственно-временных переменных (импульсов, поляризаций и т.д.).

Амплитуды каждого конкретного процесса выражаются через эти семь независимых произвольных функций A_i . Так, например, для процесса

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$$

только две унитарные амплитуды отличны от нуля

$$T^1 = T^7 = 1,$$

поскольку в данном случае только следующие матричные элементы матриц B, \bar{B}, P и \bar{P} отличны от нуля

$$B_{11}^1 = \bar{B}_{11}^1 = P_{11}^1 = \bar{P}_{11}^1 = 1.$$

Мы имеем таким образом

$$M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = A_1 + A_7.$$

Аналогичные выражения также можно получить для амплитуд остальных процессов. Коэффициенты при произвольных функциях A_i — A_7 даны в таблице УП. Для удобства вместо K^- и Ξ^- в матрицах барионов и мезонов мы пишем K^- и Ξ^- .

Таблица УП

№ п/п	Процесс	T^1	T^2	T^3	T^4	T^5	T^6	T^7
1	$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$	1						1
2	$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$	1					1	
3	$\pi^+ p \rightarrow \pi^0 n$						$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
4	$\pi^+ p \rightarrow \eta n$						$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
5	$K^+ p \rightarrow K^+ p$	1		1	1			1
6	$K^+ p \rightarrow K^+ p$	1	1			1	1	
7	$K^+ p \rightarrow K^+ p$	1			1			

№ п/п	Процесс	T^1	T^2	T^3	T^4	T^5	T^6	T^7
8	$\bar{K}^0 p \rightarrow \bar{K}^0 p$	1						
9	$K^0 p \rightarrow K^0 n$			1				
10	$K^+ p \rightarrow \bar{K}^0 n$		1					
11	$\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+$			1	1			
12	$\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^-$			1				
13	$\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^0$				$\frac{1}{\sqrt{2}}$			
14	$\pi^+ p \rightarrow K^+ \Lambda$				$\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{2}{\sqrt{6}}$	
15	$K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+$		1			1		
16	$K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-$		1					
17	$\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Sigma^0$					$\frac{1}{\sqrt{2}}$		
18	$\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Lambda$					$\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{2}{\sqrt{6}}$
19	$K^+ p \rightarrow \pi^0 \Sigma^0$			1		$\frac{1}{2}$		
20	$K^+ p \rightarrow \eta \Sigma^0$				$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$		
21	$K^+ p \rightarrow \pi^0 \Lambda$					$\frac{1}{2\sqrt{3}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
22	$K^+ p \rightarrow \eta \Lambda$			1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6\sqrt{3}}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
23	$\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^0 \Sigma^+$					$\frac{1}{6}$		
24	$K^0 p \rightarrow \eta \Sigma^+$				$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		
25	$K^+ p \rightarrow K^+ \Xi^0$			1				
26	$\bar{K}^0 p \rightarrow K^+ \Xi^0$				1			
27	$K^+ p \rightarrow K^+ \Xi^-$			1	1			

Из значений коэффициентов при A_i , данных в таблице УП, нетрудно получить следующие соотношения между амплитудами рассматриваемых процессов

$$M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) - M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = \sqrt{2} M(\pi^+ p \rightarrow \pi^0 n), \quad (76)$$

$$M(K^+ p \rightarrow K^+ p) - M(K^+ p \rightarrow K^+ p) = M(K^+ p \rightarrow K^0 n), \quad (77)$$

$$M(\bar{K}^0 p \rightarrow \bar{K}^0 p) - M(K^+ p \rightarrow K^+ p) = -M(K^+ p \rightarrow \bar{K}^0 n), \quad (78)$$

$$M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+) - M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^-) = \sqrt{2} M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^0) \quad (79)$$

$$M(\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+) - M(\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-) = \sqrt{2} M(\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Sigma^0) = \sqrt{2} M(\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^0 \Sigma^+) \quad (80)$$

$$M(\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Lambda) = \sqrt{2} M(K^+ p \rightarrow \pi^+ \Lambda), \quad (81)$$

$$M(K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+) + M(K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-) = 2 M(K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^0), \quad (82)$$

$$M(\bar{K}^0 p \rightarrow K^+ \Sigma^0) + M(K^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^0) = M(K^+ p \rightarrow K^+ \Xi^-), \quad (83)$$

$$M(K^+ p \rightarrow K^+ p) - M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+) \quad (84)$$

$$M(K^+ p \rightarrow K^+ p) - M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = M(K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+) \quad (85)$$

№№ пп		T^2	T^4	T^6
1.	$\tilde{\pi}^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^-$	0	-1	0
2.	$\tilde{\pi}^+ + p \rightarrow K^+ + K^-$	1	-1	1
3.	$\tilde{\pi}^+ + p \rightarrow K^0 + \bar{K}^0$	0	0	1
4.	$\tilde{\lambda}^+ + p \rightarrow K^+ + \pi^0$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
5.	$\tilde{\lambda}^+ + p \rightarrow K^+ + \eta$	1	-1	$\frac{1}{2}$
6.	$\tilde{\Sigma}^+ + p \rightarrow K^+ + \pi^-$	1	0	1
7.	$\tilde{\Sigma}^- + p \rightarrow K^+ + \pi^+$	1	0	0
8.	$\tilde{\Sigma}^+ + p \rightarrow K^0 + \eta$	0	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
9.	$\tilde{\Xi}^0 + p \rightarrow K^+ + K^0$	1	0	0

Отметим, что в таблицу УШ не были включены процессы

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}^+ + p &\rightarrow 2\pi^0, 2\eta, \eta + \pi^0, \\ \tilde{\pi}^+ + p &\rightarrow \pi^+ + \eta, \tilde{\Xi}^+ + p \rightarrow K^+ + K^+, \end{aligned}$$

которые запрещены либо сохранением C - и P -четностей, либо сохранением G - и P -четностей и требованием статистики Бозе. Не рассматриваются также процессы, амплитуды которых определяются через амплитуды процессов в таблице УШ при помощи изотопических соотношений.

Из значений коэффициентов, данных в таблице УШ, получаем следующие соотношения между амплитудами рассматриваемых процессов

$$M(\tilde{\pi}^+ p \rightarrow \tilde{K}^0 K^0) = \sqrt{\frac{2}{3}} M(\tilde{\Sigma}^+ p \rightarrow K^0 \eta^0), \quad (97)$$

$$M(\tilde{\Sigma}^+ p \rightarrow K^+ K^+) = M(\tilde{\Xi}^0 p \rightarrow K^+ K^0), \quad (98)$$

$$M(\tilde{\pi}^+ p \rightarrow K^+ K^-) = M(\tilde{\pi}^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^-) + M(\tilde{\Sigma}^+ p \rightarrow K^+ \pi^-), \quad (99)$$

$$M(\tilde{\pi}^+ p \rightarrow K^+ K^-) = \frac{1}{2} M(\tilde{\pi}^+ p \rightarrow K^+ \bar{K}^0) + M(\tilde{\lambda}^+ p \rightarrow K^+ \eta), \quad (100)$$

$$M(\tilde{\Sigma}^+ p \rightarrow K^+ \pi^-) = M(\tilde{\Sigma}^+ p \rightarrow K^+ \pi^+) + M(\tilde{\pi}^+ p \rightarrow K^+ \bar{K}^0) \quad (101)$$

и т.д.

Как было показано, амплитуды процессов рождения барионных резонансов $3/2^+$ при столкновении псевдоскалярных мезонов с протоном выражают четыре из шести произвольных функций A_i от пространственно-временных переменных. Однако можно также рассмотреть все шесть функций A_i и пользоваться матричным элементом

$$M_{\text{УШ}} = \sum_{i=1}^6 T^i A_i, \quad (102)$$

где T^i определяются в (72). Коэффициенты при A_i для каждого процесса даны в таблице IX.

$$M(K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-) = M(K^+ p \rightarrow K^0 \Sigma^0), \quad (86)$$

$$M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^-) = M(\bar{K}^0 p \rightarrow K^+ \Sigma^0), \quad (87)$$

$$\sqrt{6} M(\pi^+ p \rightarrow K^0 \Lambda) - \sqrt{2} M(\pi^+ p \rightarrow K^0 \Sigma^0) = 2 [M(K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-) - M(K^+ p \rightarrow K^0 \Sigma^0)], \quad (88)$$

$$\sqrt{6} M(\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Lambda) - \sqrt{2} M(\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Sigma^0) = 2 [M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^-) - M(\bar{K}^0 p \rightarrow K^+ \Sigma^0)], \quad (89)$$

$$\sqrt{3} M(K^+ p \rightarrow \pi^+ \Lambda) + \sqrt{2} M(\pi^+ p \rightarrow \pi^0 \Lambda) = M(K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^0) - M(K^+ p \rightarrow \bar{K}^0 \Sigma^0), \quad (90)$$

$$M(K^+ p \rightarrow \eta \Lambda) - \frac{1}{\sqrt{3}} M(K^+ p \rightarrow \eta \Sigma^0) = M(K^+ p \rightarrow K^0 \Sigma^0) + \frac{1}{\sqrt{6}} M(K^0 p \rightarrow \pi^+ \Lambda). \quad (91)$$

Отметим, что среди соотношений (76) - (91) восемь первых можно получить только из изотопической инвариантности, а остальные являются новыми следствиями унитарной симметрии. Если мы потребуем, чтобы S -матрица была инвариантной относительно R -преобразования, то получим еще некоторые другие соотношения. Однако мы не будем предполагать R -инвариантность, поскольку R -преобразование не принадлежит группе $SU(3)$, и в действительности R -инвариантность не имеет места, как это было отмечено.

По аналогии с полученными соотношениями между амплитудами мезон-барионного рассеяния, для процессов барион-барионного рассеяния и антибарион-барионного рассеяния мы имеем соотношения

$$M(\bar{\Sigma}^+ p \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^-) = M(\bar{\Sigma}^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^0), \quad (92)$$

$$M(\Sigma^+ p \rightarrow \Sigma^+ p) = M(\bar{\Sigma}^0 p \rightarrow \bar{\Sigma}^0 p), \quad (93)$$

$$M(p p \rightarrow p p) = M(\Sigma^+ p \rightarrow \Sigma^+ p) + M(\Sigma^+ p \rightarrow p \Sigma^+), \quad (94)$$

$$M(\Sigma^+ p \rightarrow \Sigma^+ p) = M(\bar{\Sigma}^+ p \rightarrow \bar{\Sigma}^+ p) - M(\bar{\Sigma}^+ p \rightarrow \Sigma^- \Sigma^+), \quad (95)$$

$$M(\bar{\pi}^+ p \rightarrow \bar{\Sigma}^- \Sigma^-) = M(\bar{\pi}^+ p \rightarrow \bar{\Xi}^0 \Sigma^0), \quad (96)$$

и т.д.

Рассмотрим теперь аннигиляцию пары барион-антибарион в покое на два псевдоскалярных мезона. В данном случае $p = p'$, $\vec{p} = \vec{p}' = 0$, т.е. $p = p'$, $v = \frac{1}{4}(p - p')(q - q') = 0$.

Так как нечетные функции от v должны обращаться в нуль при $v = 0$, то только четные функции $F_i^{\pm}(\lambda, v)$ в матричном элементе (63) могут давать вклад. Более того, для бариона и антибариона в покое волновые функции $u(p)$ и $v(p)$ имеют вид

$$u = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = C \bar{u}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix},$$

где φ - двумерный спинор, и $\bar{v}u = 0$, т.е. первая спинорная амплитуда равна нулю. Таким образом матричные элементы аннигиляции пар барион-антибарион в покое на пары псевдоскалярных мезонов зависят только от трех четных функций $F_i^{\pm}(\lambda, 0)$, а именно $F_2^{\pm}(\lambda, 0)$, $F_3^{\pm}(\lambda, 0)$ и $F_6^{\pm}(\lambda, 0)$. Соответствующие коэффициенты даны в таблице УШ.

Таблица IX

		T ¹	T ²	T ³	T ⁴	T ⁵	T ⁶
I.	$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \Delta^+$			$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
2.	$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \Delta^+$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$				$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
3.	$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \Delta^-$	-1		-1			
4.	$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \Delta^0$	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$	
5.	$\pi^+ + p \rightarrow \eta + \Delta^0$			$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
6.	$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \Delta^{++}$			$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
7.	$\pi^+ + p \rightarrow \eta + \Delta^{++}$			$\frac{1}{\sqrt{6}}$		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$
8.	$K^+ + p \rightarrow K^+ + \Delta^+$			$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
9.	$K^+ + p \rightarrow K^+ + \Delta^+$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$				$\frac{1}{\sqrt{3}}$
10.	$K^+ + p \rightarrow K^+ + \Delta^{++}$			-1		-1	
11.	$\bar{K}^0 + p \rightarrow K^+ + \Delta^{++}$		-1				-1
12.	$K^+ + p \rightarrow \pi^+ + \gamma^+$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$			$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
13.	$\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \gamma^+$			$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
14.	$K^+ + p \rightarrow \pi^+ + \gamma^+$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$			$\frac{1}{\sqrt{3}}$
15.	$\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \gamma^0$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$			$\frac{1}{\sqrt{3}}$
16.	$K^+ + p \rightarrow \pi^0 + \gamma^0$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$-\frac{1}{3}$
17.	$K^+ + p \rightarrow \eta + \gamma^0$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{3}$
18.	$\bar{K}^0 + p \rightarrow \pi^+ + \gamma^0$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
19.	$\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \gamma^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
20.	$\bar{K}^0 + p \rightarrow \pi^+ + \gamma^+$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
21.	$\bar{K}^0 + p \rightarrow \eta + \gamma^+$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
22.	$K^+ + p \rightarrow K^+ + \Xi^0$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		
23.	$\bar{K}^0 + p \rightarrow K^+ + \Xi^0$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		
24.	$K^+ + p \rightarrow K^+ + \Xi^0$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$			

Отсюда получаем соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{3}} M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \Delta^-) = M(K^+ p \rightarrow \pi^+ \gamma^+) = M(K^+ p \rightarrow \pi^+ \gamma^+) = M(K^+ p \rightarrow K^+ \Xi^0), \quad (103)$$

$$|M(K^+ p \rightarrow K^+ \Delta^{++})|^2 + 3 |M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \gamma^+)|^2 = |M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \Delta^{++})|^2 + 3 |M(\pi^+ p \rightarrow \eta \Delta^{++})|^2. \quad (104)$$

Аналогичный метод можно также применить к изучению амплитуд процессов рождения векторных мезонов при столкновении псевдоскалярных мезонов с протоном. Мы имеем, в частности, соотношения

$$M(K^+ p \rightarrow K^+ p) = M(\pi^+ p \rightarrow \rho^+ p) + M(\pi^+ p \rightarrow K^{*0} \Sigma^+), \quad (105)$$

$$M(K^+ p \rightarrow K^* p) = M(\pi^+ p \rightarrow \rho^+ p) + M(K^+ p \rightarrow \rho^+ \Sigma^+), \quad (106)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} M(\pi^+ p \rightarrow \rho^+ \Delta^-) = M(K^+ p \rightarrow \rho^+ \gamma^+) = M(K^+ p \rightarrow \rho^+ \gamma^+) = M(K^+ p \rightarrow K^* \Xi^0), \quad (107)$$

$$|M(K^+ p \rightarrow K^* \Delta^{++})|^2 + 3 |M(\pi^+ p \rightarrow K^* \gamma^+)|^2 = |M(\pi^+ p \rightarrow \rho^+ \Delta^{++})|^2 + 3 |M(\pi^+ p \rightarrow \rho^0 \Delta^{++})|^2. \quad (108)$$

Наконец, приведем соотношения между амплитудами процессов рождения X-мезона, являющегося унитарным синглетом

$$M(\pi^+ p \rightarrow X \pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} M(K^+ p \rightarrow X \Sigma^0) - \sqrt{\frac{3}{2}} M(K^+ p \rightarrow X \lambda). \quad (109)$$

§ 3. Сохранение U-спина и V-спина

Как и в случае трехчастичных вершин, многие из полученных соотношений между амплитудами рассеяния являются следствиями либо сохранения U-спина или V-спина, либо U-зарядовой или V-зарядовой симметрий (U-подгруппа и V-подгруппа были рассмотрены в главе III, п. I, § 4). Поэтому они могут быть выведены без изучения общей структуры матричных элементов путем применения либо техники группы SU(2), либо дискретных преобразований U-зарядовой или V-зарядовой симметрий.

Действительно, применим к процессам $K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-$ и $\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^-$ сначала преобразование V-зарядовой симметрии, затем преобразование U-зарядовой симметрии и отражение времени. Так как при V-зарядовой симметрии с точностью до знака волновых функций

$$K^+ \leftrightarrow \pi^+, \quad \pi^+ \leftrightarrow K^+, \quad p \leftrightarrow \Sigma^+, \quad \Sigma^+ \leftrightarrow \Sigma^-$$

(см. главу III, п. II, § 2), то эти процессы переходят в процессы

$$\pi^+ \Sigma^+ \rightarrow K^+ \Sigma^- \quad \text{и} \quad K^+ \Sigma^+ \rightarrow \pi^+ \Sigma^-$$

соответственно. Далее, при U-зарядовой симметрии с точностью до знака волновых функций

$$K^+ \leftrightarrow K^-, \quad \pi^+ \leftrightarrow K^0, \quad \pi^+ \leftrightarrow \bar{K}^0, \quad \Sigma^+ \leftrightarrow \bar{\Sigma}^0, \quad \Sigma^- \leftrightarrow p$$

(см. главу III, п. II, § 2), и последние процессы переходят в

$$K^+ \bar{\Sigma}^0 \rightarrow K^+ p \quad \text{и} \quad K^+ \bar{\Sigma}^0 \rightarrow \bar{K}^0 p$$

соответственно. В силу T-инвариантности амплитуды этих процессов равны амплитудам соответствующих обратных процессов

$$K^+ p \rightarrow K^+ \bar{\Sigma}^0 \quad \text{и} \quad \bar{K}^0 p \rightarrow K^+ \bar{\Sigma}^0$$

соответственно. Таким образом из инвариантностей относительно преобразований V-зарядовой симметрии, U-зарядовой симметрии и отражения времени вытекают соотношения (86) и (87)

$$M(K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-) = M(K^+ p \rightarrow K^* \bar{\Sigma}^0), \\ M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^-) = M(K^+ p \rightarrow K^* \bar{\Sigma}^0).$$

Отметим, что соответствующих соотношений для амплитуд рождения векторных мезонов не существует, так как в этом случае нельзя пользоваться T-инвариантностью.

Применим теперь к процессам

$$\bar{\Sigma}^0 p \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^-, \quad \Sigma^- p \rightarrow \bar{\Sigma}^0 p, \quad \bar{p} p \rightarrow \bar{\Sigma}^0 \bar{\Sigma}^0$$

преобразование U-зарядовой симметрии. Поскольку при этом преобразовании

$\Sigma^+ \leftrightarrow p, \Sigma^+ \leftrightarrow \Sigma^0, \Sigma^- \leftrightarrow n,$
 то эти процессы превращаются в процессы
 $p + \Sigma^- \rightarrow \Sigma^0 + n, n + \Sigma^- \rightarrow n + \Sigma^-, \tilde{\Sigma}^- \Sigma^- \rightarrow \tilde{n} + n.$

Таким образом, U-зарядовая симметрия дает соотношение
 $M(\Sigma^- p \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^-) = M(\Sigma^- p \rightarrow n \Sigma^0),$

U-зарядовая и T-зарядовая симметрии приводят к соотношению
 $M(\Sigma^- p \rightarrow \Sigma^- p) = M(\Sigma^- p \rightarrow \Sigma^0 p),$

а U-зарядовая и T-зарядовая симметрии вместе с T-инвариантностью дают соотношение
 $M(\tilde{p} p \rightarrow \tilde{\Sigma}^- \Sigma^-) = M(\tilde{p} p \rightarrow \tilde{\Sigma}^0 \Sigma^0).$

Получаем снова соотношения (92), (93) и (96).

Покажем теперь, что соотношения (84) и (85) являются следствиями сохранения V-спина. Если рассматривать частицы как компоненты V-мультиплетов, то мы имеем следующие V-дублеты

$$\begin{pmatrix} \uparrow \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^+ \\ -\pi^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^- \\ K^- \end{pmatrix}$$

по аналогии с T-дублетами
 $\begin{pmatrix} \uparrow \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}.$

Из сохранения T-спина мы получили соотношение

$$M(K^+ p \rightarrow K^+ p) = M(K^+ p \rightarrow K^0 p) + M(K^+ p \rightarrow K^+ n).$$

(см. главу II, п. II, § 4). Аналогично, из сохранения V-спина вытекают соотношения

$$M(K^+ p \rightarrow K^+ p) = M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) + M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+),$$

$$M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = M(K^+ p \rightarrow K^+ p) - M(K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+).$$

Мы получаем снова соотношения (84) и (85), а также соотношения между амплитудами рождения векторных мезонов (105) и (106).

Если теперь рассматривать рассеяние частиц в V-дублете

$$\begin{pmatrix} \uparrow \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix},$$

то по аналогии с изотопическим соотношением

$$M(p p \rightarrow p p) = M(n p \rightarrow n p) + M(n p \rightarrow p n)$$

мы получаем

$$M(p p \rightarrow p p) = M(\Sigma^+ p \rightarrow \Sigma^+ p) + M(\Sigma^+ p \rightarrow p \Sigma^+),$$

а если рассматривать рассеяние частиц в V-дублетах

$$\begin{pmatrix} \uparrow \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma^- \\ \Sigma^- \end{pmatrix},$$

то мы имеем

$$M(\Sigma^- p \rightarrow \Sigma^- p) = M(\Sigma^- p \rightarrow \Sigma^- p) - M(\Sigma^- p \rightarrow \Sigma^- \Sigma^+).$$

Таким образом, соотношения (94) и (95) также являются следствием сохранения V-спина.

Рассмотрим теперь рождение барионных резонансов $3/2^+$. Мы знаем, что барионные резонансы $\Delta, \gamma^{*+}, \Sigma^{*+}$ и Ω^- -гиперон образуют V-мультиплет с V-спином $V=3/2$. Напомним, что мы имеем следующие V-дублеты

$$\begin{pmatrix} \uparrow \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^+ \\ -\pi^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^- \\ K^- \end{pmatrix}.$$

Следовательно, сохранение V-спина приводит к соотношениям между амплитудами процессов

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \Delta^-, \quad \pi^+ p \rightarrow K^+ \gamma^{*+},$$

$$K^+ p \rightarrow \pi^+ \gamma^{*+}, \quad K^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^{*+},$$

по аналогии с тем, что сохранение T-спина приводит к соотношениям между амплитудами процессов

$$K^+ \Sigma^0 \rightarrow K^+ \Delta^{*+}, \quad K^+ \Sigma^0 \rightarrow \tilde{K}^+ \Delta^+$$

$$K^+ \Sigma^0 \rightarrow K^+ \Delta^+, \quad K^+ \Sigma^0 \rightarrow \tilde{K}^+ \Delta^0.$$

Здесь имеется соответствие

$$\begin{pmatrix} \Delta^{*+} \\ \Delta^+ \\ \Delta^0 \\ \Delta^- \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \Delta^- \\ \gamma^{*+} \\ \Sigma^{*+} \\ \Omega^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \uparrow \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{K}^+ \\ K^- \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \pi^+ \\ -K^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \pi^- \\ K^- \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что соотношения (103)

$$\frac{1}{\sqrt{3}} M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \Delta^-) = M(K^+ p \rightarrow \pi^+ \gamma^{*+}) = M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \gamma^{*+}) = M(K^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^{*+})$$

в действительности являются следствиями сохранения V-спина. Аналогично, в силу сохранения V-спина имеют место равенства

$$\frac{1}{\sqrt{3}} M(\pi^+ p \rightarrow p^+ \Delta^-) = M(K^+ p \rightarrow p^+ \gamma^{*+}) = M(\pi^+ p \rightarrow K^{*+} \gamma^{*+}) = M(K^+ p \rightarrow K^{*+} \Sigma^{*+}).$$

§ 4. Сравнение некоторых соотношений между сечениями с опытом

Из полученных в § 2 соотношений между амплитудами вытекает ряд равенств и неравенств треугольника между сечениями, а также между поляризациями в различных процессах. Так, например, имеют место равенства между сечениями

$$\sigma(K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-) = \sigma(K^+ p \rightarrow K^0 \Sigma^0), \tag{II0}$$

$$\sigma(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^-) = \sigma(\tilde{K}^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^0), \tag{III}$$

а также между поляризациями в соответствующих процессах. Из (84) и (85) получаем неравенства треугольника

$$|\sqrt{\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)} - \sqrt{\sigma(K^+ p \rightarrow K^+ p)}| \leq \sqrt{\sigma(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+)}, \tag{II2}$$

$$|\sqrt{\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)} - \sqrt{\sigma(K^+ p \rightarrow K^+ p)}| \leq \sqrt{\sigma(K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+)}. \tag{II3}$$

Что касается сечений рождения барионных резонансов, то мы имеем соотношения

$$\frac{1}{2} \sigma(\pi^+ \bar{p} \rightarrow \pi^+ \Delta^-) = \sigma(K^+ \bar{p} \rightarrow \pi^+ \Sigma^{*-}) = \sigma(\pi^+ \bar{p} \rightarrow K^+ \Sigma^{*-}) = \sigma(K^+ \bar{p} \rightarrow K^+ \Sigma^{*-}), \quad (II4)$$

$$\sigma(K^+ \bar{p} \rightarrow K^+ \Delta^{++}) + 3\sigma(\pi^+ \bar{p} \rightarrow K^+ \Sigma^{*+}) = \sigma(\pi^+ \bar{p} \rightarrow \pi^+ \Delta^{++}) + 3\sigma(\pi^+ \bar{p} \rightarrow \pi^+ \Sigma^{*+}). \quad (II5)$$

Если бы симметрия выполнялась строго и массы частиц в каждом унитарном мультиплете были бы равны, то можно было бы сразу сравнить с опытом полученные соотношения между дифференциальными сечениями при одинаковых значениях Δ и t или соотношения между полными сечениями при одинаковых значениях Δ . Однако, поскольку массы частиц в каждом унитарном мультиплете в действительности не равны между собой, то существуют такие значения Δ , лежащие в физической области одного процесса (около порога) и в нефизической области другого. Во избежание этой трудности в качестве переменной, при одинаковых значениях которой сравниваются сечения, мы можем выбрать разность $Q = E - \sum m$, где E - полная энергия в системе центра масс, а $\sum m$ - сумма масс рождающихся частиц. Отметим, что при малых энергиях кинематические множители в сечениях различных процессов различны, поэтому из соотношений между амплитудами получаются не соотношения между сечениями, а между отношениями сечений на значениях этих множителей. Иначе говоря, полученные соотношения следует сравнить не с экспериментальными значениями сечений, а с некоторыми "исправленными" значениями сечений.

Рассмотрим прежде всего соотношения (II0) и (III). При малых энергиях процессы в левых частях проходят через резонанс (барионный резонанс Y^* дает вклад), а сечения процессов в правых частях очень малы. Здесь нарушение симметрии существенно. Если бы симметрия выполнялась строго, то барионный резонанс Y^* мог бы давать вклад во все процессы, и сечения процессов в правых частях соотношений (II0) и (III) также проходили бы через резонанс.

На рис. (Ia) представлены данные, относящиеся к неравенству (II3).

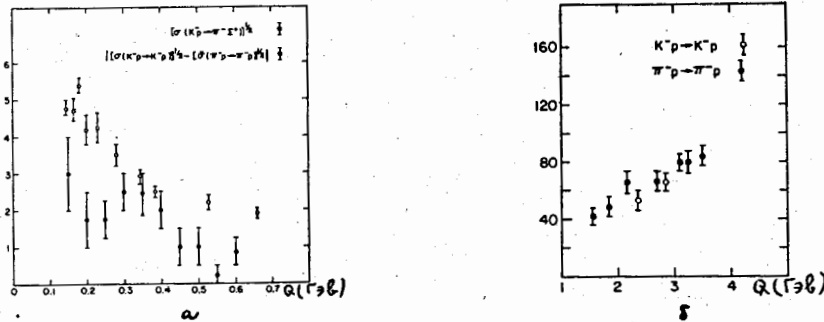


Рис. I.

Очевидно, что в рассматриваемой области энергии это неравенство выполняется. При больших энергиях ($Q \gg 1$ ГэВ) сечение процесса $K^+ \bar{p} \rightarrow \pi^+ \Sigma^+$ весьма мало. Если пренебречь этим сечением, то мы имеем приближенное равенство

$$\sigma(K^+ \bar{p} \rightarrow K^+ \bar{p}) \approx \sigma(\pi^+ \bar{p} \rightarrow \pi^+ \bar{p}).$$

Соответствующие экспериментальные данные представлены на рис. (Iб). Поскольку сечение $\sigma(\pi^+ \bar{p} \rightarrow K^+ \Sigma^+)$ фактически достаточно мало при всех Q , то мы имеем также приближенное равенство

$$\sigma(K^+ \bar{p} \rightarrow K^+ \bar{p}) \approx \sigma(\pi^+ \bar{p} \rightarrow \pi^+ \bar{p}),$$

которое не выполняется при малых энергиях, где барионный резонанс Δ^{++} дает вклад в сечение $\sigma(\pi^+ \bar{p} \rightarrow \pi^+ \bar{p})$. Значения сечений соответствующих процессов даны на рис. (2a) и (2б).

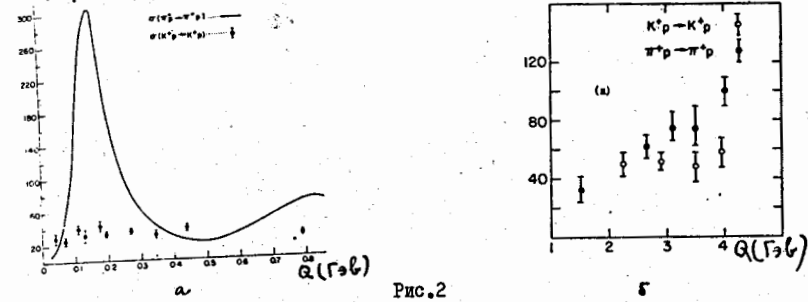


Рис. 2

Отметим, что если бы симметрия выполнялась строго и массы частиц в одном мультиплете были бы равны, то резонанс Δ^{++} давал бы вклад в сечение $\sigma(\pi^+ \bar{p} \rightarrow K^+ \Sigma^+)$.

Из соотношений (84) и (85) между амплитудами можно получить при помощи оптической теоремы также следующие соотношения между полными сечениями упругих процессов и дифференциальными сечениями неупругих процессов при нулевом значении передачи импульса

$$|\sigma_{tot}(\pi^+ \bar{p}) - \sigma_{tot}(K^+ \bar{p})| \leq \sqrt{16\pi \frac{d\sigma(\pi^+ \bar{p} \rightarrow K^+ \Sigma^+)}{dt}} \Big|_{t=0} \quad (II6)$$

$$|\sigma_{tot}(\pi^- \bar{p}) - \sigma_{tot}(K^- \bar{p})| \leq \sqrt{16\pi \frac{d\sigma(K^- \bar{p} \rightarrow \pi^- \Sigma^+)}{dt}} \Big|_{t=0} \quad (II7)$$

Здесь уместно выписать также изотопическое соотношение

$$|\sigma_{tot}(\pi^+ \bar{p}) - \sigma_{tot}(\pi^- \bar{p})| \leq \sqrt{8\pi \frac{d\sigma(\pi^+ \bar{p} \rightarrow \pi^+ \bar{p})}{dt}} \Big|_{t=0} \quad (II8)$$

Согласно имеющимся данным при больших энергиях

$$\begin{aligned} \sigma_{tot}(\pi^+ \bar{p}) - \sigma_{tot}(K^+ \bar{p}) &\approx (4 \pm 0,5) \text{ мб} \\ \sigma_{tot}(\pi^- \bar{p}) - \sigma_{tot}(K^- \bar{p}) &\approx (6 \pm 0,5) \text{ мб} \\ \sigma_{tot}(\pi^- \bar{p}) - \sigma_{tot}(\pi^+ \bar{p}) &\approx (2 \pm 0,6) \text{ мб}, \end{aligned}$$

а сечения неупругих процессов при нулевой передаче импульса пока неизвестны.

Рассмотрим теперь соотношения между сечениями рождения барионных резонансов (II4) и (II5).

На рис. 3 представлены данные, относящиеся к равенствам (II4).

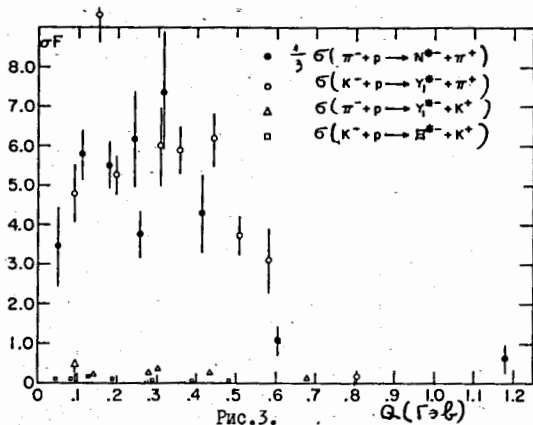


Рис.3.

В области энергии, где измерены соответствующие сечения, $\frac{1}{3} \sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \Delta^-)$ и $\sigma(K^+ p \rightarrow \pi^+ Y^{*-})$ приблизительно равны между собой, но сильно отличаются от $\sigma(\pi^+ p \rightarrow K^+ Y^{*-})$ и $\sigma(K^+ p \rightarrow K^+ \Xi^{*-})$. Может быть это обусловлено существованием некоторых резонансных состояний систем $\pi^+ \Delta^-$ и $\pi^+ Y^{*-}$. Если массы π^- и K^- -мезонов были бы равны, а также массы Δ^- , Y^{*-} и Ξ^{*-} , то эти резонансы могли бы давать вклад также в процессы с рождением $K^+ Y^{*-}$ и $K^+ \Xi^{*-}$, соответственно. Что касается соотношения (115), то в рамках ошибок эксперимента оно выполняется (см.рис.(4)).

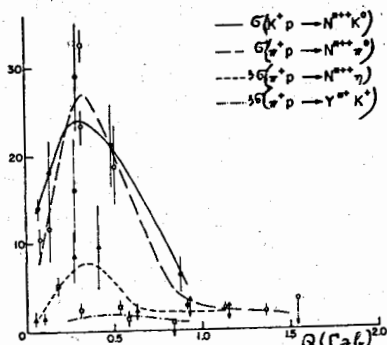


Рис.4.

На основе полученных результатов мы можем заключить, что в области энергии, где сечения процессов проходят резонансы, соотношения между сечениями, полученные в унитарной симметрии, не согласуются с экспериментальными данными. Здесь нарушение симметрии играет важную роль. Поэтому эти следствия унитарной симметрии следует проверить при достаточно большой энергии, где резонансные состояния дают несущественные вклады. К сожалению, в настоящее время сечения неупругих процессов при больших энергиях еще не были измерены с достаточной точностью. Для дальнейшей проверки унитарной симметрии этот пробел должен быть заполнен. Отметим, что необходимо измерить не только полные сечения неупругих процессов, но также и дифференциальные сечения этих процессов при нулевом угле вылета частиц. Если соотношения, полученные в унитарной симметрии, не будут выполняться даже при больших энергиях, то экспериментальные данные также позволяют судить о том, до какой степени симметрия нарушается.

Литература:

Лагранжиан взаимодействия и трехчастичные вершины

1. M.Gell-Mann, The Eight Fold Way, CTSL -20, 1961.
2. S.L.Glashow and A.H.Rosenfeld, Phys.Rev.Lett., 192 (1963).
3. S.Okubo, Progr.Theor.Phys. 28, 24 (1962).
4. C.Dullemond, A.J.Macfarlane and E.C.G.Sudarshan, Phys.Rev.Lett., 10,423 (1963).
5. J.J.Sakurai, Phys.Lett. 10, 132 (1964).
6. K.Tanaka, Phys.Rev.L33, B1509 (1964).
7. S.Okubo, Phys.Lett. 5, 165 (1963).
8. S.L.Glashow and R.H.Socolov, Phys.Rev.Lett., 15, 329 (1965).
9. Б.Л. Иоффе, И.Ю. Кобзарев, И.Я. Померанчук, ЖЭТФ, 48, 375, (1965).
10. В.П. Белов и В.М. Шехтер, Ядерная физика, 2, 757 (1965).
11. М.С. Маринов, Ядерная физика, 2, 321 (1965).
12. Фам Кук Тн, Ядерная физика (в печати).
13. О.Г. Боков, препринт ОИЯИ, P-2444, 1965 г.
14. Нгуен Ван Хыу и Ф.Ф. Тихонин, препринт ОИЯИ, P-2568, 1966.

Мезон-барионное рассеяние и рождение резонансов

1. C.A.Levinson, H.J.Lipkin and S.Meshkov, Phys.Lett., 1,44 (1962).
2. P.G.O.Freund, H.Ruegg, D.Speiser and A.Morales, Nuovo Cim., 25, 307 (1962).
3. В.М. Шехтер, ЖЭТФ, 43, 205, (1962).
4. S.Meshkov, C.A.Levinson and H.J.Lipkin, Phys.Rev.Lett., 10, 361 (1963).
5. S.Meshkov, G.A.Snow and G.B.Yodh, Phys.Rev.Lett. 12, 87 (1964).
6. A.A.Logunov, Nguyen van Hieu and Hsien Ting chang, Nuovo Cim. 33, 1312(1964).
7. H.Narari and H.J.Lipkin, Phys.Rev.Lett. 13, 208 (1964).

I. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

§ I. Электромагнитный ток в унитарной симметрии

Как известно, в теории изотопической инвариантности предполагается, что электромагнитный ток сильновзаимодействующих частиц имеет вид

$$J_\mu^a = \frac{1}{2} (J_\mu^0 + J_\mu^1), \quad (1)$$

где J_μ^0 является инвариантом изотопической группы, а J_μ^1 является третьей компонентой некоторого изотопического вектора V_μ^i , $i = 1, 2, 3$,

$$J_\mu^1 = V_\mu^3 = (V_\mu)_\rho^a (\tau_3)_a^\rho. \quad (2)$$

Так как эти токи не меняют гиперзаряд систем частиц, то они инвариантны относительно калибровочных преобразований волновых функций

$$\psi \rightarrow e^{iaY} \psi,$$

где Y - оператор гиперзаряда. Иначе говоря, они являются собственными функциями оператора Y с нулевыми собственными значениями. Если же существуют еще другие сохраняющиеся квантовые числа, например, суперзаряд Z (см. главу III, п. III, §§ 2 и 3), то для токов J_μ^0 и J_μ^1 эти квантовые числа также равны нулю. Поскольку октет представляет собой унитарный мультиплет с наименьшим числом компонент, который содержит изотопический скаляр и изотопический вектор с нулевым гиперзарядом (а также суперзарядом и пр.), то естественным обобщением изотопических свойств электромагнитного тока является предположение о том, что токи J_μ^0 и J_μ^1 принадлежат одному и тому же унитарному октуплету $(V_\mu)_\rho^a$. Для описания октуплета вместо спинора $(V_\mu)_\rho^a$ можно пользоваться восьмимерной величиной

$$V_\mu^i = (V_\mu)_\rho^a (\lambda_i)_a^\rho, \quad (3)$$

где матрицы λ_i даны в главе III, п. I, § I (см. главу III, формулы (44) и (45)). Тогда V_μ^8 является компонентой этого октуплета с $T = Y = 0$, а V_μ^3 является компонентой с $Y = 0$, $T = 1$, $T_3 = 0$ (ср. с формулами (1), (31) и (31''') в главе III).

Поэтому наше предположение приводит к тому, что электромагнитный ток J_μ^a является линейной комбинацией компонент V_μ^3 и V_μ^8 октуплета V_μ^i ($i = 1, 2, \dots, 8$):

$$J_\mu^e = a J_\mu^3 + b J_\mu^8,$$

где a и b - некоторые константы, общие для всех частиц.

Для того чтобы определить константы a и b , мы рассмотрим ток J_μ^e для свободных кварков. Так как кварки t_p , t_n , t_λ имеют заряды $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, то ток J_μ^e равен

$$J_\mu^e = \frac{2}{3} \bar{\psi}^1 \gamma_\mu \psi_1 - \frac{1}{3} \bar{\psi}^2 \gamma_\mu \psi_2 - \frac{1}{3} \bar{\psi}^3 \gamma_\mu \psi_3,$$

где ψ_α - волновые функции кварков. С другой стороны, спинор $(V_\mu)_\rho^a$ для свободных кварков равен

$$(V_\mu)_\rho^a = \bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi_\rho.$$

Поэтому для свободных кварков J_μ^e выражается через $(V_\mu)_\rho^a$ следующим образом:

$$J_\mu^e = (V_\mu)_\rho^a (\lambda^e)_a^\rho,$$

где λ^e - диагональная матрица с диагональными элементами $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$. Нетрудно проверить соотношение

$$\lambda^e = \frac{1}{2} \lambda_3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda_8.$$

Отсюда получаем $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Поскольку эти константы являются общими для всех частиц, то мы заключаем, что электромагнитный ток в унитарной симметрии имеет вид

$$J_\mu^e = \frac{1}{2} (V_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} V_\mu^8) = \frac{1}{2} [(\lambda_3)_a^\rho + \frac{1}{\sqrt{3}} (\lambda_8)_a^\rho] (V_\mu)_\rho^a. \quad (4)$$

В главе III (п. I, § 4 и п. II, § 2) было рассмотрено разложение унитарных мультиплетов в мультиплеты подгрупп T - спина, U - спина и V - спина. В частности, было показано, что V - синглетами являются комбинации

$$\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda, \quad \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \eta, \quad \rho^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \varphi^0,$$

а ортогональные к ним комбинации

$$\Sigma^0 - \sqrt{3} \lambda, \quad \pi^0 - \sqrt{3} \eta, \quad \rho^0 - \sqrt{3} \varphi^0$$

являются компонентами с $V_3 = 0$ V - триплетов. Таким же образом можно показать, что электромагнитный ток (4)

$$J_\mu^e = \frac{1}{2} \left[V_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} V_\mu^8 \right]$$

является синглетом подгруппы V - спина.

формулу (4) можно переписать в более удобном для применений виде. Мы имеем отсюда:

$$J_\mu^e = \frac{2}{3} (V_\mu)_1^1 - \frac{1}{3} (V_\mu)_2^2 - \frac{1}{3} (V_\mu)_3^3$$

Поскольку $(V_\mu)_\rho^\alpha$ удовлетворяет условию $(V_\mu)_\alpha^\alpha = 0$, то можно заменить $-(V_\mu)_2^2 - (V_\mu)_3^3$ на $(V_\mu)_1^1$. Следовательно,

$$J_\mu^e = (V_\mu)_1^1 \quad (5)$$

§ 2. Электромагнитные вершины

Предположение о том, что электромагнитный ток является компонентой унитарного октуплета приводит к ряду экспериментально проверяемых следствий. Рассмотрим некоторые из них. Так, например, матричный элемент октуплетного тока $(V_\mu)_\rho^\alpha$ между состояниями октуплета барионов $\frac{1}{2}^+$ имеет общий вид

$$\langle p_2 | (V_\mu)_\rho^\alpha | p_1 \rangle = \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) f_1^F(k^2) + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} u(p_1) f_2^F(k^2) \right\} \left(\bar{B}_\rho^\alpha B_\rho^\gamma - \bar{B}_\rho^\gamma B_\rho^\alpha \right) + \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) f_1^D(k^2) + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} u(p_1) f_2^D(k^2) \right\} \left(\bar{B}_\rho^\alpha B_\rho^\gamma + \bar{B}_\rho^\gamma B_\rho^\alpha - \frac{2}{3} \delta_\rho^\alpha \bar{B}_\rho^\gamma B_\rho^\gamma \right), \quad (6)$$

где M - масса барионов, а $k = p_2 - p_1$. Подставляя в выражение матричного элемента $(V_\mu)_\rho^\alpha$ матрицы B_ρ^α и \bar{B}_ρ^α , данные в главе III (см. п.П, § 2), мы получаем:

$$\langle p_2 | J_\mu^e | p_1 \rangle = \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) f_1^F(k^2) + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} u(p_1) f_2^F(k^2) \right\} \left(\bar{p} p + \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ - \bar{\Sigma}^- \Sigma^- - \bar{\Xi}^- \Xi^- \right)$$

$$+ \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) f_1^D(k^2) + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} u(p_1) \right\} \left[\frac{1}{3} \bar{p} p - \frac{2}{3} \bar{n} n - \frac{1}{3} \bar{\Lambda} \Lambda + \frac{1}{3} \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \frac{1}{3} \bar{\Sigma}^- \Sigma^- + \frac{1}{3} \bar{\Xi}^0 \Xi^0 + \frac{1}{3} \bar{\Xi}^- \Xi^- + \frac{1}{3} (\bar{\Sigma}^- \Lambda + \bar{\Lambda} \Sigma^-) \right]. \quad (7)$$

Таким образом, формфакторы барионов и формфакторы электромагнитного $\Sigma\Lambda$ -перехода выражаются через формфакторы типа F и D следующим образом:

$$\begin{aligned} f_i^{\Sigma^+}(k^2) &= f_i^F(k^2) + \frac{1}{3} f_i^D(k^2), & f_i^{\Sigma^0}(k^2) &= -\frac{2}{3} f_i^D(k^2), \\ f_i^{\Sigma^-}(k^2) &= f_i^F(k^2) - \frac{1}{3} f_i^D(k^2), & f_i^{\Xi^0}(k^2) &= -\frac{2}{3} f_i^D(k^2), \\ f_i^{\Sigma^+}(k^2) &= f_i^F(k^2) + \frac{1}{3} f_i^D(k^2), & f_i^{\Sigma^-}(k^2) &= f_i^F(k^2) - \frac{1}{3} f_i^D(k^2), \\ f_i^{\Sigma^0}(k^2) &= \frac{1}{3} f_i^D(k^2), & f_i^{\Lambda}(k^2) &= -\frac{1}{3} f_i^D(k^2), & f_i^{\Sigma\Lambda}(k^2) &= \frac{1}{\sqrt{3}} f_i^D(k^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда следует, в частности, что магнитные моменты барионов связаны соотношениями

$$\mu_p = \mu_{\Sigma^+}, \quad (9)$$

$$\mu_n = \mu_{\Sigma^-}, \quad (10)$$

$$\mu_n = -2\mu_{\Sigma^0} = \mu_{\Xi^0} = 2\mu_\Lambda, \quad (11)$$

не считая изотопического соотношения между магнитными моментами Σ - гиперонов. В силу сохранения заряда все электрические формфакторы заряженных частиц равны единице при $k^2 = 0$, а формфакторы нейтральных частиц обращаются в нуль при $k^2 = 0$. Отсюда следует, что $f_2^D(0) = 0$. Так как формфакторы $\Sigma\Lambda$ -перехода пропорциональны $f_i^D(k^2)$, то мы имеем:

$$f_2^{\Sigma\Lambda}(0) = 0, \quad (12)$$

т.е. в распаде

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$$

только один формфактор $f_2^{\Sigma\Lambda}(k^2)$ дает вклад, в согласии с требованием сохранения электромагнитного тока. Что касается $f_2^{\Sigma\Lambda}(0)$, то из (8) мы получим

$$f_2^{\Sigma\Lambda}(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \mu_n. \quad (13)$$

Отметим, что R - инвариантность требует, чтобы $f_i^D(k^2) = 0$ и, следовательно, $\mu_n = 0$, что, очевидно, противоречит опыту.

Перейдем теперь к изучению электромагнитных распадов элементарных частиц и резонансов. Унитарная часть матричного элемента электромагнитного тока между состоянием синглета ω^0 или октуплета векторных мезонов и состоянием октуплета псевдоскалярных мезонов равна

$$\langle P | J_\mu^e | \omega^0 \rangle = g^S \bar{P}_1^1 \omega^0, \quad (14)$$

$$\langle P | J_\mu^e | V \rangle = g^F \left(\bar{P}_r^1 V_1^r - \bar{P}_1^r V_r^1 \right) + g^D \left(\bar{P}_r^1 V_1^r + \bar{P}_1^r V_r^1 - \frac{2}{3} \bar{P}_5^r V_r^5 \right). \quad (15)$$

При зарядовом сопряжении

$$\omega^0 \rightarrow -\omega^0, \quad \bar{P}_p^\alpha \rightarrow \bar{P}_p^\beta, \quad V_p^\alpha \rightarrow -V_p^\beta,$$

а ток J_μ^e меняет знак. Отсюда следует, что в силу C - инвариантности, константа g^F в (15) равна нулю. Учитывая φ^{ω} -смешивание, мы получим из (14) и (15) выражения констант конкретных распадов через g^S и g^D :

$$g_{\rho^{\pm 0} \rightarrow \pi^{\pm 0} \gamma} = \frac{1}{3} g^D, \quad g_{K^{* \pm} \rightarrow K^{\pm} \gamma} = \frac{1}{3} g^D, \\ g_{K^{* 0} \rightarrow K^0 \gamma} = -\frac{2}{3} g^D, \quad g_{\rho^0 \rightarrow \gamma \gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}} g^D, \quad (16)$$

$$g_{\varphi \rightarrow \pi^0 \gamma} = \frac{g^D}{\sqrt{3}} \cos \theta - \frac{g^S}{\sqrt{2}} \sin \theta, \quad g_{\omega \rightarrow \pi^0 \gamma} = \frac{g^D}{\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{g^S}{\sqrt{2}} \cos \theta, \\ g_{\varphi \rightarrow \gamma \gamma} = -\frac{g^D}{3} \cos \theta + \frac{g^S}{\sqrt{6}} \sin \theta, \quad g_{\omega \rightarrow \gamma \gamma} = -\frac{g^D}{3} \sin \theta + \frac{g^S}{\sqrt{6}} \cos \theta.$$

Таким образом, в унитарной симметрии существуют следующие соотношения между константами радиационных распадов векторных мезонов на псевдоскалярные мезоны:

$$g_{\rho^{\pm 0} \rightarrow \pi^{\pm 0} \gamma} : g_{K^{* \pm} \rightarrow K^{\pm} \gamma} : g_{K^{* 0} \rightarrow K^0 \gamma} : g_{\rho^0 \rightarrow \gamma \gamma} \\ = 1 : 1 : -2 : \sqrt{3}, \quad (17)$$

$$|g_{\omega \rightarrow \pi^0 \gamma}|^2 + |g_{\varphi \rightarrow \pi^0 \gamma}|^2 = 3 \left(|g_{\omega \rightarrow \gamma \gamma}|^2 + |g_{\varphi \rightarrow \gamma \gamma}|^2 \right). \quad (18)$$

Рассмотрим теперь радиационные распады мезонов 2^+ на псевдоскалярные мезоны.

Из C - инвариантности следует, что

$$\langle P | J_\mu^e | \omega^0 \rangle = 0, \quad (19)$$

$$\langle P | J_\mu^e | T \rangle = f^F \left(\bar{P}_r^1 T_1^r - \bar{P}_1^r T_r^1 \right), \quad (20)$$

и следовательно, константы радиационных распадов всех нейтральных частиц равны нулю, а константы распадов $K^{\prime \pm}$ и $\rho^{\prime \pm}$ равны между собой по абсолютной величине:

$$g_{K^{\prime \pm} \rightarrow K^{\pm} \gamma} = g_{\rho^{\prime \pm} \rightarrow \pi^{\pm} \gamma}, \quad (21)$$

$$g_{\rho^{\prime 0} \rightarrow \pi^0 \gamma} = g_{\rho^{\prime 0} \rightarrow \gamma \gamma} = g_{\omega^0 \rightarrow \pi^0 \gamma} = \dots = g_{K^{\prime 0} \rightarrow K^0 \gamma} = 0. \quad (22)$$

Отметим, что одно из равенств (22), а именно последнее ($g_{K^{\prime 0} \rightarrow K^0 \gamma} = 0$), является новым следствием унитарной симметрии, а остальные могут быть получены из C - инвариантности.

Поскольку X - мезон является унитарным синглетом, то матричный элемент тока J_μ^e - компоненты октуплета между состояниями X - мезона и ω^0 - мезона равны нулю

$$\langle \omega^0 | J_\mu^e | X \rangle = 0, \quad (23)$$

а матричный элемент между состояниями X - мезона и октуплета векторных мезонов зависит от одной константы:

$$\langle V | J_\mu^e | X \rangle = f \bar{V}_1^1 X. \quad (24)$$

Отсюда получаем, учитывая φ^{ω} - смешивание,

$$g_{X \rightarrow \rho \gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} f, \quad g_{X \rightarrow \omega \gamma} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \theta f, \quad (25)$$

$$g_{\varphi \rightarrow X \gamma} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos \theta f,$$

и следовательно:

$$g_{X \rightarrow \rho \gamma} : g_{X \rightarrow \omega \gamma} : g_{\varphi \rightarrow X \gamma} = 1 : \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} : \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} \quad (26)$$

где θ - угол φ^{ω} - смешивания.

Многие из написанных соотношений можно получить весьма просто, если применить технику подгруппы SU(2) V - спина и пользоваться тем, что электромагнитный

ток является V - синглетом. Например, матричный элемент электромагнитного тока между состояниями V - дублетов

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ -\pi^+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} K^{*+} \\ -\rho^+ \end{pmatrix}$$

должен быть инвариантом V - подгруппы и имеет вид:

$$\langle (\pi^+) | J_\mu^e | (K^{*+}) \rangle = g (\bar{K}^+ K^{*+} + \bar{\pi}^+ \rho^+).$$

Отсюда получаем одно из соотношений (17)

$$g_{K^{*+} \rightarrow K^+ \gamma} = g_{\rho^+ \rightarrow \pi^+ \gamma}.$$

Аналогично получается (21).

Метод V - спина оказывается весьма удобным при изучении ряда электромагнитных процессов. Так, например, поскольку комбинация

$$\pi^0 - \sqrt{3} \eta$$

является компонентой V - триплета, а ток является V - синглетом, то матричный элемент произведения двух токов между вакуумом и состоянием $\pi^0 - \sqrt{3} \eta$ равен нулю:

$$\langle 0 | J_\mu^e(x) J_\nu^e(y) | \pi^0 - \sqrt{3} \eta \rangle = 0.$$

Отсюда получаем

$$\langle 0 | J_\mu^e(x) J_\nu^e(y) | \pi^0 \rangle = \sqrt{3} \langle 0 | J_\mu^e(x) J_\nu^e(y) | \eta \rangle. \quad (27)$$

С другой стороны, матричные элементы радиационных распадов

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma, \quad \eta \rightarrow \gamma + \gamma$$

пропорциональны матричным элементам произведения токов между вакуумом и состояниями этих частиц. Поэтому из (27) получаем соотношение между константами рассматриваемых распадов

$$g_{\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma} = \sqrt{3} g_{\eta \rightarrow \gamma \gamma}. \quad (28)$$

Рассмотрим теперь матричные элементы виртуальных переходов между фотоном и нейтральными векторными мезонами ρ^0, ω, φ . Мы имеем матричные элементы

$$\langle 0 | J_\mu^e | \omega^0 \rangle = 0 \quad (29)$$

$$\langle 0 | J_\mu^e | V \rangle = f V_2^+ \quad (30)$$

по аналогии с (23) и (24). Отсюда получаем

$$g_{\rho^+ \rightarrow \gamma} : g_{\omega \rightarrow \gamma} : g_{\varphi \rightarrow \gamma} = 1 : \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} : \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}}, \quad (31)$$

где θ - угол φ - смешивания.

Рассмотрим, наконец, электромагнитные распады декуплета барионных резонансов. Унитарная часть матричного элемента имеет вид

$$\langle B | J_\mu^e | D \rangle = f \epsilon^{1\alpha\beta} \bar{B}_\alpha^r D_{\beta r 1}. \quad (32)$$

Константы конкретных процессов с точностью до знака равны:

$$\begin{aligned} g_{\Delta^+ \rightarrow p \gamma} &= \frac{1}{\sqrt{3}} f, & g_{\Delta^0 \rightarrow n \gamma} &= \frac{1}{\sqrt{3}} f, \\ g_{\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+ \gamma} &= \frac{1}{\sqrt{3}} f, & g_{\Sigma^0 \rightarrow \Sigma^0 \gamma} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} f, \\ g_{\Sigma^0 \rightarrow \Lambda \gamma} &= \frac{1}{2} f, & g_{\Sigma^- \rightarrow \Sigma^- \gamma} &= 0, \\ g_{\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^0 \gamma} &= \frac{1}{\sqrt{3}} f, & g_{\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^- \gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда получаем соотношения

$$g_{\Delta^+ \rightarrow p \gamma} : g_{\Delta^0 \rightarrow n \gamma} : g_{\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+ \gamma} : g_{\Sigma^0 \rightarrow \Sigma^0 \gamma} : g_{\Sigma^0 \rightarrow \Lambda \gamma} \quad (33)$$

$$: g_{\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^0 \gamma} = 1 : 1 : 1 : -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1,$$

$$g_{\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^- \gamma} = g_{\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+ \gamma} = 0, \quad (34)$$

среди которых только одно соотношение

$$g_{\Delta^+ \rightarrow p \gamma} = g_{\Delta^0 \rightarrow n \gamma}$$

получается из изотопической инвариантности. Отметим, что все соотношения (33) и (34) можно получить просто из сохранения V - спина. Действительно, мы имеем следующие

V - мультиплеты

$$\begin{pmatrix} \Delta^+ \\ -\gamma^+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho^+ \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Sigma^- \\ \Sigma^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta^0 \\ y^{*0} \\ \Sigma^0 \\ \Xi^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Sigma^0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \\ \Xi^0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Delta^- \\ y^{*-} \\ \Sigma^- \\ \Xi^- \end{pmatrix}$$

а комбинация

$$\sqrt{3} \Sigma^0 + \lambda$$

является V - синглетом, так же как и ток J_{μ}^e . Тогда из инвариантности относительно подгруппы V - спина сразу вытекают соотношения

$$g_{\Delta^+ \rightarrow p \gamma} = g_{y^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \gamma},$$

$$g_{\Delta^0 \rightarrow n \gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2} g_{y^{*0} \rightarrow \lambda \gamma} - \frac{1}{2} g_{y^{*0} \rightarrow \Sigma^0 \gamma} = g_{\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^0 \gamma},$$

$$g_{y^{*0} \rightarrow \Sigma^- \gamma} = g_{\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^- \gamma} = \sqrt{3} g_{y^{*0} \rightarrow \Sigma^0 \gamma} + g_{y^{*0} \rightarrow \lambda \gamma} = 0.$$

С другой стороны, из сохранения T - спина мы имеем:

$$g_{\Delta^+ \rightarrow p \gamma} = g_{\Delta^0 \rightarrow n \gamma}$$

Нетрудно увидеть, что все эти соотношения полностью эквивалентны соотношениям (33) и (34).

§ 3. Соотношения между вероятностями распадов

На основе полученных выше соотношений между константами радиационных распадов можно получить соотношения между вероятностями соответствующих процессов. Рассмотрим радиационные распады векторных мезонов. Матричные элементы конкретных процессов имеют вид:

$$M(V \rightarrow P \gamma) = e g_i \varepsilon_{\alpha \rho \tau \sigma} \bar{e}_{\alpha} k_{\rho} q_{\tau} \xi_{\sigma}, \quad (35)$$

где k и q - импульсы фотона и псевдоскалярного мезона, e_{α} и ξ_{σ} - волновые функции фотона и векторного мезона, а константы g_i различных процессов связаны между собой соотношениями (17) и (18). Обозначим через M и m массы векторного и псевдоскалярного мезонов. Вероятность равна

$$W(V \rightarrow P \gamma) = \frac{\alpha |g_i|^2}{96 \pi} \left(\frac{M^2 - m^2}{M} \right)^3. \quad (36)$$

Соотношения между вероятностями даны в таблице X.

Таблица X

Отношение вероятностей	Теоретическое значение
$\frac{W(K^{*+} \rightarrow K^+ \gamma)}{W(\rho^{*+} \rightarrow \pi^+ \gamma)}$	0,58
$\frac{W(K^{*0} \rightarrow K^0 \gamma)}{W(\rho^{*0} \rightarrow \pi^0 \gamma)}$	2,32
$\frac{W(\omega \rightarrow \eta \gamma)}{W(\rho^{*0} \rightarrow \pi^0 \gamma)}$	0,36
$\frac{W(\omega \rightarrow \pi^0 \gamma) + 0,44 W(\eta \rightarrow \pi^0 \gamma)}{W(\omega \rightarrow \eta \gamma) + 0,12 W(\eta \rightarrow \eta \gamma)}$	21

Матричные элементы радиационных распадов мезонов 2^+ на псевдоскалярные мезоны имеют вид

$$M(T \rightarrow P \gamma) = e g_i \varepsilon_{\alpha \rho \tau \sigma} \bar{e}_{\alpha} p_{\rho} k_{\tau} k_{\sigma} T_{\delta \sigma}, \quad (37)$$

где p_{ρ} и $T_{\delta \sigma}$ - импульс и волновая функция мезона 2^+ . Отсюда получаем отношение вероятностей

$$\frac{W(K'^{\pm} \rightarrow K^{\pm} \gamma)}{W(\rho'^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm} \gamma)} = \left(\frac{m_{K'}^2 - m_K^2}{m_{\rho'}^2 - m_{\pi}^2} \right)^5 \left(\frac{m_{\rho'}}{m_{K'}} \right)^5 \approx 0,85. \quad (38)$$

Отметим, что

$$W(K'^0 \rightarrow K^0 \gamma) = 0. \quad (39)$$

Аналогично, равенство (26) приводит к соотношениям между вероятностями распадов

$$\rho \rightarrow \rho^0 + \gamma, \quad \chi \rightarrow \omega + \gamma, \quad \varphi \rightarrow \chi + \gamma.$$

Мы имеем:

$$\begin{aligned} W(\chi \rightarrow \rho^0 \gamma) : W(\chi \rightarrow \omega \gamma) : W(\varphi \rightarrow \chi \gamma) = \\ \left(\frac{m_\chi^2 - m_\rho^2}{m_\chi} \right)^3 : \frac{\sin^2 \theta}{3} \left(\frac{m_\chi^2 - m_\omega^2}{m_\chi} \right)^3 : \frac{\cos^2 \theta}{3} \left(\frac{m_\varphi^2 - m_\chi^2}{m_\varphi} \right)^3 \\ = 13 : 3 : 1, \end{aligned} \quad (40)$$

а из равенства (28) получаем:

$$\frac{W(\rho \rightarrow \gamma \gamma)}{W(\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma)} = \frac{1}{3} \left(\frac{m_\rho}{m_\pi} \right)^3 = 23. \quad (41)$$

Соотношения (31) можно проверить путем изучения электромагнитных распадов нейтральных векторных мезонов

$$\begin{aligned} \rho^0 &\rightarrow e^+ + e^-, \quad \mu^+ + \mu^-, \\ \omega &\rightarrow e^+ + e^-, \quad \mu^+ + \mu^-, \\ \varphi &\rightarrow e^+ + e^-, \quad \mu^+ + \mu^-. \end{aligned}$$

Матричные элементы процессов такого типа имеют вид

$$M(V \rightarrow l^+ l^-) = e^2 g_{V \rightarrow \gamma} \frac{1}{M^2} \bar{u}(k_2) \gamma_\mu v(k_1) \xi_\mu, \quad (42)$$

где $\xi_\mu u(k_2), v(k_1)$ - волновые функции векторных мезонов и лептонов, соответственно, M - масса мезонов, а $g_{V \rightarrow \gamma}$ - константы виртуальных переходов между состояниями фотона и векторных мезонов. Вероятность равна

$$W(V \rightarrow l^+ l^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3} |g_{V \rightarrow \gamma}|^2 \frac{1}{M^3} \left[1 + 2 \left(\frac{m_l}{M} \right)^2 \right] \left[1 - 4 \left(\frac{m_l}{M} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (43)$$

где m_l - масса лептонов. Из этого выражения и соотношений (31) получаем:

$$\begin{aligned} W(\rho^0 \rightarrow e^+ e^-, \mu^+ \mu^-) : W(\omega \rightarrow e^+ e^-, \mu^+ \mu^-) : W(\varphi \rightarrow e^+ e^-, \mu^+ \mu^-) = \\ 1 : \frac{3}{8} \sin^2 \theta : \frac{3}{2} \cos^2 \theta \approx 1 : \frac{1}{8} : 1. \end{aligned} \quad (44)$$

При изучении формфакторов барионов мы показали, что матричный элемент распада

$$\Sigma^0 \rightarrow \lambda + \gamma$$

полностью определяется магнитным моментом нейтрона

$$M(\Sigma \rightarrow \lambda \gamma) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_\mu \bar{u}_\lambda(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} u_\Sigma(p_1), \quad (45)$$

где M - средняя масса барионов. Таким образом, вероятность этого распада равна

$$W(\Sigma \rightarrow \lambda \gamma) = \frac{3\alpha}{2} \mu_n^2 \frac{\omega^3}{M^2}, \quad \omega = \frac{M_{\Sigma^0}^2 - M_\lambda^2}{2M_{\Sigma^0}}. \quad (46)$$

Рассмотрим, наконец, распады барионных резонансов $\frac{3}{2}^+$. Матричные элементы этих процессов имеют вид:

$$\begin{aligned} M(D \rightarrow B \gamma) = e \bar{u}(q) \left\{ g_i (\delta_{\mu\nu} - \frac{i k_\mu k_\nu}{m+M}) \gamma_\nu \right\} \gamma_5 \\ + f_i \frac{1}{(m+M)^2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} p^\sigma k^\tau \left\{ u_B(p) \bar{u}_D(p) \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

где $u(q)$ и $u_B(p)$ - волновые функции барионов и барионных резонансов с импульсами q и p , соответственно, m и M - их массы, а константы g_i и f_i для конкретных процессов связаны между собой соотношениями вида (33).

Вероятность равна

$$\begin{aligned} W(D \rightarrow B \gamma) = \frac{e^2}{24\pi} \frac{M^2 - m^2}{M} \left\{ |g_i|^2 \left[\left(1 - \frac{m}{M}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{m}{M}\right)^3 \left(1 + \frac{m}{M}\right) \right] \right. \\ \left. + 4 |f_i|^2 \left(\frac{M}{m+M} \right)^4 \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 - \text{Re } g_i f_i^* \left(\frac{M}{m+M} \right)^2 \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)^2 \left(3 + \frac{m}{M}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Очевидно, что отношения кинематических факторов при $|g_i|^2$, $|f_i|^2$ и $\text{Re } f_i g_i^*$ различны для различных процессов. Поэтому из соотношений между константами нельзя получить простые соотношения между вероятностями. Таким образом, в данном случае для проверки предсказаний унитарной симметрии, вообще говоря, необходимо прежде всего изучить поляризационные эффекты и определить независимые константы в каждом процессе (с точностью до фазы), а затем сравнить с равенствами (33). Отметим также, что, в силу соотношений (34), вероятность распадов

$$\gamma^* \rightarrow \Sigma^+ \gamma, \quad \Sigma^{*-} \rightarrow \Sigma^- + \gamma$$

должна обращаться в нуль.

§ 4. Соотношения между амплитудами фоторождения

Спирную технику, развитую в главе IV, можно применить также к изучению процессов фоторождения. Однако многие соотношения между амплитудами различных процессов можно получить при помощи метода V - спина. Поскольку электромагнитный ток является V - синглетом, то можно сказать, что в электромагнитном взаимодействии V - спин сохраняется. С другой стороны, мы имеем следующие V - мультиплеты (см. главу III, п.П, § 2)

$$\begin{pmatrix} \pi^+ \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^0 \\ -\frac{1}{2}\Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda \\ \Sigma^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^+ \\ -\pi^+ \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем как следствие сохранения V - спина соотношение

$$-\langle n\pi^+ | J_\mu^e | p \rangle = \sqrt{2} \langle (-\frac{1}{2}\Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda) K^+ | J_\mu^e | p \rangle$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2}} M(\gamma_p \rightarrow \Sigma^0 K^+) = \sqrt{\frac{3}{2}} M(\gamma_p \rightarrow \lambda K^+) + M(\gamma_p \rightarrow n\pi^+). \quad (49)$$

Аналогично, для амплитуд фоторождения частиц из V - мультиплетов

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ -\pi^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta^0 \\ Y^0 \\ \Sigma^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^{*+} \\ -\rho^+ \end{pmatrix}$$

(см. главу III, п.П, § 2) мы имеем соотношения

$$M(\gamma_p \rightarrow \Delta^0 \pi^+) = -\sqrt{2} M(\gamma_p \rightarrow Y^0 K^+), \quad (50)$$

$$M(\gamma_p \rightarrow \Delta^0 \rho^+) = -\sqrt{2} M(\gamma_p \rightarrow Y^0 K^{*+}). \quad (51)$$

Можно получить также ряд других более сложных соотношений. Однако на этом останавливаться мы не будем.

§ 5. Электромагнитное расщепление масс частиц в изотопических

мультиплетах

Как было отмечено в главе II (п.Ш, § 3), перенормировка массы за счет электромагнитного взаимодействия приводит к расщеплению масс частиц в каждом изотопическом мультиплете, и в массовом члене лагранжиана возникает добавка, инвариантная по отношению к изотопической группе (и, следовательно, по отношению к группе унитарной симметрии). Эта добавка преобразуется как произведение электромагнитного тока на себя относительно изотопической группы, а также относительно группы унитарной симметрии. Так как ток преобразуется как компонента октуплета, то произведение тока на себя должно содержаться в произведении двух октуплетов

$$8 \times 8 = 1 + 8 + 8 + 10 + \bar{10} + 27$$

Поэтому оно может содержать части, преобразующиеся по представлениям $1, 8, 10, \bar{10}$ и 27 группы $SU(3)$. Напомним, что электромагнитный ток является V - синглетом с $Y = Q = 0$, а декуплет и сопряженный декуплет содержат только V - синглеты с $Y = 1, Q = +2$ и $Y = -1, Q = -2$, соответственно, (см. главу III, п.П, § 2). Поэтому произведение тока на себя не может содержать частей, принадлежащих декуплету и сопряженному декуплету. Таким образом, мы заключаем, что, наряду с инвариантным членом, добавка к массовой части лагранжиана за счет электромагнитного взаимодействия содержит еще два члена, являющихся компонентами с нулевыми V - спином, гиперзарядом и зарядом октуплета и 27 -плета.

Рассмотрим электромагнитную добавку к массовой части лагранжиана барионов. Октуплетный член имеет вид^{*}

$$\frac{b}{3} (2\bar{B}_2^1 B_1^2 - \bar{B}_2^2 B_1^1 - \bar{B}_2^3 B_1^3) + \frac{c}{3} (2\bar{B}_1^1 B_2^1 - \bar{B}_2^2 B_1^2 - \bar{B}_3^3 B_1^3) \\ = b \bar{B}_2^1 B_1^2 + c \bar{B}_1^1 B_2^1 - \frac{b+c}{3} \bar{B}_\rho^2 B_\rho^1. \quad (52)$$

Так как последний член в правой части (52) является инвариантом, то его можно включить в синглетный член. Следовательно, в качестве вклада типа октуплета можно взять два первых члена в (52). Аналогично, вклад типа 27 -плета имеет вид линейной комбинации произведения

* Напомним, что компонентой с $V=Y=Q=0$ октуплета Φ_ρ^2 является

$$\frac{1}{\sqrt{6}} (2\Phi_1^1 - \Phi_2^2 - \Phi_3^3)$$

$$\bar{B}_1^1 \quad B_1^1$$

и двух рассмотренных (октетного и синглетного) членов. Таким образом, электромагнитная добавка к массам барионов имеет вид

$$\delta M = a_1 \bar{B}_p^1 B_p^1 + a_2 \bar{B}_\lambda^1 B_\lambda^1 + a_3 \bar{B}_\Sigma^1 B_\Sigma^1 + a_4 \bar{B}_\Lambda^1 B_\Lambda^1. \quad (53)$$

Значения δM для каждой частицы и значение параметра $\Sigma\lambda$ -смешивания выражаются через a_i следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta M_p &= a_1 + a_2, & \delta M_n &= a_2, \\ \delta M_{\Sigma^+} &= a_1 + a_2, & \delta M_{\Sigma^-} &= a_1 + a_3, \\ \delta M_{\Sigma^0} &= a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{2} a_3 + \frac{1}{2} a_4, \\ \delta M_\lambda &= a_1 + \frac{1}{6} a_2 + \frac{1}{6} a_3 + \frac{1}{6} a_4, \\ \delta M_{\Xi^0} &= a_2, & \delta M_{\Xi^-} &= a_1 + a_3, \\ M_{\Sigma\lambda} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (a_1 + a_3 + a_4). \end{aligned} \quad (54)$$

Отсюда получаем соотношение между разностями масс частиц в изотопических мультиплеттах

$$M_{\Sigma^-} - M_{\Sigma^+} = M_n - M_p + M_{\Xi^-} - M_{\Xi^0}, \quad (55)$$

которое хорошо согласуется с опытом:

$$\begin{aligned} M_{\Xi^-} - M_{\Xi^0} &= (0,5 \pm 1) \text{ Мэв}, \\ M_n - M_p &= +1,3 \text{ Мэв}, \\ M_{\Sigma^-} - M_{\Sigma^+} &= (+7,7 \pm 0,3) \text{ Мэв}. \end{aligned}$$

Что касается параметра $\Sigma\lambda$ -смешивания, то мы имеем

$$M_{\Sigma\lambda} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ (M_p - M_n) + (M_{\Xi^-} - M_{\Xi^0}) + (M_{\Sigma^0} - \frac{M_{\Sigma^+} + M_{\Sigma^-}}{2}) \right\}. \quad (56)$$

Аналогично, добавка к массам частиц из декуплета имеет вид:

$$\delta M = a_1 \bar{D}^{\{1\alpha p\}} D_{\{1\alpha p\}} + a_2 \bar{D}^{\{1\alpha p\}} D_{\{1\alpha p\}} + a_3 \bar{D}^{\{11\alpha\}} D_{\{11\alpha\}}$$

Для конкретных частиц мы имеем:

$$\begin{aligned} \delta M_{\Delta^{++}} &= a_1 + a_2 + a_3, & \delta M_{\Delta^+} &= a_1 + \frac{1}{3} a_2 + \frac{1}{3} a_3, \\ \delta M_{\Delta^0} &= a_1 + \frac{1}{3} a_2, & \delta M_{\Delta^-} &= a_1, \\ \delta M_{Y^*+} &= a_1 + \frac{2}{3} a_2 + \frac{1}{3} a_3, & \delta M_{Y^*0} &= a_1, \\ \delta M_{Y^*0} &= a_1 + \frac{1}{3} a_2, & \delta M_{Y^*-} &= a_1, \\ \delta M_{\Xi^{*0}} &= a_1 + \frac{1}{3} a_2, & \delta M_{\Xi^{*-}} &= a_1, \\ \delta M_{\Omega^-} &= a_1. \end{aligned} \quad (58)$$

Очевидно, что изотопическое соотношение (см. главу II, п. III, § 3)

$$M_{\Delta^{++}} - M_{\Delta^-} = 3 (M_{\Delta^+} - M_{\Delta^0})$$

выполняется. Кроме того, мы имеем соотношения

$$\begin{aligned} M_{\Delta^+} - M_{\Delta^0} &= M_{Y^*+} - M_{Y^*0}, \\ M_{\Delta^0} - M_{\Delta^-} &= M_{Y^*0} - M_{Y^*-} = M_{\Xi^{*0}} - M_{\Xi^{*-}}. \end{aligned} \quad (59)$$

В заключение отметим, что соотношение типа (55) для мезонов является тождеством в силу C-инвариантности, а формула, аналогичная (56), дает параметр $\pi\eta$ -смешивания:

$$\delta_{\pi\eta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[2(m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2) + (m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2) \right]. \quad (60)$$

II. СЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

§ I. Токи слабых взаимодействий в унитарной симметрии

В главе II были изучены изотопические свойства тока слабых взаимодействий барионов и мезонов с $\Delta S = 0$

$$J_\mu = J_\mu^V + J_\mu^A$$

и тока слабых взаимодействий барионов и мезонов с $\Delta S = \Delta Q = 1$

Мы предположили, что $J_\mu^{V,A}$ являются компонентами изотопических триплетов ($T_3 = -1, T = 1$) с $Y = 0$, а $S_\mu^{V,A}$ являются компонентами изотопических дублетов ($T_3 = -\frac{1}{2}, T = \frac{1}{2}$) с $Y = -1$.

С другой стороны, мы знаем, что октуплет является унитарным мультиплетом с наименьшим числом компонент, который содержит изотопический триплет с $Y = 0$ и изотопические дублеты с $Y = \pm 1$. Поэтому естественным обобщением рассмотренных изотопических свойств токов слабых взаимодействий барионов и мезонов является предположение о том, что токи J_μ^V и S_μ^V , а также J_μ^A и S_μ^A вместе с сопряженными к ним токами принадлежат одним и тем же октуплетам $(V_\mu)_\rho^\alpha$ и $(A_\mu)_\rho^\alpha$, соответственно:

$$\begin{aligned} J_\mu^V &= \alpha_V (V_\mu)_2^1, & (J_\mu^V)^\dagger &= \alpha_V (V_\mu)_1^2, \\ S_\mu^V &= \beta_V (V_\mu)_3^1, & (S_\mu^V)^\dagger &= \beta_V (V_\mu)_1^3, \\ J_\mu^A &= \alpha_A (A_\mu)_2^1, & (J_\mu^A)^\dagger &= \alpha_A (A_\mu)_1^2, \\ S_\mu^A &= \beta_A (A_\mu)_3^1, & (S_\mu^A)^\dagger &= \beta_A (A_\mu)_1^3, \end{aligned} \quad (61)$$

где $\alpha_{V,A}$ и $\beta_{V,A}$ - четыре произвольных константы. Поскольку ток слабых взаимодействий J_μ^V и изовекторный электромагнитный ток J_μ^1 являются разными компонентами одного и того же изотопического триплета, а изовекторный и изоскалярный токи J_μ^1 и J_μ^0 принадлежат одному и тому же унитарному октуплету, то полный электромагнитный ток J_μ^e также есть компонента рассматриваемого векторного октуплета $(V_\mu)_\rho^\alpha$

$$J_\mu^e = (V_\mu)_1^1$$

(см. формулу (5)).

В универсальной $V-A$ теории слабых взаимодействий Гелл-Манна и Фейнмана лагранжиан слабых взаимодействий имеет вид

$$\mathcal{L}_w = \frac{G}{\sqrt{2}} (j_\mu^l + J_\mu + S_\mu) (j_\mu^l + J_\mu + S_\mu)^\dagger,$$

где j_μ^l - лептонный ток, причем J_μ^V равен (а не пропорционален) нормированной компоненте с $T_3 = -1$ изотопического триплета, нормированной компонентой с $T_3 = 0$ которого является изовекторный электромагнитный ток. Иначе говоря, константа α_V равна единице. Это предположение вместе с предположением о сохранении векторного тока позволяет объяснить приблизительное равенство константы распада μ - мезона и векторной константы β - распада нейтрона. С другой стороны, опыт показывает, что константы $\beta_{V,A}$ отличаются от единицы, как мы увидим ниже. Таким образом, экспериментальные данные согласуются с предположением об универсальности токов J_μ^V и J_μ^A , но не согласуются с предположением об универсальности всех токов J_μ^e и J_μ^0 .

J_μ^V, S_μ^V . Что касается аксиального тока J_μ^A , то перенормировка за счет сильных взаимодействий может менять эффективную константу связи этого тока.

Отметим, что экспериментальные данные также не противоречат предположению о том, что константа α_V в (I) меньше единицы на несколько процентов. Следуя Кабиббо, предположим, что $\alpha_{V,A}$ и $\beta_{V,A}$ связаны соотношениями

$$\alpha_{V,A}^2 + \beta_{V,A}^2 = 1.$$

Положим

$$\frac{\beta_{V,A}}{\alpha_{V,A}} = \tan \tau_{V,A}.$$

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} J_\mu^V &= \cos \tau_V (V_\mu)_2^1, & (J_\mu^V)^\dagger &= \cos \tau_V (V_\mu)_1^2, \\ S_\mu^V &= \sin \tau_V (V_\mu)_3^1, & (S_\mu^V)^\dagger &= \sin \tau_V (V_\mu)_1^3, \\ J_\mu^A &= \cos \tau_A (A_\mu)_2^1, & (J_\mu^A)^\dagger &= \cos \tau_A (A_\mu)_1^2, \\ S_\mu^A &= \sin \tau_A (A_\mu)_3^1, & (S_\mu^A)^\dagger &= \sin \tau_A (A_\mu)_1^3. \end{aligned} \quad (62)$$

Если мы рассмотрим $(V_\mu)_2^1$ и $(V_\mu)_3^1$, например, как нормированные векторы в восьмимерном пространстве, которые ортогональны друг другу, то тогда векторный и аксиальный токи сильновзаимодействующих частиц

$$\begin{aligned} \cos \tau_V (V_\mu)_2^1 + \sin \tau_V (V_\mu)_3^1, \\ \cos \tau_A (A_\mu)_2^1 + \sin \tau_A (A_\mu)_3^1 \end{aligned}$$

являются также нормированными векторами. В данном случае универсальность слабых взаимодействий понимается в том смысле, что лептонные токи и токи сильновзаимодействующих частиц являются нормированными.

Отметим, что $(V_\mu)_2^1$ и $(V_\mu)_3^1$, например, образуют V - дублет, и при вращении на угол α вокруг третьей оси в трехмерном пространстве V - спина компонента $(V_\mu)_2^1$ превращается в комбинацию

$$\cos \frac{\alpha}{2} (V_\mu)_2^1 + \sin \frac{\alpha}{2} (V_\mu)_3^1.$$

Таким образом, векторный и аксиальный токи слабых взаимодействий получаются из нормированных токов $(V_\mu)_2^1$ и $(A_\mu)_2^1$ вращениями на углы $2\tau_V$ и $2\tau_A$, соответственно, вокруг третьей оси в трехмерном пространстве V - спина. Мы покажем ниже, что эксперимент дает весьма близкие значения углов τ_V и τ_A . Это означает, что полный ток слабых взаимодействий сильновзаимодействующих частиц получается из одной нормированной компоненты октуплета $(V_\mu)_\rho^\alpha$.

$$(J_{\mu}^1)_2 = (V_{\mu}^1)_2 + (A_{\mu}^1)_2$$

вращением на угол 2τ вокруг третьей оси в пространстве V - спина. Мы имеем, таким образом:

$$L_W = \frac{G}{\sqrt{2}} \left(j_{\mu}^1 + \cos \tau (J_{\mu}^1)_2 + \sin \tau (J_{\mu}^1)_3 \right) \left(j_{\mu}^1 + \cos \tau (J_{\mu}^1)_2 + \sin \tau (J_{\mu}^1)_3 \right)^{\dagger} \quad (63)$$

Оценим теперь углы τ_V и τ_A на основе имеющихся экспериментальных данных. Рассмотрим распады

$$K^- \rightarrow \mu^- + \nu, \\ \pi^- \rightarrow \mu^- + \nu.$$

Их матричные элементы равны:

$$M(K^- \rightarrow \mu^- \nu) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_1) \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) v(k_2) P_{\mu} g_K, \\ M(\pi^- \rightarrow \mu^- \nu) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_1) \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) v(k_2) P_{\mu} g_{\pi}, \quad (64)$$

где P_{μ} , k_1 и k_2 - импульсы псевдоскалярных мезонов, μ - мезона и антинейтрино, соответственно, а g_K и g_{π} - некоторые константы, определяющиеся следующим образом:

$$\langle 0 | S_{\mu}^A | K^- \rangle = P_{\mu} g_K, \\ \langle 0 | J_{\mu}^A | \pi^- \rangle = P_{\mu} g_{\pi}, \quad (65)$$

поскольку в данном случае, как легко показать, только аксиальный ток дает вклад. С другой стороны,

$$\langle 0 | S_{\mu}^A | K^- \rangle = \sin \tau_A \langle 0 | (A_{\mu})_3 | K^- \rangle, \\ \langle 0 | J_{\mu}^A | \pi^- \rangle = \cos \tau_A \langle 0 | (A_{\mu})_2 | \pi^- \rangle, \quad (66)$$

а из унитарной симметрии следует равенство

$$\langle 0 | (A_{\mu})_2 | \pi^- \rangle = \langle 0 | (A_{\mu})_3 | K^- \rangle. \quad (67)$$

Подставляя (66) в (65) и пользуясь (67), мы получаем:

$$\frac{g_K}{g_{\pi}} = \tan \tau_A. \quad (68)$$

С помощью матричных элементов (64) можно показать, что отношение вероятностей рассматриваемых распадов равно

$$\frac{W(K \rightarrow \mu \nu)}{W(\pi \rightarrow \mu \nu)} = \left(\frac{g_K}{g_{\pi}} \right)^2 \frac{m_K}{m_{\pi}} \frac{(1 - m_{\mu}^2/m_K^2)^2}{(1 - m_{\mu}^2/m_{\pi}^2)^2} = \tan^2 \tau_A \cdot \frac{m_K}{m_{\pi}} \frac{(1 - m_{\mu}^2/m_K^2)^2}{(1 - m_{\mu}^2/m_{\pi}^2)^2} \quad (69)$$

Пользуясь экспериментальными значениями вероятностей распадов $K \rightarrow \mu + \nu$ и $\pi \rightarrow \mu + \nu$, мы получаем отсюда

$$\tau_A = 0,266 \pm 0,005. \quad (70)$$

Аналогично, изучение распадов

$$K^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}, \\ \pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}$$

позволяет оценить величину угла τ_V . Матричные элементы этих распадов имеют вид

$$M(K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_2) \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) v(k_1) (p+q)_{\mu} f_K(k^2), \\ M(\pi^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_2) \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) v(k_1) (p+q)_{\mu} f_{\pi}(k^2), \quad (71)$$

где p и q - импульсы псевдоскалярных мезонов в начальных и конечных состояниях, соответственно $k = k_1 + k_2 = p - q$, $f_K(k^2)$ и $f_{\pi}(k^2)$ - некоторые формфакторы, определяемые соотношениями

$$\langle \pi^0 | J_{\mu}^V | \pi^- \rangle = (p+q)_{\mu} f_{\pi}(k^2), \\ \langle \pi^0 | S_{\mu}^V | K^- \rangle = (p+q)_{\mu} f_K(k^2). \quad (72)$$

Можно показать, что в данном случае только векторный ток дает вклад.

Чтобы найти соотношение между f_K и f_{π} , рассмотрим прежде всего матричный элемент тока $(V_{\mu})_{\rho}^{\alpha}$ между состояниями псевдоскалярных мезонов. Поскольку при S - преобразовании $(V_{\mu})_{\rho}^{\alpha}$ переходит в $-(V_{\mu})_{\alpha}^{\rho}$, то связь должна быть связью типа F :

$$\langle P | (V_{\mu})_{\rho}^{\alpha} | P \rangle = f(k^2) (p+q)_{\rho} (\bar{P}_{\rho}^{\alpha} P_{\rho}^{\alpha} - \bar{P}_{\rho}^{\alpha} P_{\rho}^{\alpha}). \quad (73)$$

Для рассматриваемых переходов

$$\begin{aligned} \langle \pi^0 | (V_\mu)_2^+ | \pi^- \rangle &= \sqrt{2} f(k^2) (p+q)_\mu, \\ \langle \pi^0 | (V_\mu)_3^+ | K^- \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} f(k^2) (p+q)_\mu. \end{aligned} \quad (74)$$

Отсюда получаем:

$$\frac{f_K(k^2)}{f_\pi(k^2)} = \frac{1}{2} \tan^2 \tau_V. \quad (75)$$

Если пренебречь зависимостью формфакторов от k^2 , то для отношения вероятностей имеем:

$$\frac{W(K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu})}{W(\pi^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu})} = \frac{1}{4} \tan^2 \tau_V \cdot \frac{15}{192} \cdot \left(\frac{m_K}{m_{\pi^+} - m_{\pi^0}} \right)^5. \quad (76)$$

Сравнивая с опытом, мы получаем значение угла τ_V

$$\tau_V \approx 0,241 \pm 0,008, \quad (77)$$

которое приблизительно равно τ_A . Этот общий угол в дальнейшем обозначим через τ .

В заключение этого параграфа мы сделаем два замечания. Во-первых, предположение о том, что J_μ^V и S_μ^V , а также J_μ^A и S_μ^A принадлежат одним и тем же октетам, является непосредственным следствием модели кварков. Действительно, кварки t_p , t_n и t_λ обозначим через ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 . Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned} J_\mu^V &\sim \bar{\psi}^1 \gamma_\mu \psi_2, & S_\mu^V &\sim \bar{\psi}^1 \gamma_\mu \psi_3, \\ J_\mu^A &\sim \bar{\psi}^1 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_2, & S_\mu^A &\sim \bar{\psi}^1 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_3, \end{aligned}$$

и отсюда следует наше утверждение. Во-вторых, из релятивистской инвариантности следует, что матричный элемент распада $K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}$ имеет общий вид

$$M(K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_2) \gamma_\mu (1+\gamma_5) v(k_1) \left\{ (p+q)_\mu f_K(k^2) + (p-q)_\mu g_K(k^2) \right\},$$

где $f_K(k^2)$ и $g_K(k^2)$ являются произвольными формфакторами. В случае, когда унитарная симметрия выполняется строго, начальный и конечный мезоны являются различными компонентами одного и того же унитарного мультиплетта, и вследствие T-инвариантности или сохранения векторного тока второй формфактор обращается в нуль: $g_K(k^2) = 0$. Мы имеем тогда первый матричный элемент в (71). Поэтому экспериментальное определение

$g_K(k^2)$ позволяет судить о степени нарушения унитарной симметрии.

§ 2. Лептонные распады барионов

Предложенные свойства симметрии тока слабых взаимодействий можно проверить путем изучения лептонных распадов барионов

$$B_1 \rightarrow B_2 + l^\pm + \bar{\nu},$$

где B_1 и B_2 - барионы из октетта, l^\pm - заряженные лептоны. Обозначим через k_1 и k_2 импульсы лептона и антилептона. Матричные элементы процессов с испусканием пар $l^\pm \bar{\nu}$ равны

$$M(B_1 \rightarrow B_2 l^\pm \bar{\nu}) = \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \tau \bar{u}(k_1) \gamma_\mu (1+\gamma_5) v(k_2) \langle B_2 | (J_\mu)_2^+ | B_1 \rangle, \quad (78)$$

если $\Delta S = 0$, и

$$M(B_1 \rightarrow B_2 l^\pm \bar{\nu}) = \frac{G}{\sqrt{2}} \sin \tau \bar{u}(k_1) \gamma_\mu (1+\gamma_5) v(k_2) \langle B_2 | (J_\mu)_3^+ | B_1 \rangle, \quad (79)$$

если $\Delta S = 1$, а матричные элементы процессов с испусканием пар $l^\pm \bar{\nu}$ равны

$$M(B_1 \rightarrow B_2 l^\pm \bar{\nu}) = \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \tau \bar{u}(k_1) \gamma_\mu (1+\gamma_5) v(k_2) \langle B_2 | (J_\mu)_2^+ | B_1 \rangle, \quad (80)$$

если $\Delta S = 0$, и

$$M(B_1 \rightarrow B_2 l^\pm \bar{\nu}) = \frac{G}{\sqrt{2}} \sin \tau \bar{u}(k_1) \gamma_\mu (1+\gamma_5) v(k_2) \langle B_2 | (J_\mu)_3^+ | B_1 \rangle, \quad (81)$$

если $\Delta S = -1$. Поэтому изучение лептонных распадов барионов сводится к изучению матричных элементов

$$\langle B | (J_\mu)_p^+ | B \rangle = \langle B | (V_\mu)_p^+ | B \rangle + \langle B | (A_\mu)_p^+ | B \rangle. \quad (82)$$

Из соображений релятивистской инвариантности, T-инвариантности и инвариантности относительно группы $SW(3)$ следует, что эти матричные элементы имеют вид

$$\langle B | (V_\mu)_p^+ | B \rangle = \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) f_1^F(k^2) + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} u(p_1) f_2^F(k^2) \right\} \quad (83)$$

$$\left(\bar{B}_p^\alpha B_p^\beta - \bar{B}_p^\beta B_p^\alpha \right) + \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) f_1^D(k^2) + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} u(p_1) f_2^D(k^2) \right\} \\ \left(\bar{B}_p^\alpha B_p^\beta + \bar{B}_p^\beta B_p^\alpha - \frac{2}{3} \delta^\alpha_\beta \bar{B}_p^\gamma B_p^\gamma \right), \quad (83)$$

$$\langle B | (A_p^\alpha)^\dagger | B \rangle = \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu \gamma_5 u(p_1) g_1^F(k^2) + \frac{i k_\mu}{M} \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) g_2^F(k^2) \right\} \\ \left(\bar{B}_p^\alpha B_p^\beta - \bar{B}_p^\beta B_p^\alpha \right) + \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu \gamma_5 u(p_1) g_1^D(k^2) + \right. \\ \left. \frac{i k_\mu}{M} \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) g_2^D(k^2) \right\} \left(\bar{B}_p^\alpha B_p^\beta + \bar{B}_p^\beta B_p^\alpha - \frac{2}{3} \delta^\alpha_\beta \bar{B}_p^\gamma B_p^\gamma \right), \quad (84)$$

где M — масса барионов, а p_1 и p_2 — импульсы барионов в начальном и конечном состоянии, соответственно. Отметим, что, если требуется только релятивистская инвариантность, то матричные элементы токов $(V_\mu)_p^\alpha$ и $(A_\mu)_p^\alpha$ должны содержать также спиновые структуры

$$\frac{i k_\mu}{M} \bar{u}(p_2) u(p_1) \quad \text{и} \quad \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} \gamma_5 u(p_1)$$

соответственно. Однако в случае, когда начальный и конечный барионы принадлежат одному и тому же октаплету, а унитарная симметрия выполняется точно, существование таких членов приводит к нарушению T -инвариантности. Отсутствие спиновой амплитуды

$$\frac{i k_\mu}{M} \bar{u}(p_2) u(p_1)$$

в матричном элементе векторного тока также является следствием сохранения векторного тока.

Произвольные формфакторы векторного тока $f_1^{F,D}(k^2)$ и $f_2^{F,D}(k^2)$ можно определить на основе экспериментальных данных по электромагнитным формфакторам нуклонов. Действительно, поскольку электромагнитный ток J_μ^e является компонентой $(V_\mu)_1^\alpha$, то формфакторы нуклонов выражаются через формфакторы в (83) соотношениями

$f_1^{\uparrow}(k^2) = f_1^F(k^2) + \frac{1}{3} f_1^D(k^2)$, $f_1^{\sim}(k^2) = -\frac{2}{3} f_1^D(k^2)$ (см. формулы (8)), и обратно произвольные формфакторы $f_1^{F,D}(k^2)$ и $f_2^{F,D}(k^2)$ полностью определяются электромагнитными формфакторами протона и нейтрона:

$$f_1^F(k^2) = f_1^{\uparrow}(k^2) + \frac{1}{2} f_1^{\sim}(k^2), \quad f_1^D(k^2) = -\frac{3}{2} f_1^{\sim}(k^2). \quad (85)$$

Что касается формфакторов $g_1^{F,D}(k^2)$ и $g_2^{F,D}(k^2)$, то в принципе они могут быть определены при помощи измерения вероятностей четырех процессов лептонного распада барионов. Вероятности остальных распадов и поляризационные эффекты во всех процессах тогда определяются полностью.

Рассмотрим конкретные физические процессы лептонных распадов:

- $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$, (I)
- $\Sigma^- \rightarrow \lambda + e^- + \bar{\nu}$, (II)
- $\Sigma^+ \rightarrow \lambda + e^+ + \nu$, (III)
- $\lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$, $p + \mu^- + \bar{\nu}$, (IV)
- $\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}$, $n + \mu^- + \bar{\nu}$, (V)
- $\Sigma^0 \rightarrow \Sigma^+ + e^- + \bar{\nu}$, $\Sigma^+ + \mu^- + \bar{\nu}$, (VI)
- $\Sigma^- \rightarrow \Sigma^0 + e^- + \bar{\nu}$, $\Sigma^0 + \mu^- + \bar{\nu}$, (VII)
- $\Sigma^- \rightarrow \lambda + e^- + \bar{\nu}$, $\lambda + \mu^- + \bar{\nu}$. (VIII)

Матричные элементы этих процессов имеют вид

$$M^J(B_2 \rightarrow B_1 l^+ \nu) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_2) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v(k_1) \bar{u}(p_2) \left[\gamma_\mu f_1^J(k^2) + \right. \quad (86)$$

$$\left. \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} f_2^J(k^2) + \gamma_\mu \gamma_5 g_1^J(k^2) + \frac{i k_\mu}{M} \gamma_5 g_2^J(k^2) \right] \bar{u}(p_1),$$

$J = I, II, \dots, VIII$, причем из (78) — (81) и (83), (84) мы получаем выражения формфакторов

$$f_i^J(k^2) \quad \text{и} \quad g_i^J(k^2):$$

$$f_i^I = \cos \tau (f_i^F + f_i^D), \quad g_i^I = \cos \tau (g_i^F + g_i^D), \\ f_i^{II} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \tau f_i^D, \quad g_i^{II} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \tau g_i^D, \quad (87) \\ f_i^{III} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \tau f_i^D, \quad g_i^{III} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \tau g_i^D, \\ f_i^{IV} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \sin \tau (3f_i^F + f_i^D), \quad g_i^{IV} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \sin \tau (3g_i^F + g_i^D), \\ f_i^{V} = -\sin \tau (f_i^F - f_i^D), \quad g_i^{V} = -\sin \tau (g_i^F - g_i^D),$$

$$f_i^{\text{VI}} = \sin \tau (f_i^F + f_i^D), \quad g_i^{\text{VI}} = \sin \tau (g_i^F + g_i^D),$$

$$f_i^{\text{VII}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \tau (f_i^F + f_i^D), \quad g_i^{\text{VII}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \tau (g_i^F + g_i^D),$$

$$f_i^{\text{VIII}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \tau (2f_i^F - f_i^D), \quad g_i^{\text{VIII}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \tau (2g_i^F - g_i^D).$$

До сих пор еще не было проведено последовательное изучение следствий унитарной симметрии в процессах лептонных распадов барионов. В качестве грубого приближения мы пренебрегаем вкладом факторов $f_2^J(k^2)$ и $g_2^J(k^2)$, а также зависимость факторов $f_1^J(k^2)$ и $g_1^J(k^2)$ от k^2 , и положим

$$f_1^J(k^2) \approx f^J, \quad g_1^J(k^2) \approx g^J, \quad \alpha_J = \frac{g^J}{f^J}.$$

Что касается вероятности распада и величин, характеризующих поляризационные эффекты, мы пользуемся известными выражениями, полученными в теории β -распада нейтрона. Все эти величины зависят только от f^J и g^J . Константы f^J выражаются через $f_2^F(0)$ и $f_2^D(0)$ соотношениями (87), а в силу сохранения заряда, $f_2^F(0) = 1$, $f_2^D(0) = 0$. Это означает, что константы f^J для всех процессов полностью определены. Произвольными тогда являются константы $g^F = g_2^F(0)$ и $g^D = g_2^D(0)$, которые могут быть определены из значений вероятностей двух процессов. В качестве одного из таких процессов выберем β -распад нейтрона. Из экспериментальных данных мы получаем

$$g^D + g^F = 1,15 \pm 0,04, \quad (88)$$

причем это значение суммы $g^D + g^F$ слабо зависит от угла τ , поскольку значение τ весьма мало, а вероятность β -распада нейтрона пропорциональна $\cos^2 \tau \approx 1 - \tau^2$. Поскольку вероятности распадов (II) и (III) пропорциональны $(g^D)^2$, то g^D можно было бы определить из значений вероятностей этих распадов. Однако до сих пор последние еще не были измерены с достаточной точностью, поэтому мы будем пользоваться другими данными. Отметим, что вероятности распадов (IV) - (VIII) пропорциональны $\sin^2 \tau \approx \tau^2$ и сильно зависят от τ . Поэтому для определения g^F и g^D желательно исключить зависимость от τ , рассматривая отношение двух распадов с изменением странности. Так, например, сравнивая отношение вероятностей распадов (IV) и (V) с опытом, мы получаем уравнение

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} (3g^F + g^D)^2}{1 + 3 (g^F - g^D)^2} \cdot \frac{1,5}{5,8} = \frac{8,1 \pm 1,0}{13 \pm 2} \quad (89)$$

Система уравнений (88) и (89) обладает двумя решениями:

$$\begin{aligned} 1) \quad & g^F = 0,39 \pm 0,05, \quad g^D = 0,76 \pm 0,05, \\ 2) \quad & g^F = 0,92 \pm 0,05, \quad g^D = 0,23 \pm 0,05. \end{aligned}$$

Чтобы выбрать одно из этих решений, мы вычислим вероятность распада IV в каждом из этих случаев, пользуясь формулой

$$\frac{W(\lambda \rightarrow p e^- \nu)}{W(\lambda)} = \sin^2 \tau \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} (3g^F + g^D)^2 \right] \cdot 3,8 \cdot 10^{-3},$$

где $W(\lambda)$ - полная вероятность распада λ - гиперона. Сравнивая с экспериментальным значением

$$\frac{W(\lambda \rightarrow p e^- \nu)}{W(\lambda)} \approx 8,1 \pm 1,0,$$

мы видим, что первое решение хорошо согласуется с опытом, если $\tau = 0,26 \pm 0,02$, а второе решение согласуется с опытом, только если $\tau = 0,195 \pm 0,015$. Таким образом заключаем, что мы должны выбрать первое решение. Из этих значений констант g^F и g^D можно получить вероятности других распадов. Мы имеем, в частности:

$$\frac{W(\Sigma^- \rightarrow \Lambda e^- \nu)}{W(\Sigma^-)} = (0,65 \pm 0,08) \cdot 10^{-4},$$

в согласии с экспериментальным значением $(0,75 \pm 0,28) \cdot 10^{-4}$. Отметим, что в данном случае второе решение дает значение $(0,06 \pm 0,03) \cdot 10^{-4}$.

Изучение корреляционных и поляризационных эффектов также позволяет определить константы g^F и g^D и проверить предсказания унитарной симметрии. Рассмотрим распад поляризованного бариона, например. Для углового распределения электрона пользуемся формулой

$$W_J(\theta) = 1 + \beta_e \beta_J \cos \theta, \quad (90)$$

где β_e - скорость электрона в единицах скорости света,
 θ - угол между направлением вылета электрона и вектором поляризации на-

чального бариона, а константа β_J равна

$$\beta_J = -2 \frac{\alpha_J (\alpha_J - 1)}{1 + 3\alpha_J^2}$$

На опыте можно определить β_J и, следовательно, α_J . Например, для процесса IV эксперимент дает значение

$$\alpha_{IV} = -0,7 \pm 0,3.$$

С другой стороны,

$$\alpha_{IV} = \frac{g^{IV}}{f^{IV}} = \frac{3g^F + g^D}{3f^F + f^D} = g^F + \frac{1}{3}g^D.$$

Мы имеем, таким образом, уравнение

$$g^F + \frac{1}{3}g^D = -0,7 \pm 0,3,$$

которое вместе с уравнением (88) также позволяет определить g^F и g^D . Если же эти константы уже известны, то параметр асимметрии в угловом распределении электрона при распаде поляризованного бариона, поляризация бариона отдачи, параметр электронно-нейтринной корреляции и т.д. для всех процессов полностью определяются, и сравнение теоретических предсказаний с опытом позволяет проверить предположенные свойства симметрии токов слабых взаимодействий. Поскольку в настоящее время еще не имеется достаточно точных соответствующих экспериментальных данных, то на этом останавливаться мы не будем.

§ 3. Рождение мезонов и барионов при столкновении нейтрино и антинейтрино с нуклоном

Перейдем теперь к изучению возможностей экспериментальной проверки свойств симметрии слабых токов в нейтринных опытах. Рассмотрим рождение барионных резонансов при столкновении антинейтрино с нуклоном. В главе II были получены изотопические соотношения между сечениями различных процессов. Если ток слабых взаимодействий сильновзаимодействующих частиц обладает предположенными свойствами симметрии относительно группы $SU(3)$, то между амплитудами процессов с рождением Δ^0 и Y^{*0} на протоне также имеется соотношение, которое не является изотопическим, поскольку Δ^0 и Y^{*0} входят в различные изотопические мультиплеты. Матричные элементы этих процессов пропорциональны матричным элементам тока слабых взаимодействий между состояниями протона и

соответствующего барионного резонанса

$$M(\tilde{\nu}_p \rightarrow l^+ \Delta^0) \sim \cos \tau \langle \Delta^0 | (J_\mu)_\pm^2 | p \rangle, \quad (91)$$

$$M(\tilde{\nu}_p \rightarrow l^+ Y^{*0}) \sim \sin \tau \langle Y^{*0} | (J_\mu)_\pm^3 | p \rangle. \quad (92)$$

Поэтому для получения соотношения между амплитудами этих процессов необходимо изучить матричный элемент тока $(J_\mu)_p^k$ между состояниями октуплета и барионов и декуплета барионных резонансов. Мы имеем:

$$\langle B | (J_\mu)_p^k | B \rangle = \bar{D}^{\lambda\gamma\delta} N_\delta^\sigma \varepsilon_{\sigma\beta} A_\mu, \quad (43)$$

где A_μ - некоторая функция от пространственно-временных переменных, являющаяся билинейной комбинацией волновых функций начального бариона $\frac{1}{2}^+$ и конечного бариона $\frac{3}{2}^+$ и преобразующаяся как 4-вектор при преобразованиях Лоренца. Для матричных элементов в (91) и (92) мы имеем

$$\langle \Delta^0 | (J_\mu)_\pm^2 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu, \quad (94)$$

$$\langle Y^{*0} | (J_\mu)_\pm^3 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} A_\mu. \quad (95)$$

Отсюда получаем:

$$M(\tilde{\nu}_p \rightarrow l^+ Y^{*0}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan \tau M(\tilde{\nu}_p \rightarrow l^+ \Delta^0). \quad (96)$$

Таким образом, все поляризационные эффекты в обоих процессах должны быть одинаковыми, а их дифференциальные и полные сечения связаны соотношениями вида

$$\sigma(\tilde{\nu}_p \rightarrow l^+ Y^{*0}) = \frac{1}{2} \tan^2 \tau \sigma(\tilde{\nu}_p \rightarrow l^+ \Delta^0).$$

Отметим, что токи $(J_\mu)_\pm^3$ и $-(J_\mu)_\pm^2$ образуют V -дублет, а рассматриваемые процессы являются процессами рождения частиц из V -триплета

$$\begin{pmatrix} \Delta^0 \\ Y^{*0} \\ \Sigma^{*0} \end{pmatrix}$$

на протоне - частице из V -дублета

$$\begin{pmatrix} p \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}.$$

Тогда из сохранения V - спина сразу получаем соотношение

$$\langle y^0 | (J_{\mu})_z^3 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \Delta^0 | (J_{\mu})_z^2 | p \rangle .$$

Иначе говоря, соотношение (96) является следствием сохранения V - спина.

Рассмотрим теперь матричный элемент тока $(J_{\mu})_{\rho}^{\alpha}$ между состояниями октетлета барионов. Мы имеем:

$$\langle B | (J_{\mu})_{\rho}^{\alpha} | B \rangle = (\bar{B}_{\rho}^{\alpha} B_{\rho}^{\alpha} - \bar{B}_{\rho}^{\alpha} B_{\rho}^{\alpha}) C_{\rho}^F \quad (97)$$

$$+ (\bar{B}_{\rho}^{\alpha} B_{\rho}^{\alpha} + \bar{B}_{\rho}^{\alpha} B_{\rho}^{\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\rho}^{\alpha} \bar{B}_{\rho}^{\alpha} B_{\rho}^{\alpha}) C_{\rho}^D .$$

В частности,

$$\langle n | (J_{\mu})_z^2 | p \rangle = C_{\rho}^F + C_{\rho}^D , \quad (98)$$

$$\langle \Sigma^0 | (J_{\mu})_z^3 | p \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} (C_{\rho}^F - C_{\rho}^D) , \quad (99)$$

$$\langle \lambda | (J_{\mu})_z^3 | p \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} (3C_{\rho}^F + C_{\rho}^D) . \quad (100)$$

Отсюда вытекает соотношение

$$\langle n | (J_{\mu})_z^2 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \Sigma^0 | (J_{\mu})_z^3 | p \rangle - \sqrt{2} \langle \lambda | (J_{\mu})_z^3 | p \rangle . \quad (101)$$

Это соотношение также можно получить как следствие сохранения V - спина. Действительно, мы имеем V - дублет

$$\begin{pmatrix} (J_{\mu})_z^3 \\ -(J_{\mu})_z^2 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} p \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}$$

и V - триплет

$$\begin{pmatrix} n \\ \Sigma^0 \end{pmatrix} .$$

Из сохранения V - спина получаем тогда

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \langle n | (J_{\mu})_z^2 | p \rangle = \langle -\frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda | (J_{\mu})_z^3 | p \rangle ,$$

т.е. получаем снова (101).

Аналогично, для процессов рождения частиц V - дублетов

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ -\pi^+ \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} p \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}$$

от нейтрино и частиц V - дублетов

$$\begin{pmatrix} \pi^- \\ K^- \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} p \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}$$

от антинейтрино имеет место соотношения

$$\frac{1}{\sin \tau} M(\nu_{\mu} \rightarrow l^- K^+ p) = \frac{1}{\cos \tau} M(\nu_{\mu} \rightarrow l^- \pi^+ p) + \frac{1}{\cos \tau} M(\nu_{\mu} \rightarrow l^- K^+ \Sigma^+) , \quad (102)$$

$$\frac{1}{\sin \tau} M(\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow l^+ K^- p) = \frac{1}{\cos \tau} M(\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow l^+ \pi^- p) + \frac{1}{\sin \tau} M(\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow l^+ \pi^- \Sigma^+) . \quad (103)$$

Эти соотношения можно получить таким же методом, что и соотношения между амплитудами мезон-барионного рассеяния

$$\begin{aligned} M(K^+ p \rightarrow K^+ p) &= M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) + M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+) , \\ M(K^- p \rightarrow K^- p) &= M(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) + M(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+) . \end{aligned}$$

Для процессов рождения псевдоскалярного мезона и барионного резонанса сохранение

V - спина приводит к ряду соотношений между амплитудами

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3} \cos \tau} M(\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow l^+ \pi^+ \Delta^-) &= \frac{1}{\cos \tau} M(\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow l^+ K^+ Y^{*-}) = \\ &= \frac{1}{\sin \tau} M(\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow l^+ \pi^+ Y^{*-}) = \frac{1}{\sin \tau} M(\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow l^+ K^+ \bar{\Sigma}^{*-}) , \end{aligned} \quad (104)$$

а также к следующему соотношению между сечениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \tau} \sigma(\nu_{\mu} \rightarrow l^- K^0 \Delta^{++}) + \frac{3}{\cos^2 \tau} \sigma(\nu_{\mu} \rightarrow l^- K^+ Y^{*+}) &= \\ \frac{1}{\cos^2 \tau} \sigma(\nu_{\mu} \rightarrow l^- \pi^0 \Delta^{++}) + \frac{3}{\cos^2 \tau} \sigma(\nu_{\mu} \rightarrow l^- \eta \Delta^{++}) . \end{aligned} \quad (105)$$

Для соответствующих процессов рождения векторных мезонов мы имеем

$$\frac{1}{\sin \tau} M(\nu_{\mu} \rightarrow l^- K^{*+} p) = \frac{1}{\cos \tau} M(\nu_{\mu} \rightarrow l^- \rho^+ p) + \frac{1}{\cos \tau} M(\nu_{\mu} \rightarrow l^- K^{*+} \Sigma^+) , \quad (106)$$

$$\frac{1}{\sin \tau} M(\tilde{\nu}_\mu \rightarrow l^+ K^+ \rho^-) = \frac{1}{\cos \tau} M(\tilde{\nu}_\mu \rightarrow l^+ \rho^- \rho) + \frac{1}{\sin \tau} M(\tilde{\nu}_\mu \rightarrow l^+ \rho^- \Sigma^+), \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3} \cos \tau} M(\tilde{\nu}_\mu \rightarrow l^+ \rho^+ \Delta^-) &= \frac{1}{\cos \tau} M(\tilde{\nu}_\mu \rightarrow l^+ K^{*+} Y^{*-}) \\ &= \frac{1}{\sin \tau} M(\tilde{\nu}_\mu \rightarrow l^+ \rho^+ Y^{*-}) = \frac{1}{\sin \tau} M(\tilde{\nu}_\mu \rightarrow l^+ K^{*+} \Sigma^{*-}), \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \tau} \sigma(\nu_\mu \rightarrow l^- K^{*0} \Delta^{++}) + \frac{2}{\cos^2 \tau} \sigma(\nu_\mu \rightarrow l^- K^{*+} Y^{*+}) = \\ \frac{1}{\cos^2 \tau} \sigma(\nu_\mu \rightarrow l^- \rho^0 \Delta^{++}) + \frac{2}{\cos^2 \tau} \sigma(\nu_\mu \rightarrow l^- \rho^+ \Delta^{++}). \end{aligned} \quad (109)$$

§ 4. Нелептонные распады гиперонов и мезонов

В нелептонных распадах гиперонов и мезонов гиперзаряд и изотопический спин не сохраняются. В главе II мы изучили следствия предположения о том, что части лагранжиана, отвечающие за эти распады, являются компонентами изотопических спиноров. Поскольку в этих процессах гиперзаряд меняется на единицу по абсолютной величине, то соответствующие части лагранжиана преобразуются как волновые функции частиц с $Y = \pm 1$ при калибровочных преобразованиях волновых функций всех частиц

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha Y} \psi$$

где Y - оператор гиперзаряд:

$$L \rightarrow e^{\pm i\alpha} L.$$

Так как заряд сохраняется, то изменения изотопического спина и гиперзаряда удовлетворяют условию

$$\Delta Q = \Delta T_3 + \frac{\Delta Y}{2} = 0,$$

вытекающему из формулы Гелл-Манна-Нислижми. Таким образом, для процессов с $\Delta Y = \Delta S = +1$ соответствующая часть лагранжиана является компонентой с $T_3 = +\frac{1}{2}$ изотопического спинора с $Y = -1$, а для процессов с $\Delta Y = \Delta S = -1$ - компонентой с $T_3 = -\frac{1}{2}$ изотопического спинора с $Y = +1$ (подробно см. также главу II, п.1У).

Перейдем теперь к изучению этих процессов в унитарной симметрии. Поскольку октет является унитарным мультиплетом с наименьшим числом компонент, который содержит изотопические спиноры с $Y = \pm 1$, то естественно предположить, что части лагранжиана, отвечающие за нелептонные распады гиперонов и мезонов, принадлежат октету.

Рассмотрим следствия этого предположения в процессах нелептонного распада гиперонов. Так как в этих процессах $\Delta S = \Delta Y = 1$, то соответствующая часть лагранжиана является компонентой с $T_3 = +\frac{1}{2}$, $Y = -1$, т.е. компонентой ψ_3^+ некоторого октуплета ψ_8^+ . Введем матрицу

$$\lambda_\nu^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\lambda_6 + i\lambda_7)$$

Она является матрицей V -спина, соответствующей матрице τ_+ изотопического спина. Мы имеем тогда

$$\psi_3^+ = (\lambda_\nu^+)_\alpha^\beta \psi_8^+.$$

Нетрудно показать, что матричные элементы процессов нелептонного распада барионов имеют следующую унитарную структуру:

$$M(B \rightarrow B \rho) = \sum_{i=1}^8 A_i T_i, \quad (110)$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= s_p(\bar{B} B) s_p(\bar{\rho} \lambda_\nu^+), & T_2 &= s_p(\bar{B} \bar{\rho}) s_p(B \lambda_\nu^+) \\ T_3 &= s_p(\bar{B} \lambda_\nu^+) s_p(B \bar{\rho}), & T_4 &= s_p(\bar{B} B \bar{\rho} \lambda_\nu^+), \\ T_5 &= s_p(\bar{B} B \lambda_\nu^+ \bar{\rho}), & T_6 &= s_p(B \bar{B} \bar{\rho} \lambda_\nu^+) \\ T_7 &= s_p(B \bar{B} \lambda_\nu^+ \bar{\rho}), & T_8 &= s_p(\bar{B} \bar{\rho} B \lambda_\nu^+ - \bar{B} \rho \bar{B} \lambda_\nu^+). \end{aligned} \quad (111)$$

Как и в случае мезон-барионного рассеяния, здесь мы воспользовались тождеством между девятью возможными амплитудами. Для конкретных процессов мы имеем:

$$M(\lambda \rightarrow p \pi^-) = \frac{1}{\sqrt{6}} A_4 - \sqrt{\frac{2}{3}} A_6 + \frac{1}{\sqrt{6}} A_8, \quad (112)$$

$$M(\lambda \rightarrow n \pi^0) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} A_4 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_6 - \frac{1}{2\sqrt{3}} A_8, \quad (113)$$

$$M(\Sigma^+ \rightarrow p \pi^0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} A_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} A_8, \quad (114)$$

$$M(\Sigma^+ \rightarrow n \pi^+) = A_3 + A_8, \quad (115)$$

$$M(\Sigma^- \rightarrow n \pi^-) = A_3 + A_4, \quad (116)$$

$$M(\bar{\Sigma}^0 \rightarrow \lambda \pi^0) = \frac{1}{\sqrt{3}} A_4 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_5 - \frac{1}{2\sqrt{3}} A_8, \quad (II7)$$

$$M(\bar{\Sigma}^- \rightarrow \lambda \pi^-) = -\sqrt{\frac{2}{3}} A_4 - \sqrt{\frac{2}{3}} A_5 + \frac{1}{\sqrt{6}} A_8. \quad (II8)$$

Из этих выражений для матричных элементов процессов через произвольные функции A_i следует, что в данном случае унитарная симметрия не дает новых соотношений по сравнению с правилом $\Delta T = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь нелептонные распады мезонов в слабых взаимодействиях:

$$P \rightarrow P' + P'',$$

где P , P' и P'' - мезоны из псевдоскалярного октетета. Как и в случае нелептонных распадов барионов, здесь существуют восемь независимых унитарных амплитуд. Поскольку мезоны P' и P'' рождаются в S -состоянии, то, в силу требования статистики Бозе унитарные волновые функции этих мезонов должны входить симметрично в матричный элемент. Отсюда следует, что матричный элемент имеет вид

$$M(P \rightarrow P'P'') = A_1 s_p(\bar{P}'\bar{P}'') s_p(P\lambda^w) + A_2 \left\{ s_p(\bar{P}'P) s_p(\bar{P}''\lambda^w) + s_p(\bar{P}''P) s_p(\bar{P}'\lambda^w) \right\} + A_3 s_p \left[(\bar{P}'\bar{P}'' + \bar{P}''\bar{P}') P \lambda^w \right] + A_4 s_p \left[(\bar{P}'\bar{P}'' + \bar{P}''\bar{P}') \lambda^w P \right], \quad (II9)$$

где λ^w - некоторая комбинация восьми матриц λ_i , причем для распадов с $\Delta Y = \Delta S = 1$ мы имеем

$$\lambda^w = \lambda_v^+ = \frac{1}{2} (\lambda_6 + i\lambda_7),$$

а для распадов с $\Delta Y = \Delta S = -1$

$$\lambda^w = \lambda_v^- = \frac{1}{2} (\lambda_6 - i\lambda_7).$$

Напомним еще раз, что для описания октетета можно пользоваться либо спинорами второго ранга ψ_β^α с $\psi_\alpha^\alpha = 0$, либо восьмимерными величинами ψ_i ,

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_\beta^\alpha (\lambda_i)_\alpha^\beta, \quad \psi_\beta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)_\beta^\alpha \psi_i.$$

При зарядовом сопряжении унитарные волновые функции мезонных мультиплетов преобразуются следующим образом:

$$\psi_\beta^\alpha \rightarrow \zeta_c \psi_\alpha^\beta, \quad \zeta_c = \pm 1. \quad (I20)$$

ζ_c называется зарядовой четностью данного унитарного октетета. Тогда, поскольку

$$(\lambda_i)_\beta^\alpha = (\lambda_i)_\alpha^\beta, \quad i = 1, 3, 4, 6, 8$$

$$(\lambda_i)_\beta^\alpha = -(\lambda_i)_\alpha^\beta = 2, 5, 7,$$

то восьмимерные компоненты ψ_i преобразуются следующим образом:

$$\psi_i \rightarrow \zeta_c \psi_i, \quad i = 1, 3, 4, 6, 8$$

$$\psi_i \rightarrow -\zeta_c \psi_i, \quad i = 2, 5, 7. \quad (I21)$$

Очевидно, что матричный элемент (II9) является компонентой некоторого октетета

$$L_\beta^\alpha = A_1 s_p(\bar{P}'\bar{P}'') P_\beta^\alpha + A_2 \left[s_p(\bar{P}'P) \bar{P}''^\alpha + s_p(\bar{P}''P) \bar{P}'^\alpha \right] + A_3 \left\{ (\bar{P}'^\gamma \bar{P}''^\delta + \bar{P}''^\gamma \bar{P}'^\delta) P_\gamma^\alpha \right\} + A_4 \left\{ P_\beta^\gamma (\bar{P}'^\delta \bar{P}''^\alpha + \bar{P}''^\delta \bar{P}'^\alpha) - \frac{1}{3} \delta_\beta^\alpha s_p \left[(\bar{P}'\bar{P}'' + \bar{P}''\bar{P}') P \right] \right\} + A_4 \left\{ P_\beta^\gamma (\bar{P}'^\delta \bar{P}''^\alpha + \bar{P}''^\delta \bar{P}'^\alpha) - \frac{1}{3} \delta_\beta^\alpha s_p \left[P(\bar{P}'\bar{P}'' + \bar{P}''\bar{P}') \right] \right\}. \quad (I22)$$

Поскольку для псевдоскалярного октетета $\zeta_c = +1$, то при зарядовом сопряжении амплитуды при A_3 и A_4 переходят друг в друга

$$\left(\bar{P}'^\gamma \bar{P}''^\delta + \bar{P}''^\gamma \bar{P}'^\delta \right) P_\beta^\alpha - \frac{1}{3} \delta_\beta^\alpha s_p \left[(\bar{P}'\bar{P}'' + \bar{P}''\bar{P}') P \right] \leftrightarrow P_\beta^\delta \left(\bar{P}'^\gamma \bar{P}''^\alpha + \bar{P}''^\gamma \bar{P}'^\alpha \right) - \frac{1}{3} \delta_\beta^\alpha s_p \left[P(\bar{P}'\bar{P}'' + \bar{P}''\bar{P}') \right], \quad (I23)$$

а другие амплитуды переходят в себя. Поэтому L_β^α обладает определенной зарядовой четностью, только если константы A_i удовлетворяют некоторым условиям. Нетрудно показать, что

$$L_\beta^\alpha \xrightarrow{C} L_\alpha^\beta,$$

если $A_3 = A_4$, и

$$L_\beta^\alpha \xrightarrow{C} -L_\alpha^\beta,$$

если $A_3 = -A_4$. Таким образом, для матричного элемента рассматриваемого распада мы имеем выражения

$$M(P \rightarrow P'P'') = A_1 s_p(\bar{P}'\bar{P}'') s_p(P\lambda^w) + A_2 \left\{ s_p(\bar{P}'P) s_p(\bar{P}''\lambda^w) + s_p(\bar{P}''P) s_p(\bar{P}'\lambda^w) \right\} + A_3 s_p \left[(\bar{P}'\bar{P}'' + \bar{P}''\bar{P}') (P\lambda^w + \lambda^w P) \right], \quad (I24)$$

или

$$M(K_1^0 \rightarrow \rho^+ \rho^0) = A \operatorname{Sp} \left[(\bar{\rho}^+ \bar{\rho}^0 + \bar{\rho}^0 \bar{\rho}^+) (\rho \lambda^W - \lambda^W \rho) \right]. \quad (I25)$$

Применим теперь эти выражения к распаду

$$K_1^0 \rightarrow 2\pi^0$$

Напомним прежде всего, что

$$K^0 = (P)_2^3, \quad \tilde{K}^0 = (P)_3^2$$

Поэтому

$$K_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (K^0 + CP \tilde{K}^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (K^0 - \tilde{K}^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(P)_2^3 - (P)_3^2] \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}} P_{\beta}^{\alpha} (\lambda_7)_{\alpha}^{\beta},$$

где

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. K_1^0 является седьмой компонентой октетета P_{β}^{α} . Иначе говоря, унитарная волновая функция K_1^0 - мезона $(K_1^0)_{\beta}^{\alpha}$ имеет только две ненулевых компоненты

$$(K_1^0)_2^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (K_1^0)_3^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

и пропорциональна матрице

$$(K_1^0)_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_7)_{\beta}^{\alpha}.$$

Аналогично, унитарная волновая функция π^0 - мезона $(\pi^0)_{\beta}^{\alpha}$ имеет ненулевые компоненты

$$(\pi^0)_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\pi^0)_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

и пропорциональна матрице λ_3 :

$$(\pi^0)_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_3)_{\beta}^{\alpha}.$$

Поэтому для распада $K_1^0 \rightarrow 2\pi^0$ матричные элементы (I24) и (I25) равны

$$M(K_1^0 \rightarrow 2\pi^0) = A_1 \operatorname{Sp} (\bar{\pi}^0 \bar{\pi}^0) \operatorname{Sp} (K_1^0 \lambda^W) + \\ A_2 \left\{ \operatorname{Sp} (\bar{\pi}^0 K_1^0) \operatorname{Sp} (\bar{\pi}^0 \lambda^W) + \operatorname{Sp} (\bar{\pi}^0 K_1^0) \operatorname{Sp} (\bar{\pi}^0 \lambda^W) \right\} \\ + A_3 \operatorname{Sp} \left[(\bar{\pi}^0 \bar{\pi}^0 + \bar{\pi}^0 \bar{\pi}^0) (K_1^0 \lambda^W + \lambda^W K_1^0) \right] \quad (I26)$$

или

$$M(K_1^0 \rightarrow 2\pi^0) = A \operatorname{Sp} \left[(\bar{\pi}^0 \bar{\pi}^0 + \bar{\pi}^0 \bar{\pi}^0) (K_1^0 \lambda^W - \lambda^W K_1^0) \right] \quad (I27)$$

Предположим, что CP - четность сохраняется. Поскольку в распаде $K_1^0 \rightarrow 2\pi^0$ P - четность меняется, то C - четность также меняется. Это означает, что матричный элемент (I26) или (I27) должен менять знак при зарядовом сопряжении. Поскольку при C - преобразовании

$$(\pi^0)_{\beta}^{\alpha} \rightarrow (\pi^0)_{\alpha}^{\beta}, \quad (K_1^0)_{\beta}^{\alpha} \rightarrow - (K_1^0)_{\alpha}^{\beta},$$

то матричный элемент (I26) будет менять знак только если

$$(\lambda^W)_{\beta}^{\alpha} = (\lambda^W)_{\alpha}^{\beta},$$

а матричный элемент (I27) будет менять знак только если

$$(\lambda^W)_{\beta}^{\alpha} = - (\lambda^W)_{\alpha}^{\beta}.$$

С другой стороны, для распада $K_1^0 \rightarrow 2\pi^0$ λ^W должна быть некоторой комбинацией λ_6 и λ_7 , так как матричный элемент этого распада является суммой матричных элементов переходов с $\Delta Y = +1$ и $\Delta Y = -1$. Отсюда следует, что в матричном элементе (I26) матрица λ^W пропорциональна λ_6 , а в (I27) матрица λ^W пропорциональна λ_7 . Подставляя в (I26) или (I27) явные выражения матриц $(\pi^0)_{\beta}^{\alpha}$, $(K_1^0)_{\beta}^{\alpha}$ и $(\lambda^W)_{\beta}^{\alpha}$, нетрудно проверить, что они тождественно равны нулю. Таким образом, унитарная симметрия и CP - инвариантность приводят к тому, что распад $K_1^0 \rightarrow 2\pi^0$ запрещен.

Отметим, что если лагранжиан слабых взаимодействий имеет вид произведения заряженных токов (см. (63)), то часть лагранжиана, отвечающая за нелептонные процессы, содержит различные неприводимые представления в произведении 8 x 8. В частности, конкретное рассмотрение показывает, что она содержит член с $T = \frac{3}{2}$, лежащий в представлении 27. Поэтому, если лагранжиан нелептонных слабых взаимодействий действительно принадлежит октетету, то это свойство, а также правило $\Delta T = \frac{1}{2}$, либо означает, что лагранжиан слабых взаимодействий не имеет вид (63), либо является следствием какой-то динамики.

Наряду с нелептонными процессами слабых взаимодействий с изменением странности в принципе могут происходить также нелептонные процессы слабых взаимодействий без изменения странности. Эти процессы можно обнаружить на фоне сильных взаимодействий путем

изучения эффектов несохранения четности в сильных взаимодействиях. Так как в нелептонных процессах с $\Delta Y = 0$ мы имеем $\Delta T_3 = 0$, то в принципе изотопический спин может сохраняться или изменяться на целое число. Если существуют переходы с $\Delta T > 1$, то соответствующая часть лагранжиана не может принадлежать октетлету. Это имеет место, в частности, если лагранжиан слабых взаимодействий имеет вид произведения заряженных токов (подробно см. главу II, п. IV).

ЛИТЕРАТУРА

Электромагнитные взаимодействия

- I) S. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett., 6, 423 (1961).
- 2) N. Cabibbo and R. Gatto, Nuovo Cim., 21, 872 (1961).
- 3) H. J. Lipkin, C. A. Levinson and S. Meshkov, Phys. Lett. 7, 81 (1963).
- 4) S. P. Rosen, Phys. Rev. Lett. 11, 100 (1963).
- 5) S. Okubo, Phys. Lett., 4, 14 (1963).
- 6) A. J. Macfarlane, and E. C. G. Sudarshan, Nuovo Cim. 31, 1176 (1964).
- 7) S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett., 11, 48 (1963).
- 8) R. J. Oakes, Phys. Rev., 132, 2349 (1963).
- 9) S. Okubo and B. Sakita, Phys. Rev. Lett., 11, 50 (1963).
- 10) S. Badier and C. Bauchiat, Phys. Lett., 15, 961 (1965).
- II) C. H. Chan, Phys. Lett., 8, 211 (1964).
- 12) Дао Вонг Дык и Нгуен Ван Хьеу, Я.ф., 2, 529 (1965).
- 13) Нгуен Ван Хьеу и Фам Куи Ты, препринт ОИЯИ, P-2338, 1965.
- 14) О. Г. Боков, Нгуен Ван Хьеу и Б. Среднява, препринт ОИЯИ, P-2520, 1965.

Слабые взаимодействия

1. N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. 10, 351 (1963). *
2. N. Brene, V. Hellesen and M. Roos, Phys. Lett., 11, 344 (1964).
3. Нгуен Ван Хьеу, Труды Международной конференции по физике высоких энергий, Дубна, 1964. Обсуждение после доклада N. Brene, V. Hellesen, and M. Roos.
4. И. В. Чувило, препринт ОИЯИ, P-1829, 1964 г.
5. H. Sugawara, Prog. Theor. Phys., 31, 213 (1964).
6. R. H. Dalitz, preprint, Oxford, 1964.
7. M. Block, Phys. Rev. Lett., 12, 262 (1964).
8. N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. 12, 62 (1964).
9. M. Gell-Mann, Phys. Rev. Lett., 12, 155 (1964).

ГЛАВА VI
СПИНОВАЯ И УНИТАРНАЯ СИММЕТРИЯ SU(6)

I. ГРУППА SU(6) И ЕЕ НЕПРОВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

§ I. ГРУППА SU(6) И ПОДГРУППЫ SU(3) ⊗ SU(2),
SU(4) ⊗ SU(2)

В квантовой механике спиновые волновые функции частиц со спином являются спинами спиновой группы SU(2). Если же мы потребуем, чтобы выполнялась еще унитарная симметрия, то волновые функции барионов и мезонов должны быть также спинами группы унитарной симметрии SU(3). В таком случае эти волновые функции должны носить индексы обеих групп: спиновые и унитарные индексы. Например, частицы в унитарном триплете со спином $\frac{1}{2}$ (кварки) описываются волновыми функциями $\psi_{(a\alpha)}$, где $\alpha = 1, 2$ - спиновый индекс, а $a = 1, 2, 3$ - унитарный индекс. Преобразования спиновой группы SU(2) затрагивают индекс α , но оставляют инвариантным индекс a .

$$\psi_{(a\alpha)} \xrightarrow{SU(2)} U_{ab}^{(2)} \psi_{(b\alpha)}, \quad (1)$$

а преобразования группы унитарной симметрии SU(3) не затрагивают индекса α .

$$\psi_{(a\alpha)} \xrightarrow{SU(3)} U_{a\beta}^{(3)} \psi_{(a\beta)}. \quad (2)$$

Преобразования (1) и (2) коммутируют друг с другом, и последовательное действие двух этих преобразований приводит к новому унитарному унимодулярному преобразованию волновых функций

$$\begin{aligned} \psi_{(a\alpha)} &\xrightarrow{SU(2)} U_{ab}^{(2)} \psi_{(b\alpha)} \xrightarrow{SU(3)} U_{ab}^{(2)} U_{a\beta}^{(3)} \psi_{(b\beta)}, \\ \psi_{(a\alpha)} &\xrightarrow{SU(3)} U_{a\beta}^{(3)} \psi_{(a\beta)} \xrightarrow{SU(2)} U_{a\beta}^{(3)} U_{a\gamma}^{(2)} \psi_{(b\gamma)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти новые преобразования образуют группу SU(3) ⊗ SU(2) (см. главу I, п. I, § 3). По сравнению с группами SU(3) и SU(2), группа SU(3) ⊗ SU(2) не содержит ничего нового. Она означает только, что группы SU(3) и SU(2) рассматриваются одновременно.

Рассмотрим теперь самые общие унитарные унимодулярные преобразования волновых функций $\psi_{(a\alpha)}$, по отношению к которым шесть пар индексов $(a\alpha)$ ведут себя как шесть единичных индексов A:

$$\begin{aligned} \psi_{(a\alpha)} &\rightarrow U_{(a\alpha)(b\beta)}^{(6)} \psi_{(b\beta)}, \\ \psi_A &\rightarrow U_{AB}^{(6)} \psi_B. \end{aligned} \quad (4)$$

Эти преобразования образуют группу SU(6). Преобразования (1) - (3) являются частными случаями преобразований (4). Действительно, частные преобразования с матрицами

$$U_{(a\alpha)(b\beta)}^{(6)} = \delta_{\alpha\beta} U_{ab}^{(2)}$$

есть преобразования (1) из группы SU(2), частные преобразования вида (2) из группы SU(3) соответствуют матрицам

$$U_{(a\alpha)(b\beta)}^{(6)} = \delta_{a\beta} U_{a\beta}^{(3)},$$

а преобразования вида (3) из группы SU(3) x SU(2) соответствуют матрицам

$$U_{(a\alpha)(b\beta)}^{(6)} = U_{a\beta}^{(2)} U_{a\beta}^{(3)}.$$

Это означает, что группы SU(2), SU(3) и SU(3) ⊗ SU(2) являются подгруппами группы SU(6). С другой стороны, не всякое преобразование вида (4) эквивалентно последовательному действию двух преобразований (1) и (2), т.е. эквивалентно некоторому преобразованию (3). Поэтому подгруппа SU(3) ⊗ SU(2) отличается от группы SU(6).

Если вместо группы унитарной симметрии SU(3) рассмотрим только изотопическую группу SU(2), то вместо группы SU(3) ⊗ SU(2) мы имеем группу

SU(2) ⊗ SU(2), и самые общие унитарные унимодулярные преобразования волновых функций $\psi_{(a\alpha')}$, $a = 1, 2$, $\alpha' = 1, 2$, образуют группу SU(4). Подобная группа была предложена Вигнером при изучении классификации состояний ядер по спину и изотопическому спину. Очевидно, что группа SU(4) является подгруппой группы SU(6). Поскольку мы выбрали в качестве изотопической группы группу преобразований, которые не затрагивают индекса $\alpha = 3$, то в преобразованиях группы SU(4) волновые функции $\psi_{(a3)}$ не меняются. Эти волновые функции зависят от спинового индекса $\alpha = 1, 2$ и преобразуются по спиновой группе SU(2). Это - спиновая группа "странных кварков" t_λ .

Преобразования из группы SU(4) имеют вид

$$\psi_{(a\alpha')} \rightarrow U_{(a\alpha')(b\beta')} \psi_{(b\beta')}, \quad (5)$$

$$+ i\varepsilon_3 \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, генераторами спиновой группы $SU(2)$, рассматриваемой как подгруппа группы $SU(6)$, являются матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & I^{(3)} \\ \hline I^{(3)} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -iI^{(3)} \\ \hline iI^{(3)} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I^{(3)} & 0 \\ \hline 0 & -I^{(3)} \end{pmatrix}$$

где $I^{(3)}$ - единичная матрица 3×3 . Эти матрицы в дальнейшем обозначим через

$$\sigma_j \otimes I^{(3)}, \quad j=1,2,3. \quad (10)$$

Аналогично, бесконечно малые преобразования из подгруппы унитарной симметрии $SU(3)$

$$\psi_{(ad)} \rightarrow \left[\delta_{ap} + i \sum_{j=1}^8 \tau_j (\lambda_j)_{ap} \right] \psi_{(ap)}$$

представляются матрицами

$$I + i \sum_{j=1}^8 \tau_j \begin{pmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & \lambda_j & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Это означает, что генераторами подгруппы $SU(3)$ группы $SU(6)$ являются матрицы

$$\begin{pmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & \lambda_j & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \lambda_j \end{pmatrix},$$

где λ_j - генераторы группы $SU(3)$. Эти матрицы обозначим через

$$I^{(2)} \otimes \lambda_j, \quad j=1,2,\dots,8, \quad (11)$$

где $I^{(2)}$ - единичная матрица для спиновой подгруппы $SU(2)$. Очевидно, что II матриц (10) и (11) являются в то же время генераторами группы $SU(6)$. 24 остальных генератора можно выбрать следующим образом. В каждом из генераторов (10) подгруппы $SU(2)$ заменим единичную матрицу $I^{(3)}$ на генераторы λ_j группы $SU(3)$. Мы получим тогда 24 матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_j \\ \hline \lambda_j & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i\lambda_j \\ \hline i\lambda_j & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ \hline 0 & -\lambda_j \end{pmatrix}$$

которые мы обозначим через

$$\sigma_i \otimes \lambda_j, \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,\dots,8. \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что матрицы (12) независимы, эрмитовы и имеют шпур, равные нулю. Они называются тензорными произведениями генераторов σ_i и λ_j .

Посмотрим теперь, какие генераторы группы $SU(6)$ являются генераторами подгруппы $SU(3) \otimes SU(2)$. Поскольку бесконечно малые преобразования из подгруппы $SU(3) \otimes SU(2)$ имеют вид

$$\psi_{(ad)} \rightarrow \left[\delta_{ab} + i \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i (\sigma_i)_{ab} \right] \left[\delta_{ap} + i \sum_{j=1}^8 \tau_j (\lambda_j)_{ap} \right] \psi_{(bp)} \\ \approx \left[\delta_{ab} \delta_{ap} + i \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i (\sigma_i)_{ab} \delta_{ap} + i \sum_{j=1}^8 \tau_j (\lambda_j)_{ap} \delta_{ab} \right] \psi_{(bp)},$$

то генераторами этой подгруппы являются $\sigma_i \otimes I^{(3)}$ и $I^{(2)} \otimes \lambda_j$. Иначе говоря, совокупность всех генераторов групп $SU(2)$ и $SU(3)$ образует систему генераторов группы $SU(3) \otimes SU(2)$, а переход от $SU(3) \otimes SU(2)$ к (6) эквивалентен введению новых генераторов, являющихся тензорными произведениями генераторов групп $SU(3)$ и $SU(2)$. Отметим, что все генераторы группы $SU(6)$ коммутируют с отражением пространства. Отсюда следует, что все частицы в каждом мультиплете группы $SU(6)$ имеют одну и ту же четность.

§ 3. Некоторые неприводимые представления группы $SU(6)$

В главе I был рассмотрен вопрос об описании всех неприводимых представлений группы $SU(n)$. Полученные там результаты непосредственно применимы к группе $SU(6)$.

Поэтому здесь мы не будем останавливаться на вопросе об описании всех неприводимых представлений группы $SU(6)$, а ограничимся рассмотрением некоторых неприводимых представлений, которыми мы будем пользоваться при изучении классификации известных элементарных частиц и резонансов.

Напомним, что только частицы в унитарных мультиплеттах $D(q, r)$ с $q-r=3n$, где n - целое число, имеют целые заряды и гиперзаряды (и нулевой суперзаряд Z , если последний существует). С другой стороны, спинор группы $SU(6)$, q раз ковариантный и r раз контрвариантный, является также спинором группы $SU(3)$, q раз ковариантным и r раз контрвариантным. Поэтому для изучения классификации известных элементарных частиц и резонансов, которые имеют целые заряды и гиперзаряды (и нулевой суперзаряд Z), достаточно рассмотреть неприводимые представления группы $SU(6)$, для которых разность числа верхних индексов и числа нижних индексов равна $3n$, где n - целое число. Простейшими из таких неприводимых представлений являются следующие:

1) Неприводимое представление, описываемое спинором второго ранга Φ_{AB}^A с $\Phi_{AB}^A = 0$ и имеющее $6^2 - 1 = 35$ независимых компонент.

2) Неприводимое представление, описываемое полностью симметричным ковариантным спинором третьего ранга

$$\psi_{\{ABC\}} \text{ с } \frac{6(6+1)(6+2)}{2 \cdot 3} = 56 \text{ компонентами.}$$

3) Неприводимое представление, описываемое полностью антисимметричным ковариантным спинором третьего ранга $\psi_{[ABC]}$ с $\frac{6(6-1)(6-2)}{2 \cdot 3} = 20$ компонентами.

4) Неприводимое представление, описываемое ковариантным спинором третьего ранга $\psi_{\{A\}B\}C}$, симметризованным по первой паре индексов и затем антисимметризованным по второй. Этот спинор антисимметричен относительно перестановки двух последних индексов и удовлетворяет условию

$$\psi_{\{A\}B\}C + \psi_{\{B\}C\}A + \psi_{\{C\}A\}B = 0 \quad (13)$$

(см. главу I, формулу (119)). Чтобы найти размерность этого представления, отметим прежде всего, что спинор третьего ранга, симметризованный по одной паре индексов, имеет $\frac{6(6+1)}{2} \cdot 6 = 126$ независимых компонент. Симметризуя этот спинор по другой паре, мы получим полностью симметричный спинор третьего ранга с 56 компонентами.

Остальные 70 компонент образуют спинор, антисимметричный по второй паре индексов. Таким образом, рассматриваемый спинор $\psi_{\{A\}B\}C}$ имеет 70 независимых компонент.

5) Неприводимое представление, описываемое спинором четвертого ранга $\Phi_{[AB][CD]}$ с $\Phi_{[AB][CD]} = 0$. Подсчитаем число независимых компонент этого представления. Существуют $\frac{6(6-1)}{2} = 15$ различных пар антисимметричных индексов $[AB]$, поэтому спинор $\Phi_{[AB][CD]}$ с произвольными шпурами $\Phi_{[AB][CD]}$ имеет $(15)^2 = 225$ независимых компонент. Так как каждый из индексов B и D принимает шесть возможных значений, то условие $\Phi_{[AB][CD]} = 0$ эквивалентно $6 \times 6 = 36$ уравнениям. Следовательно, если все шпуры $\Phi_{[AB][CD]}$ обращаются в нуль, то число независимых компонент равно $225 - 36 = 189$.

6) Неприводимое представление, описываемое спинором $\Phi_{\{AB\}CD}$ с $\Phi_{\{AB\}CD} = 0$. Здесь число уравнений также равно 36, а число различных пар $\{AB\}$ равно $\frac{6(6+1)}{2} = 21$. Поэтому данное представление имеет $21 \times 21 - 36 = 441 - 36 = 405$ независимых компонент.

§ 4. Разложение неприводимых представлений группы $SU(6)$ на неприводимые представления подгруппы $SU(3) \otimes SU(2)$

Каждое неприводимое представление группы $SU(6)$ является также представлением (вообще говоря, приводимым) подгруппы $SU(3) \otimes SU(2)$. Для применения группы $SU(6)$ к изучению классификации элементарных частиц и резонансов необходимо знать неприводимые представления подгрупп $SU(3) \otimes SU(2)$. Рассмотрим прежде всего представление (35) группы $SU(6)$. Спинор $\Phi_{AB}^A = \Phi_{(a\alpha)}^{(a\alpha)}$ можно рассмотреть как представление спиновой группы $SU(2)$. Поскольку условие

$$\Phi_{AB}^A = \Phi_{(a\alpha)}^{(a\alpha)} = 0$$

не означает, что шпур $\Phi_{(a\alpha)}^{(a\alpha)}$ должен обращаться в нуль при любом a и β , то $\Phi_{(a\alpha)}^{(a\alpha)}$, вообще говоря, является приводимым представлением группы $SU(2)$. Разложим его на два неприводимых представления спиновой группы $SU(2)$

$$\Phi_{(a\alpha)}^{(a\alpha)} = \left[\Phi_{(b\beta)}^{(a\alpha)} - \frac{1}{2} \delta_b^a \Phi_{(c\beta)}^{(c\alpha)} \right] + \frac{1}{2} \delta_b^a \Phi_{(c\beta)}^{(c\alpha)} \quad (14)$$

Первый член в (14) обозначим через $\chi_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$. Очевидно,

$$\chi_{(a\beta)}^{(a\alpha)} = 0,$$

и условие

$$\chi_{(a\alpha)}^{(a\alpha)} = 0$$

выполняется без того, чтобы $X_{(b\alpha)}^{(a\alpha)}$ обращался в нуль. Иначе говоря, $X_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$ является приводимым представлением группы $SU(3)$ и разлагается на неприводимые представления этой группы следующим образом:

$$X_{(b\beta)}^{(a\alpha)} = \left[X_{(b\beta)}^{(a\alpha)} - \frac{1}{3} \delta_{\beta}^{\alpha} X_{(b\gamma)}^{(a\gamma)} \right] + \frac{1}{3} \delta_{\beta}^{\alpha} X_{(b\gamma)}^{(a\gamma)}. \quad (15)$$

Первый член в (15) обозначим через $V_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$. Мы имеем, таким образом:

$$V_{(a\beta)}^{(a\alpha)} = 0, \quad V_{(b\alpha)}^{(a\alpha)} = 0. \quad (16)$$

Это означает, что $V_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$ является одновременно неприводимым представлением группы $SU(2)$ и неприводимым представлением группы $SU(3)$. Этот спинор описывает октет мезонов со спином 1. Что касается второго члена в (15), то он описывает унитарный синглет со спином 1. Рассмотрим, наконец, второй член в (14). Очевидно, что он описывает частицы со спином 0. Поскольку

$$\Phi_{(c\alpha)}^{(c\alpha)} = 0,$$

то $\Phi_{(c\beta)}^{(c\alpha)}$ описывает унитарный октет. Таким образом, мы заключаем, что 35-плет группы $SU(6)$ содержит октет со спином 1, синглет со спином 1 и октет со спином 0. Мы пишем символически

$$(35) = \underset{3 \times 2}{(8,3)} + \underset{3 \times 2}{(1,3)} + \underset{3 \times 2}{(8,1)}. \quad (17)$$

В скобках в правой части соотношения (17) первые цифры указывают размерности соответствующих унитарных мультиплетов, а вторые цифры равны числам спиновых состояний ($2s+1$, где s - спин частиц). Положим

$$X_{(b\gamma)}^{(a\gamma)} = \sqrt{3} V_b^a,$$

$$\Phi_{(c\beta)}^{(c\alpha)} = \sqrt{2} P_{\beta}^{\alpha}.$$

Тогда из (14) и (15) следует соотношение

$$\Phi_B^A = \Phi_{(b\beta)}^{(a\alpha)} = V_{(b\beta)}^{(a\alpha)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{\beta}^{\alpha} V_b^a + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{\beta}^{\alpha} P_{\beta}^{\alpha}, \quad (18)$$

где $V_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$ удовлетворяет условию (16), а V_b^a и P_{β}^{α} удовлетворяют условиям

$$V_a^a = 0, \quad (19)$$

$$P_{\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (20)$$

Мы получаем, таким образом, выражение волновой функции 35-плета группы $SU(6)$ через физические волновые функции, являющиеся неприводимыми представлениями подгруппы $SU(3) \otimes SU(2)$. Коэффициенты $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$ в (18) были выбраны в соответствии с условием нормировки

$$\overline{\Phi}_A^B \Phi_B^A = \overline{V}_{(a\alpha)}^{(b\beta)} V_{(b\beta)}^{(a\alpha)} + \overline{V}_a^b V_b^a + \overline{P}_{\alpha}^{\beta} P_{\beta}^{\alpha}. \quad (21)$$

Как известно, для описания частицы со спином 1 можно пользоваться также трехмерным вектором. Это означает, что вместо $V_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$ и V_b^a можно ввести трехмерные векторы

$$\left(V_i \right)_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_{\alpha}^{\beta} V_{(b\beta)}^{(a\alpha)}, \quad V_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_{\alpha}^{\beta} V_b^a.$$

Мы имеем тогда:

$$V_{(b\beta)}^{(a\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_{\beta}^{\alpha} \left(V_i \right)_{\beta}^{\alpha}, \quad V_b^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_{\beta}^{\alpha} V_i$$

и, следовательно,

$$\Phi_B^A = \Phi_{(b\beta)}^{(a\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_{\beta}^{\alpha} \left(V_i \right)_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{6}} (\sigma_i)_{\beta}^{\alpha} \delta_{\beta}^{\alpha} V_i + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{\beta}^{\alpha} P_{\beta}^{\alpha}. \quad (22)$$

Условие нормировки имеет вид

$$\overline{\Phi}_A^B \Phi_B^A = \left(\overline{V}_i \right)_{\alpha}^{\beta} \left(V_i \right)_{\beta}^{\alpha} + \overline{V}_i V_i + \left(\overline{P} \right)_{\alpha}^{\beta} P_{\beta}^{\alpha}. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь разложение 56-плета группы $SU(6)$ на неприводимые представления подгруппы $SU(3) \otimes SU(2)$. Этот мультиплет описывается спинором $\Psi_{\{ABC\}}$, симметричным относительно перестановок индексов A, B, C, т.е. перестановок пар $(a\alpha)$, $(b\beta)$ и $(c\gamma)$. Среди компонент этого мультиплета существуют компоненты, симметричные относительно перестановок всех спиновых индексов a, b, c и описывают частицы со спином $\frac{3}{2}$. Они симметричны также и по отношению к пе-

рестановкам унитарных индексов α, β, γ и описывает декуплет. Отметим, что не существует полностью антисимметричного спинора третьего ранга группы $SU(2)$, так как индексы a, b, c могут принимать только два значения. Поэтому остальные компоненты 56-плета должны быть симметризованными по одной паре спиновых индексов и по соответствующей паре унитарных индексов и затем антисимметризованными по другой паре спиновых индексов и по соответствующей паре унитарных индексов. Поскольку антисимметричный спинор второго ранга группы $SU(2)$ является инвариантом, то спинор третьего ранга группы $SU(2)$, антисимметричный по двум индексам, эквивалентен спинору первого ранга, т.е. описывает частицу со спином $\frac{1}{2}$. Что касается унитарных волновых функций, то они описывают октет, как это было показано в главе III, п. III, § I.

Таким образом, 56-плет группы $SU(6)$ содержит декуплет со спином $\frac{3}{2}$ и октет со спином $\frac{1}{2}$.

$$(56) = (10,4)_{3 \times 2} + (8,2)_{3 \times 2} \quad (24)$$

Можно показать, что спинор $\Psi_{\{ABC\}}$ выражается через волновые функции декуплета и октуплета следующим образом:

$$\Psi_{\{ABC\}} = D_{\alpha\beta\gamma} \varphi_{abc} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_{\alpha}^{\delta} \varepsilon_{\delta\beta} \varphi_c + \varepsilon_{\beta\gamma\delta} B_{\alpha}^{\delta} \varepsilon_{\delta\alpha} \varphi_c + \varepsilon_{\gamma\alpha\delta} B_{\beta}^{\delta} \varepsilon_{\delta\alpha} \varphi_c \right\} \quad (25)$$

Здесь $D_{\alpha\beta\gamma}$ и B_{β}^{α} - унитарные волновые функции декуплета и октуплета, а φ_{abc} и φ_a - спиновые волновые функции частиц со спинами $\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{2}$, соответственно. Если вместо симметричного спинора третьего ранга φ_{abc} пользоваться спин-тензором $(\varphi_i)_a$, то мы имеем:

$$\Psi_{\{ABC\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} D_{\alpha\beta\gamma} (\sigma_i)_{ab} (\varphi_i)_c + \frac{1}{3\sqrt{2}} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_{\alpha}^{\delta} \varepsilon_{\delta\beta} \varphi_c + \varepsilon_{\beta\gamma\delta} B_{\alpha}^{\delta} \varepsilon_{\delta\alpha} \varphi_c + \varepsilon_{\gamma\alpha\delta} B_{\beta}^{\delta} \varepsilon_{\delta\alpha} \varphi_c \right\} \quad (26)$$

§ 5. Разложение неприводимых представлений группы $SU(6)$ на неприводимые представления подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$

Каждое неприводимое представление группы $SU(6)$ содержит различные неприводимые представления подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$. Так, например, спинор третьего ранга $\Psi_{\{ABC\}} = \Psi_{\{\alpha\alpha'\}(b\rho')(c\gamma)'} \}$ содержит следующие мультиплеты подгруппы

$SU(4) \otimes SU(2)$:

$$\Psi_{\{\alpha\alpha'\}(b\rho')(c\gamma)'} \}, \quad \Psi_{\{\alpha\alpha'\}(b\rho')(c\gamma)'} \}, \\ \Psi_{\{\alpha\alpha'\}(b\gamma)(c\gamma)'} \}, \quad \Psi_{\{\alpha\alpha'\}(b\gamma)(c\gamma)'} \},$$

где индексы α', β', γ' принимают значения 1, 2. $\Psi_{\{\alpha\alpha'\}(b\rho')(c\gamma)'} \}$ является симметричным спинором третьего ранга группы $SU(4)$ и инвариантом спиновой группы странных кварков $SU(2)$. Он имеет $\frac{4(4+1)(4+2)}{2 \cdot 3} = 20$ независимых компонент и обозначается через $(20,1)$. $\Psi_{\{\alpha\alpha'\}(b\gamma)(c\gamma)'} \}$ является симметричным спинором второго ранга группы $SU(4)$ и спинором первого ранга группы $SU(2)$. Поскольку симметричный спинор второго ранга группы $SU(4)$ имеет $\frac{4(4+1)}{2} = 10$ компонент, а спинор первого ранга группы $SU(2)$ имеет 2 компоненты, то неприводимое представление $\Psi_{\{\alpha\alpha'\}(b\rho')(c\gamma)'} \}$ имеет $10 \times 2 = 20$ независимых компонент и обозначается через $(10,2)$. Аналогично, $\Psi_{\{\alpha\alpha'\}(b\gamma)(c\gamma)'} \}$ имеет $4 \times 3 = 12$ компонент и обозначается через $(4,3)$, а $\Psi_{\{\alpha\alpha'\}(b\gamma)(c\gamma)'} \}$ имеет 4 компоненты и обозначается через $(1,4)$. Мы имеем, таким образом, разложение

$$(56) = (20,1)_{4 \times 2} + (10,2)_{4 \times 2} + (4,3)_{4 \times 2} + (1,4)_{4 \times 2} \quad (27)$$

Нетрудно проверить, что мультиплеты группы $SU(4) \otimes SU(2)$ в правой части (27) содержат следующие изотопические мультиплеты

$$(20,1)_{4 \times 2} = (4,4)_{2 \times 2} + (2,2)_{2 \times 2} \quad (28)$$

$$(10,2) = (3,4)_{2 \times 2} + (3,2)_{2 \times 2} + (1,2)_{2 \times 2} \quad (29)$$

$$(4,3) = (2,4)_{2 \times 2} + (2,2)_{2 \times 2} \quad (30)$$

$$(1,4)_{4 \times 2} = (1,4)_{2 \times 2} \quad (31)$$

В скобках в правых частях (28) - (31) первые цифры указывают числа компонент изотопических мультиплетов $(2T+1)$, а вторые цифры - числа спиновых состояний $(2s+1)$.

Рассмотрим теперь 35-плет с волновой функцией Φ_{β}^{α} , удовлетворяющей условию $\Phi_{\alpha}^{\alpha} = 0$. Мы имеем следующие представления подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$

$$\Phi_{(b\rho')}^{(a\alpha')}, \Phi_{(b_3)}^{(a\alpha')}, \Phi_{(b\rho')}^{(a_3)}, \Phi_{(b_3)}^{(a_3)}$$

$\Phi_{(b\rho')}^{(a\alpha')}$ является приводимым представлением группы $SU(4)$ и может быть разложен на неприводимые

$$\Phi_{(b\rho')}^{(a\alpha')} = \left[\Phi_{(b\rho')}^{(a\alpha')} - \frac{1}{4} \delta_b^a \delta_{\rho'}^{\alpha'} \Phi_{(c\rho')}^{(c\alpha')} \right] + \frac{1}{4} \delta_b^a \delta_{\rho'}^{\alpha'} \Phi_{(c\rho')}^{(c\alpha')} \quad (32)$$

Аналогично, $\Phi_{(b_3)}^{(a_3)}$ является приводимым представлением спиновой группы странных кварков и разлагается следующим образом:

$$\Phi_{(b_3)}^{(a_3)} = \left[\Phi_{(b_3)}^{(a_3)} - \frac{1}{2} \delta_b^a \Phi_{(c_3)}^{(c_3)} \right] + \frac{1}{2} \delta_b^a \Phi_{(c_3)}^{(c_3)} \quad (33)$$

Отметим, что в силу условия

$$\Phi_c^c = \Phi_{(c\rho')}^{(c\rho')} = \Phi_{(c\rho')}^{(c\rho')} + \Phi_{(c_3)}^{(c_3)} = 0$$

последние члены в правых частях (32) и (33) не являются независимыми. Они принадлежат одному и тому же неприводимому представлению подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$, а именно синглету. Первый член в правой части (32) является синглетом группы $SU(2)$ и спином второго ранга группы $SU(4)$. Число их компонент равно $4^2 - 1 = 15$. Первый член в правой части (33) является синглетом группы $SU(4)$ и спином второго ранга группы $SU(2)$ с $2^2 - 1 = 3$ компонентами. $\Phi_{(b\rho')}^{(a\alpha')}$ и $\Phi_{(b_3)}^{(a_3)}$ являются спинорами первого ранга группы $SU(4)$ и спинорами первого ранга группы $SU(2)$. Мы имеем, таким образом, разложение

$$(35) = \begin{matrix} (15,1) \\ 4 \times 2 \end{matrix} + \begin{matrix} (4,2) \\ 4 \times 2 \end{matrix} + \begin{matrix} (\bar{4},2) \\ 4 \times 2 \end{matrix} + \begin{matrix} (1,3) \\ 4 \times 2 \end{matrix} + \begin{matrix} (1,1) \\ 4 \times 2 \end{matrix} \quad (34)$$

Мультиплеты $SU(4) \otimes SU(2)$ в правой части (34) содержат следующие изотопические мультиплеты

$$(15,1) = \begin{matrix} (3,3) \\ 2 \times 2 \end{matrix} + \begin{matrix} (1,3) \\ 2 \times 2 \end{matrix} + \begin{matrix} (3,1) \\ 2 \times 2 \end{matrix} \quad (35)$$

$$(4,2) = \begin{matrix} (2,3) \\ 2 \times 2 \end{matrix} + \begin{matrix} (2,1) \\ 2 \times 2 \end{matrix} \quad (36)$$

$$(\bar{4},2) = \begin{matrix} (2,3) \\ 2 \times 2 \end{matrix} + \begin{matrix} (2,1) \\ 2 \times 2 \end{matrix} \quad (37)$$

$$(1,3)_{4 \times 2} = (1,3)_{2 \times 2} \quad (38)$$

$$(1,1)_{4 \times 2} = (1,1)_{2 \times 2} \quad (39)$$

§ 6. Классификация барионов и мезонов в симметрии $SU(6)$

В теории унитарной симметрии волновые функции барионов и мезонов являются неприводимыми спинорами группы $SU(3) \otimes SU(2)$. Предположим теперь, что барионы и мезоны образуют мультиплеты группы $SU(6)$. Тогда октет барионов $\frac{1}{2}^+$ и декуплет барионных резонансов $\frac{3}{2}^+$ можно включить в 56-плет группы $SU(6)$. Аналогично, псевдоскалярные и векторные мезоны могут быть рассмотрены как компоненты 35-плета группы

$SU(6)$, содержащего октет векторных мезонов ($\rho, K^*, \tilde{K}^*, \varphi^0$), синглетный векторный мезон (ω^0) и октет псевдоскалярных мезонов (π, K, \tilde{K}, η). Мы имеем, таким образом, следующие схемы расщепления 56-плета и 35-плета группы $SU(6)$ на мультиплеты группы $SU(3) \otimes SU(2)$:

$$(56) \begin{cases} \Delta, \gamma^*, \Xi^*, \Omega^- & (\Delta^P = \frac{3}{2}^+) \\ N, \Sigma, \Lambda, \Xi & (\Delta^P = \frac{1}{2}^+) \end{cases}$$

$$(35) \begin{cases} \rho, K^*, \tilde{K}^*, \varphi^0 & (\Delta^P = 1^-) \\ \omega^0 & (\Delta^P = 1^-) \\ \pi, K, \tilde{K}, \eta & (\Delta^P = 0^-) \end{cases}$$

Рассмотрим теперь расщепление этих мультиплетов группы $SU(6)$ на мультиплеты группы $SU(4) \times SU(2)$. Для 56-плета мы имеем, согласно формулам (27) - (31), следующую схему

$$(56) \begin{array}{l} \Delta, N \quad (\gamma = 1) \\ \Upsilon^*, \Sigma, \Lambda \quad (\gamma = 0) \\ \Xi^*, \Xi \quad (\gamma = -1) \\ \Omega^- \quad (\gamma = -2) \end{array}$$

Для изучения расщепления 35-плета мы пользуемся формулами (35) - (39). В формуле (35) мы имеем векторный мезон с изотопическим спином $T = 1$, псевдоскалярный мезон с $T = 1$ и векторный мезон с $T = 0$. Первые два триплета отождествляются с ρ -мезоном и π -мезоном, соответственно, а последний мезон обозначим через ω . В формуле (38) мы имеем также векторный мезон с $T = 0$. Его обозначим через φ . Мы имеем тогда схему

$$(35) \begin{array}{l} \rho, \omega, \pi \quad (\gamma = 0) \\ K^*, K \quad (\gamma = 1) \\ \tilde{K}^*, \tilde{K} \quad (\gamma = -1) \\ \varphi \quad (\gamma = 0) \\ \eta \quad (\gamma = 0) \end{array}$$

векторные мезоны с $\gamma = T = 0$ мы условно обозначаем через ω и φ . Мы покажем, что они действительно отождествляются с известными ω - и φ -мезонами. Для этого рассмотрим связь между этими состояниями и состояниями ω^0 и φ^0 в схеме расщепления 35-плета на унитарные мультиплеты. Как известно, ω^0 и φ^0 являются спинорами второго ранга группы $SU(3)$ с ненулевыми компонентами:

$$\varphi^0: \quad \psi_1^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \psi_2^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \psi_3^3 = -\frac{2}{\sqrt{6}},$$

$$\omega^0: \quad \psi_1^1 = \psi_2^2 = \psi_3^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(см. главу III, формулы (22) и (23)). Если представить эти мезоны в виде матриц 3×3 , то мы имеем диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\varphi^0}{\sqrt{6}} + \frac{\omega^0}{\sqrt{3}} & & \\ & \frac{\varphi^0}{\sqrt{6}} + \frac{\omega^0}{\sqrt{3}} & \\ & & -\frac{2}{\sqrt{6}}\varphi^0 + \frac{\omega^0}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (40)$$

Что касается φ - и ω -мезонов, то из определения (см. (32) и (33)) следует, что волновая функция φ -мезона отлична от нуля, только если унитарные индексы α, β равны 3, а волновая функция ω -мезона отлична от нуля, только если унитарные индексы α, β равны 1, 2, причем $\psi_1^1 = \psi_2^2$, поскольку ω -мезон имеет $T = 0$. Таким образом, унитарные волновые функции φ - и ω -мезонов имеют следующие ненулевые компоненты

$$\varphi: \quad \psi_3^3 = 1, \\ \omega: \quad \psi_1^1 = \psi_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Если представить эти мезоны в виде матрицы, то мы имеем

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega}{\sqrt{2}} & & \\ & \frac{\omega}{\sqrt{2}} & \\ & & \varphi \end{pmatrix} \quad (41)$$

Из (40) и (41) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{\sqrt{2}}{3}\varphi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega^0, \\ \omega &= \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi^0 + \frac{\sqrt{2}}{3}\omega^0. \end{aligned} \quad (42)$$

Сравнивая соотношения (42) с определением угла $\varphi\omega$ -смешивания*

* Эти соотношения отличаются от соотношений (66) в главе III знаком волновой функции φ^0 , что не является существенным, так как волновые функции частиц всегда определяются с точностью до фазы.

$$\varphi = -\cos\theta \varphi^0 + \sin\theta \omega^0,$$

$$\omega = \sin\theta \varphi^0 + \cos\theta \omega^0,$$

мы получаем

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Это значение θ прекрасно согласуется со значением, полученным в главе III на основе экспериментальных данных по массам частиц. Мы заключаем, таким образом, что ω - и φ - мезоны в схеме расщепления на мультиплеты $SU(4) \otimes SU(2)$ являются наблюдаемыми частицами. Это показывает, по-видимому, что среди цепей редукции (7) и (9) в природе осуществляется последняя.

II. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ СИММЕТРИИ $SU(6)$

§ I. Электромагнитные свойства баронов

В унитарной симметрии электромагнитный ток является компонентой октетета. С другой стороны, по отношению к вращениям, т.е. к спиновой группе $SU(2)$, заряд является инвариантом (скаляром), а магнитный момент является вектором (с тремя компонентами). Это означает, что заряд и магнитный момент являются мультиплетами (8.1) и (8.3), соответственно, группы $SU(3) \otimes SU(2)$. Предположим теперь, что эти мультиплеты принадлежат 35-плету группы $SU(6)$ - мультиплету группы $SU(6)$ с наименьшим числом компонент, содержащему октететы со спинами 0 и 1. Тогда матричные элементы операторов заряда Q и магнитного момента \mathcal{M}_i между состояниями баронов из 56-плета получаются из билинейных комбинаций

$$J_B^A = \frac{1}{4} \{ACD\} \psi_{\{BCD\}} - \frac{1}{6} \delta_B^A \frac{1}{4} \{CDE\} \psi_{\{CDE\}}, \quad (43)$$

преобразующихся как компоненты 35-плета группы $SU(6)$, при помощи соответствующих проекционных операций.

Как известно, волновая функция 35-плета выражается через волновые функции унитарных мультиплетов следующим образом:

$$\Phi_{(b\beta)}^{(a\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_b^a (V_i)_\beta^\alpha + \frac{1}{\sqrt{6}} \delta_b^a (\sigma_i)_\beta^\alpha V_i + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_b^a P_\beta^\alpha.$$

Если вместо спиноров второго ранга группы $SU(3)$ $(V_i)_\beta^\alpha$ и P_β^α пользоваться восьмимерными величинами

$$V_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{2}} (V_i)_\beta^\alpha (\lambda_j)_\alpha^\beta,$$

$$P_j = \frac{1}{\sqrt{2}} P_\beta^\alpha (\lambda_j)_\alpha^\beta,$$

$j = 1, 2, 3, \dots, 8$ для описания октетета, то мы имеем:

$$\Phi_{(b\beta)}^{(a\alpha)} = \frac{1}{2} (\sigma_i)_b^a (\lambda_j)_\beta^\alpha V_{i,j} + \frac{1}{\sqrt{6}} \delta_b^a (\sigma_i)_\beta^\alpha V_i + \frac{1}{2} \delta_b^a (\lambda_j)_\beta^\alpha P_j, \quad (44)$$

причем в этой формуле по i производится суммирование от 1 до 3, а по j - от 1 до 8. Обозначим через Π_j и Π_{ij} проекционные операторы на состояния (8.1) и (8.3), соответственно

$$(\Pi_j)_A^B \Phi_B^A = P_j, \quad (45)$$

$$(\Pi_{ij})_A^B \Phi_B^A = V_{i,j}. \quad (46)$$

Нетрудно проверить, что

$$(\Pi_j)_A^B = \frac{1}{2} \delta_a^b (\lambda_j)_\alpha^\beta, \quad (47)$$

$$(\Pi_{ij})_A^B = \frac{1}{2} (\sigma_i)_a^b (\lambda_j)_\alpha^\beta. \quad (48)$$

Для того, чтобы получить матричные элементы операторов заряда и магнитного момента между состояниями баронов из 56-плета, необходимо проектировать ток (43) на

состояния (8.1) и (8.3). Отметим, что по отношению к группе унитарной симметрии 3×2 электромагнитный ток является компонентой октуплета, соответствующей матрице

$$\lambda^e = \frac{1}{2} \left(\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_8 \right).$$

Поэтому мы должны пользоваться проекционными операторами

$$(\Pi^e)_A^B = \frac{1}{2} \delta_a^b (\lambda^e)_\alpha^\beta,$$

$$(\Pi_i^e)_A^B = \frac{1}{2} (\sigma_i)_a^b (\lambda^e)_\alpha^\beta.$$

Таким образом, предположение о том, что заряд и магнитный момент принадлежат 35-плету группы $SU(6)$ приводит к тому, что матричные элементы операторов заряда Q и магнитного момента \mathcal{M}_i между состояниями бариев из 56-плета имеют вид

$$\langle 56 | Q | 56 \rangle = q \delta_a^b (\lambda^e)_\alpha^\beta J_{(b\rho)}^{(a\kappa)}, \quad (49)$$

$$\langle 56 | \mathcal{M}_i | 56 \rangle = \mu (\sigma_i)_a^b (\lambda^e)_\alpha^\beta J_{(b\rho)}^{(a\kappa)}, \quad (50)$$

где $J_{(b\rho)}^{(a\kappa)}$ выражается через волновые функции бариев соотношением (43), а q и μ - произвольные константы. Подставим теперь в (43) выражение (25) волновой функции $\psi_{\{ABC\}}$. Мы получим тогда из (49) и (50)

$$\langle 56 | Q | 56 \rangle = q \left\{ \bar{\varphi}^{acd} \varphi_{acd} \bar{D}^{\alpha r \delta} (\lambda^e)_\alpha^\beta D_{\beta r \delta} + \frac{1}{3} \bar{\varphi}^a \varphi_a (\bar{B}_r^\alpha B_p^\beta - \bar{B}_p^\alpha B_r^\beta) (\lambda^e)_\alpha^\beta \right\}, \quad (51)$$

$$\langle 56 | \mathcal{M}_i | 56 \rangle = \mu \left\{ \bar{\varphi}^{acd} (\sigma_i)_a^b \varphi_{bcd} \bar{D}^{\alpha r \delta} (\lambda^e)_\alpha^\beta D_{\beta r \delta} + \frac{1}{3} \bar{\varphi}^a (\sigma_i)_a^b \varphi_b \left[(\bar{B}_r^\alpha B_p^\beta + \bar{B}_p^\alpha B_r^\beta) + \frac{2}{3} (\bar{B}_r^\alpha B_p^\beta - \bar{B}_p^\alpha B_r^\beta) \right] (\lambda^e)_\alpha^\beta \right\} \quad (52)$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{\sqrt{2}}{3} \bar{\varphi}^{acd} (\sigma_i)_a^b \varphi_c \varepsilon_{d b} \bar{D}^{\alpha r \delta} (\lambda^e)_\alpha^\beta B_r^\sigma \varepsilon_{\beta \sigma} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{3} \bar{\varphi}^c \varepsilon^{ad} (\sigma_i)_a^b \varphi_{bcd} \bar{B}_\sigma^\delta \varepsilon^{\sigma \alpha} (\lambda^e)_\alpha^\beta D_{\beta r \delta} \end{aligned} \right\}$$

формула (51) показывает, что для заряда октуплета мы получаем связь типа F , в согласии с условием нормировки заряда. Если положим $q = 3$, то из этой формулы мы получим для всех частиц нужные заряды: p имеет заряд $+1$, Δ^{++} имеет заряд $+2$, заряды нейтральных частиц равны нулю и т.д. Рассмотрим теперь формулу (52). Напомним, что в унитарной симметрии магнитные моменты бариев выражаются через две произвольные константы μ^F и μ^D . Из формулы (52) видно, что в симметрии $SU(6)$ эти константы не являются независимыми. Их отношение равно

$$\frac{\mu^D}{\mu^F} = \frac{3}{2}. \quad (53)$$

Поскольку магнитные моменты нуклонов выражаются через μ^F и μ^D следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_p &= \mu^F + \frac{1}{3} \mu^D, \\ \mu_n &= -\frac{2}{3} \mu^D, \end{aligned}$$

(см. главу V, п. I, § I), то отсюда получаем

$$\frac{\mu_p}{\mu_n} = -\frac{3}{2},$$

что хорошо согласуется с опытом

Кроме соотношения (53), формула (52) содержит еще другие предсказания. Она показывает, что магнитные моменты частиц в декуплете барионных резонансов, магнитные моменты частиц в октуплете барионов и константы дипольных магнитных переходов между состояниями декуплета и октуплета выражаются через одну произвольную константу. В частности, магнитный момент $-\Omega^-$ - гиперона равен μ_p (в единицах отрицательного заряда), где μ_p - магнитный момент протона, а матричный элемент дипольного магнитного перехода между состояниями протона и резонанса Δ^+ равен

$$\langle p | \mathcal{M}_i | \Delta^+ \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} \mu_p \bar{\varphi}^c \varepsilon^{ad} (\sigma_i)_a^b \varphi_{bcd}, \quad (54)$$

где φ_a и φ_{abc} - спиновые волновые функции протона и резонанса Δ^+ .

§ 2. Электромагнитные распады мезонных резонансов

В предыдущей главе было отмечено, что матричные элементы электромагнитных распадов барийных резонансов зависят от двух констант. В симметрии $SU(6)$ одна из этих констант выражается через магнитный момент протона. Что касается второй константы, то она неизвестна. Поэтому мы не можем сделать никаких заключений относительно вероятностей радиационных распадов барийных резонансов.

Рассмотрим теперь радиационные распады векторных мезонов на псевдоскалярные мезоны. Матричные элементы этих процессов пропорциональны матричным элементам дипольных магнитных переходов между состояниями векторных и псевдоскалярных мезонов. В симметрии $SU(6)$ векторные и псевдоскалярные мезоны принадлежат 35-плету с волновой функцией Φ_B^A , удовлетворяющей условию $\Phi_A^A = 0$. Поэтому матричные элементы рассматриваемых дипольных магнитных переходов получаются из билинейных комбинаций

$$J_B^A = \bar{\Phi}_C^A \Phi_B^C \pm \bar{\Phi}_B^C \Phi_C^A \quad (55)$$

путем проектирования на состояние (8.3). Если пользоваться симметричными комбинациями, то мы имеем

$$\begin{aligned} \langle 35 | \mathcal{M}_i | 35 \rangle &= \mu (\sigma_i)_\alpha^\beta (\lambda^e)_\alpha^\beta \left[\bar{\Phi}_C^A \Phi_B^C + \bar{\Phi}_B^C \Phi_C^A \right] \\ &= \mu \left\{ \frac{1}{i} \epsilon_{ijk} \left[(\bar{V}_j)_\gamma^\alpha (V_k)_\beta^\sigma - (\bar{V}_j)_\beta^\sigma (V_k)_\gamma^\alpha \right] (\lambda^e)_\alpha^\beta \right. \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{V}_i P_\rho^\alpha (\lambda^e)_\alpha^\beta + \left[(\bar{V}_i)_\gamma^\alpha P_\rho^\sigma + (\bar{V}_i)_\beta^\sigma P_\rho^\alpha \right] (\lambda^e)_\alpha^\beta \\ &\quad \left. + \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{P}_\rho^\alpha (\lambda^e)_\alpha^\beta V_i + \left[\bar{P}_\rho^\alpha (V_i)_\beta^\sigma + \bar{P}_\rho^\sigma (V_i)_\gamma^\alpha \right] (\lambda^e)_\alpha^\beta \right\}, \end{aligned} \quad (56)$$

а если пользоваться антисимметричными комбинациями, то мы имеем

$$\langle 35 | \mathcal{M}_i | 35 \rangle = \mu (\sigma_i)_\alpha^\beta (\lambda^e)_\alpha^\beta \left[\bar{\Phi}_C^A \Phi_B^C - \bar{\Phi}_B^C \Phi_C^A \right]$$

$$\begin{aligned} &= \mu \left\{ \frac{1}{i} \epsilon_{ijk} \left[(\bar{V}_j)_\gamma^\alpha (V_k)_\beta^\sigma + (\bar{V}_j)_\beta^\sigma (V_k)_\gamma^\alpha \right] (\lambda^e)_\alpha^\beta \right. \\ &\quad + \left[(\bar{V}_i)_\gamma^\alpha P_\rho^\sigma - (\bar{V}_i)_\beta^\sigma P_\rho^\alpha \right] (\lambda^e)_\alpha^\beta \\ &\quad \left. + \left[\bar{P}_\rho^\alpha (V_i)_\beta^\sigma - \bar{P}_\rho^\sigma (V_i)_\gamma^\alpha \right] (\lambda^e)_\alpha^\beta \right\}. \quad (57) \end{aligned}$$

Поскольку матричный элемент (57) не меняет знак при зарядовом сопряжении, то из C -инвариантности следует, что только (56) дает вклад. В частности, матричные элементы всех радиационных распадов векторных мезонов на псевдоскалярные зависят от одной константы, через которую выражаются также магнитные моменты векторных мезонов. Напомним, что в унитарной симметрии матричные элементы рассматриваемых электромагнитных распадов зависят от двух констант g^S и g^D (см. главу V, п. I, § 2). Из (56) следует, что в симметрии $SU(6)$ эти константы пропорциональны:

$$g^S = \frac{2}{\sqrt{3}} g^D.$$

С другой стороны, угол φ ω -смешивания полностью определяется:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{1}}{3}.$$

Поэтому для распадов φ - и ω - мезонов вместо соотношений

$$\begin{aligned} g_{\varphi \rightarrow \pi^0 \gamma} &= \frac{g^D}{\sqrt{3}} \cos \theta - \frac{g^S}{\sqrt{2}} \sin \theta, & g_{\omega \rightarrow \pi^0 \gamma} &= \frac{g^D}{\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{g^S}{\sqrt{2}} \cos \theta, \\ g_{\varphi \rightarrow \eta \gamma} &= -\left(\frac{g^D}{3} \cos \theta + \frac{g^S}{\sqrt{6}} \sin \theta \right), & g_{\omega \rightarrow \eta \gamma} &= -\frac{g^D}{3} \sin \theta + \frac{g^S}{\sqrt{6}} \cos \theta \end{aligned}$$

(см. главу V, соотношение (16)) мы имеем

$$\begin{aligned} g_{\varphi \rightarrow \pi^0 \gamma} &= 0, & g_{\omega \rightarrow \pi^0 \gamma} &= g^D, \\ g_{\varphi \rightarrow \eta \gamma} &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} g^D, & g_{\omega \rightarrow \eta \gamma} &= \frac{1}{\sqrt{3}} g^D. \end{aligned} \quad (58)$$

Отсюда следует, что распад

$$\varphi \rightarrow \pi^0 + \gamma$$

запрещен, а отношения вероятностей других распадов φ - и ω - мезонов к вероятности распада

$$\rho^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma$$

полностью определены. Значения этих отношений, а также других отношений, данных в таблице X, представлены в таблице XI.

Таблица XI

Отношение вероятностей	Теоретические значения
$\frac{W(K^{*\pm} \rightarrow K^{\pm}\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	0,58
$\frac{W(K^{*0} \rightarrow K^0\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	2,32
$\frac{W(\rho^0 \rightarrow 2\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	0,36
$\frac{W(\omega \rightarrow \pi\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	9,9
$\frac{W(\omega \rightarrow 2\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	0,052
$\frac{W(\eta \rightarrow \pi\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	0
$\frac{W(\eta \rightarrow 2\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	2,53

§ 3. Мезон-барионное и барион-барионное рассеяния

Применим теперь симметрию $SU(6)$ к изучению мезон-барионного и барион-барион-

ного рассеяния. Отметим прежде всего, что инвариантность матричного элемента по отношению к группе $SU(6)$ влечет за собой инвариантность относительно спиновой группы

$SU(2)$, т.е. приводит к сохранению полного спина системы частиц в процессе рассеяния. Однако, в действительности, полный спин системы сохраняется только если орбитальный момент l равен нулю. В состояниях с $l \neq 0$ всегда имеется LS -связь, и сохраняющейся величиной является только полный момент $\vec{J}^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2$. Поэтому симметрию $SU(6)$ можно применять только к амplitудам рассеяния в S -состоянии.

Рассмотрим рассеяние мезона из 35-плета на барионе из 56-плета в S -состоянии. Матричный элемент, инвариантный относительно группы $SU(6)$, имеет вид

$$\begin{aligned}
 M(35+56 \rightarrow 35+56) = & A_1 \bar{\Phi}_B^A \Phi_C^B \bar{\Psi}_{\{CDE\}} \Psi_{\{CDE\}} \\
 & + A_2 (\bar{\Phi}_B^A \Phi_C^B + \bar{\Phi}_C^B \Phi_B^A) \bar{\Psi}_{\{CDE\}} \Psi_{\{ADE\}} \\
 & + A_3 (\bar{\Phi}_B^A \Phi_C^B - \bar{\Phi}_C^B \Phi_B^A) \bar{\Psi}_{\{CDE\}} \Psi_{\{ADE\}} \\
 & + A_4 \bar{\Phi}_B^A \Phi_C^B \bar{\Psi}_{\{BDE\}} \Psi_{\{ACE\}}
 \end{aligned} \quad (59)$$

В матричном элементе (59) содержатся: матричный элемент рассеяния октуплета псевдоскалярных мезонов на октуплете барионов, матричный элемент процессов рождения векторных мезонов и барионных резонансов при столкновении псевдоскалярного мезона с барионом и т.д. Пользуясь выражениями (18) и (25) волновых функций Φ_B^A и $\Psi_{\{ABC\}}$ через волновые функции мультиплетов $SU(3) \otimes SU(2)$, можно получить выражение для матричного элемента мезон-барионного рассеяния в S -состоянии. Отметим, что в унитарной симметрии существует семь независимых амплитуд, а в симметрии $SU(6)$ мы имеем только четыре. Из выражения (59) можно получить следующее соотношение между амплитудами упругого рассеяния π и K -мезонов на протоне в S -состоянии:

$$\begin{aligned}
 [M_S(\pi^+p \rightarrow \pi^+p) - M_S(\pi^-p \rightarrow \pi^-p)] &= \frac{1}{2} [M_S(K^+p \rightarrow K^+p) - M_S(K^-p \rightarrow K^-p)] \\
 &= [M_S(K^+p \rightarrow K^+p) - M_S(K^0p \rightarrow K^0p)]
 \end{aligned} \quad (60)$$

Аналогично, матричный элемент рассеяния 56-плета на 56-плете в S -состоянии имеет вид

$$\begin{aligned}
 M(56+56 \rightarrow 56+56) = & A_1 \left[\bar{\Psi}_{\{ABC\}}(1) \Psi_{\{ABC\}}(1) \bar{\Psi}_{\{EFG\}}(2) \Psi_{\{EFG\}}(2) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \bar{\psi}_{\{ABC\}}(1) \psi_{\{ABC\}}(2) \bar{\psi}_{\{EFG\}}(2) \psi_{\{EFG\}}(1) \\
& + A_2 \left[\bar{\psi}_{\{ABC\}}(1) \psi_{\{ABD\}}(1) \bar{\psi}_{\{DEF\}}(2) \psi_{\{CEF\}}(2) \right. \\
& \left. - \bar{\psi}_{\{ABC\}}(1) \psi_{\{ABD\}}(2) \bar{\psi}_{\{DEF\}}(2) \psi_{\{CEF\}}(1) \right] \quad (61)
\end{aligned}$$

Здесь цифры 1 и 2 были введены для того, чтобы различить тождественные частицы. Требование принципа Паули учитывается при получении матричного элемента (61). Подставляя в (61) выражение (25) для волновой функции $\psi_{\{ABC\}}$, мы можем получить матричный элемент нуклон-нуклонного рассеяния в S -состоянии и показать, что в симметрии $SU(6)$ амплитуды рассеяния нейтрона на протоне в состояниях 1S_0 и 3S_1 совпадают:

$$M_{^1S_0}(np \rightarrow np) = M_{^3S_1}(np \rightarrow np). \quad (62)$$

Результаты фазового анализа нуклон-нуклонного рассеяния показывают, что в области энергий от 100 Мэв до 400 Мэв соотношение (62) хорошо согласуется с опытом.

В заключение отметим, что поскольку симметрия $SU(6)$ требует сохранения полного спина, то ее область применимости весьма ограничена. Так, например, она неприменима к изучению распадов барионных резонансов, распадов векторных мезонов и т.д. Для изучения этих распадов необходимо построить теорию, которая позволит учесть LS -связь.

III. ВОЗМОЖНЫЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ СИММЕТРИИ $SU(6)$

§ I. Симметрия $SU(6)$ как динамическая симметрия

Обсудим теперь вопросы, которые должны быть решены, если предложенная симметрия $SU(6)$ является некоторой динамической симметрией. Во-первых, теория симметрии $SU(6)$ является нековариантной теорией. Дело в том, что три спиновых оператора $\sigma_{ij} = \epsilon_{ijk}$, σ_k , $i, j, k = 1, 2, 3$, входящие в число генераторов группы $SU(6)$, являются лишь тремя компонентами антисимметричного тензора второго ранга $\sigma_{\mu\nu}$ в пространстве Минковского $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. При преобразовании Лоренца каждая компонента σ_{ij} может превращаться в линейную комбинацию всех компонент $\sigma_{\mu\nu}$. Поэтому теория будет ковариантной только если группа симметрии будет содержать, наряду с σ_{ij} ,

все компоненты $\sigma_{\mu\nu}$. Во-вторых, в процессах распада, рассеяния и рождения частиц LS -связь оказывается весьма существенной. Поэтому необходимо построить теорию релятивизированной симметрии $SU(6)$ так, чтобы она позволяла учитывать эту связь. В третьих, наличие разницы масс частиц в каждом мультиплете группы $SU(6)$ показывает, что симметрия $SU(6)$ нарушается. Теория релятивизированной нарушенной симметрии $SU(6)$ должна также позволять объяснить расщепление масс частиц в каждом мультиплете. Эти вопросы будут обсуждаться во второй части этого цикла лекций, посвященной изучению некомпактных групп симметрии.

§ 2. Симметрия $SU(6)$ и модель кварков

Одним из важных результатов симметрии $SU(6)$ является предсказание отношения магнитных моментов протона и нейтрона. Этот результат также можно получить в рамках модели кварков. Предположим, что барионы и барионные резонансы из 56-плета образуются из трех кварков, находящихся в S -состоянии, причем полные волновые функции этих систем трех кварков симметричны относительно перестановок кварков. Поскольку унитарные волновые функции частиц из декуплета симметричны по унитарным индексам, то они также симметричны по спиновым индексам, и эти частицы имеют спин $\frac{3}{2}$. Аналогично, частицы из октуплета являются состояниями с полным спином $\frac{1}{2}$. Пусть кварки имеют заряды $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$. Из унитарной симметрии следует, что их магнитные моменты равны $\frac{2}{3}\mu$, $-\frac{1}{3}\mu$, $-\frac{1}{3}\mu$, где μ - произвольная константа. Если кварки имеют только дираковские магнитные моменты, то $\mu = \frac{e}{2M}$, где M - масса кварка. Рассмотрим Ω^- -гиперон. Он образуется из трех λ -кварков с магнитным моментом $-\frac{1}{3}$. Состояние Ω^- -гиперона с проекцией спина $+\frac{3}{2}$ тогда отождествляется с системой, в которой все λ -кварки имеют проекции спина $+\frac{1}{2}$ и следовательно их магнитные моменты складываются. Таким образом, магнитный момент Ω^- -гиперона по абсолютной величине равен μ и имеет такой же знак, что и его заряд. Аналогичным методом можно вычислить магнитные моменты протона, нейтрона и других частиц, а также константы дипольных магнитных переходов между состояниями барионов и барионных резонансов, между состояниями псевдоскалярных и векторных мезонов и т.д. Для протона и нейтрона мы получим $\mu_p = \mu$, $\mu_n = -\frac{2}{3}\mu$ и, следовательно, $\mu_p/\mu_n = -\frac{3}{2}$. Вообще говоря, все предсказания симметрии $SU(6)$ можно рассмотреть как следствия составной модели элементарных частиц, в которой барионы и барионные резонансы образуются из трех кварков, находящихся в S -состоянии, а псевдоскалярные и векторные мезоны образуются из кварка и антикварка в S -состоянии.

Отметим, что в рассматриваемой модели можно вычислить не только отношение магнитных моментов протона и нейтрона, но и их абсолютные значения. Например, магнитный момент протона равен μ . Если кварки имеют только дираковский магнитный момент, то $\mu = \frac{e}{2M}$. Поскольку масса кварка M , по-видимому, большая (по крайней мере гораздо больше $\frac{1}{3} M_N$, где M_N - масса нуклона), то магнитный момент протона должен быть существенно меньше экспериментального значения $2,79 \frac{e}{2M_N}$. Таким образом, чтобы получить это значение магнитного момента протона, мы должны предполагать, что магнитные моменты кварков существенно больше их дираковских магнитных моментов. Боголюбов, Струминский и Тавхелидзе рассмотрели вопрос о магнитном моменте кварков и показали, что кварки в связанных состояниях имеют эффективные магнитные моменты, существенно превосходящие значения их магнитных моментов в свободном состоянии. В частности, магнитный момент протона может быть равен $2,79 \frac{e}{2M_N}$, даже если свободные кварки имеют магнитные моменты $\frac{2}{3} \frac{e}{2M}$, $-\frac{1}{3} \frac{e}{2M}$ и $-\frac{1}{3} \frac{e}{2M}$, соответственно.

Как было отмечено, чтобы объяснить предсказания симметрии $SU(6)$ в рамках модели кварков, необходимо предположить, что волновые функции барионов и барионных резонансов как систем трех кварков симметричны относительно перестановок кварков. С другой стороны, кварки имеют спин $\frac{1}{2}$, т.е. являются фермионами. Таким образом, если кварки существуют, то они не подчиняются обычной статистике ферми-Дирака (по крайней мере, когда они находятся в связанном состоянии). В главе III было показано, что можно построить модель унитарной симметрии без дробных зарядов и без дробных барионных чисел. В одной из таких моделей все частицы образуются из трех фундаментальных триплетов. В рамках этой модели можно также получить все предсказания симметрии $SU(6)$. Поскольку барионы и барионные резонансы являются системами трех кварков из трех различных триплетов, то здесь уже не существует вопроса о статистике кварков. Однако, в данном случае, кроме известных квантовых чисел, мы имеем еще одно квантовое число - суперзаряд Z , которое может не сохраняться только в слабых взаимодействиях. Известные барионы, мезоны и резонансы имеют нулевой суперзаряд. В принципе должны существовать также частицы с ненулевыми суперзарядами. Если рассматривать совокупность всех барионов с $Z = 1$, например, то по крайней мере один из них должен быть стабильным по отношению к сильным и электромагнитным взаимодействиям. Если суперзаряд не сохраняется в слабых взаимодействиях, то масса этого бариона должна быть больше массы протона, так как в противном случае протон распадался бы на этот барион и пару лептонов или на этот барион и фотон. Аналогично, среди мезонов с $Z = 1$, например, должен существовать по крайней мере один мезон, который может распадаться только по слабым взаимодействиям. Такие барионы и мезоны можно обнаружить в аннигиляции пары протон-антипротон, если их массы отличаются от масс обычных частиц с $Z = 0$.

IV. КЛАССИФИКАЦИЯ НОВЫХ МЕЗОННЫХ И БАРИОННЫХ РЕЗОНАНСОВ ПО ВЫСШИМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМ ГРУППЫ $SU(6)$

§ I. Мезонные резонансы

В настоящее время экспериментом были обнаружены некоторые мезонные резонансы со спином и четностью 2^+ (см. главу III, п. II, § 3). Рассмотрим теперь возможности классификации этих мезонных резонансов по неприводимым представлениям группы $SU(6)$. Как известно, по отношению к спиновой группе $SU(2)$ волновые функции частиц со спином 2 являются спинорами четвертого ранга. Поскольку спиноры ранга меньше четырех группы $SU(6)$ не могут содержать спиноры четвертого ранга спиновой подгруппы $SU(2)$, то в симметрии $SU(6)$ мезонные резонансы со спином 2 могут описываться только спинорами четвертого ранга или высших рангов группы $SU(6)$. В рамках модели кварков это означает, что частицы со спином 2 могут быть рассмотрены только как системы, содержащие не меньше четырех фундаментальных фермионов со спином $1/2$ (кварков и антикварков). Отметим, что между симметрией $SU(6)$ и моделью кварков существует следующее соответствие: мезонный 35-плет, описываемый спинором с одним верхним и одним нижним индексами Φ_B^A , характеризует состояния систем, состоящих из одного кварка и одного антикварка, а барионный 56-плет, описываемый спинором с тремя нижними индексами, характеризует состояния систем из трех кварков. Грубо говоря, каждый нижний индекс соответствует одному кварку, а верхний - антикварку. Если сохранить это соответствие и для других мультиплетов, то в симметрии $SU(6)$ мезоны всегда описываются спинорами с равными числами верхних и нижних индексов, так как они могут быть рассмотрены как состояния систем, состоящих из равных чисел кварков и антикварков. Таким образом, для классификации мезонных резонансов со спином 2 в симметрии $SU(6)$ необходимо рассмотреть спиноры четвертого ранга, 2 раза ковариантные и 2 раза контрвариантные или спиноры ранга $2\uparrow$, $\uparrow > 2$, \uparrow раз ковариантные и \uparrow раз контрвариантные. Существует следующие неприводимые спиноры четвертого ранга, 2 раз ковариантные и 2 раз контрвариантные:

$$\Phi_{[CD]}^{[AB]}, \Phi_{\{CD\}}^{\{AB\}}, \Phi_{\{CD\}}^{[AB]}, \Phi_{[CD]}^{\{AB\}}$$

причем шпурн этих спиноров равны нулю

$$\Phi_{[AD]}^{[AB]} = \Phi_{\{AD\}}^{\{AB\}} = \Phi_{\{AD\}}^{[AB]} = \Phi_{[AD]}^{\{AB\}} = 0$$

Спиноры $\Phi_{\{CD\}}^{[AB]}$ и $\Phi_{\{CD\}}^{\{AB\}}$ совпадают со своими контргradientными, а $\Phi_{\{CD\}}^{[AB]}$ и $\Phi_{[CD]}^{\{AB\}}$ контргradientны друг к другу. С другой стороны, частицы и античастицы, вообще говоря, принадлежат контргradientным друг к другу представлениям, а существование частиц влечет за собой существование античастиц. Поэтому $\Phi_{\{CD\}}^{[AB]}$ и $\Phi_{[CD]}^{\{AB\}}$ должны быть рассмотрены одновременно.

Подсчитаем теперь число независимых компонент рассматриваемых спиноров четвертого ранга. Отметим, что существуют $\frac{6(6+1)}{2} = 21$ различных симметричная пара индексов $\{AB\}$, $\frac{6(6-1)}{2} = 15$ различных антисимметричных пар индексов $[AB]$. Поэтому, если бы шпурн спиноров $\Phi_{\{CD\}}^{[AB]}$, $\Phi_{\{CD\}}^{\{AB\}}$, $\Phi_{[CD]}^{\{AB\}}$ и $\Phi_{[CD]}^{[AB]}$ были произвольными, то они имели бы $15 \times 15 = 225$, $21 \times 21 = 441$ и $15 \times 21 = 315$ независимых компонент, соответственно. Рассмотрим теперь их шпурн по одной паре индексов: $\Phi_{\{AD\}}^{[AB]}$, $\Phi_{\{AD\}}^{\{AB\}}$, $\Phi_{\{AD\}}^{[AB]}$ и $\Phi_{\{AD\}}^{\{AB\}}$. Первые шпурн являются спинорами с одним верхним и одним нижним индексами. Они имеют $6^2 = 36$ независимых компонент, и условия

$$\Phi_{\{AD\}}^{[AB]} = \Phi_{\{AD\}}^{\{AB\}} = 0$$

эквивалентны 36 уравнениям. Следовательно, спиноры $\Phi_{\{CD\}}^{[AB]}$ и $\Phi_{\{CD\}}^{\{AB\}}$ с нулевыми шпурнами имеют $225 - 36 = 189$ и $441 - 36 = 405$ независимых компонент, соответственно. Что касается шпурнов $\Phi_{\{AD\}}^{[AB]}$ и $\Phi_{\{AD\}}^{\{AB\}}$, то они имеют 35 независимых компонент, так как равенство

$$\Phi_{\{AB\}}^{[AB]} = \Phi_{\{AB\}}^{\{AB\}} = 0$$

выполняется автоматически. Следовательно спиноры $\Phi_{\{CD\}}^{[AB]}$ и $\Phi_{\{CD\}}^{\{AB\}}$ с нулевыми шпурнами имеют $315 - 35 = 280$ независимых компонент. Таким образом, в рамках теории симметрии

$SU(6)$ мезонные резонансы 2^+ могут принадлежать только 189-плету, 405-плету, $(280+280)$ - плету или мультиплетам с большим числом компонент.

Можно показать, что рассматриваемые мультиплеты группы $SU(6)$ содержат следую-

щие унитарные мультиплеты:

$$(189) = (1.5) + (8.5) + 2(8.3) + (10.3) + (\bar{10}.3) + (1.1) + (8.1) + (27.1), \quad (63)$$

$$(405) = (1.5) + (8.5) + (27.5) + 2(8.3) + (10.3) + (\bar{10}.3) + (27.3) + (1.1) + (8.1) + (27.1), \quad (64)$$

$$(280) = (8.5) + (10.5) + (1.3) + 2(8.3) + (10.3) + (27.3) + (8.1) + (10.1) + (\bar{10}.1) \quad (65)$$

Эти мультиплеты содержат унитарные декуплеты (и сопряженные декуплеты) и 27-плеты, и следовательно изотопические мультиплеты с $T = 2$, $Y = 0$, $T = \frac{3}{2}$, $Y = \pm 1$, $T = 1$, $Y = \pm 2$, $T = 0$, $Y = \pm 2$. Рассмотрим такие изотопические мультиплеты со спинами и четностями 0^+ и 2^+ . Если их массы больше сумм масс двух соответствующих псевдоскалярных мезонов, то они выглядят как резонансы в системах двух псевдоскалярных мезонов:

$$\pi^+ \pi^+, \quad K^+ \pi^+, \quad K^0 \pi^-, \quad K^+ K^+, \quad K^+ K^0.$$

Эти резонансы могут быть обнаружены в процессах

$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + \pi^+ + n, \\ \pi^+ + p &\rightarrow K^+ + \pi^+ + \Sigma^+, \\ K^+ + p &\rightarrow K^+ + \pi^+ + n, \\ K^+ + p &\rightarrow K^+ + K^+ + \Sigma^0(\lambda), \\ K^+ + p &\rightarrow K^+ + K^0 + \Sigma^+. \end{aligned}$$

Для дальнейшей проверки симметрии $SU(6)$ обнаружение таких резонансов оказывается весьма важным. Отметим, что в последнем процессе система $K^+ K^0$ может находиться в состояниях с $T = 0$ и $T = 1$. Однако одновременное изучение двух последних процессов позволит сделать заключение об изотопическом спине резонансов системы $K^+ K^0$.

Наряду с мезонными резонансами 2^+ и 0^+ рассматриваемые мультиплеты группы $SU(6)$ содержат также мезоны со спином и четностью 1^+ . Эти мезоны не могут распадаться на два псевдоскалярных мезона, а распадаются на три псевдоскалярных или псевдоскалярный и векторный мезоны. Существуют, конечно, также их электромагнитные распады на псевдоскалярный мезон и фотон. В данном случае фазовые объемы для электромагнитных распадов суще-

ственно больше фазовых объемов для распадов за счет сильных взаимодействий. Поэтому относительные вероятности электромагнитных распадов велики.

Укажем еще на одно преимущество экспериментального изучения радиационных распадов мезонов I^+ . Рассмотрим, например, распад некоторого мезона I^+ на псевдоскалярный и векторный мезоны. Матричный элемент этого распада зависит от двух констант и имеет вид

$$M(A \rightarrow VP) = g_1 \bar{V}_\mu(q_1) \bar{\varphi}(q_2) A_\mu(p) + g_2 \bar{V}_\mu(q_2) \bar{\varphi}(q_1) A_\mu(p) k_\mu k_\nu,$$

$$k = q_1 - q_2, \quad (66)$$

где $A_\mu(p)$, $V_\mu(q_1)$ и $\varphi(q_2)$ - волновые функции мезонов I^+ , I^- , 0^- с импульсами p , q_1 , q_2 и массами M , m_1 , m_2 , соответственно, а вероятность равна

$$W(A \rightarrow VP) = \frac{1}{48\pi M} \sqrt{1 - 2 \frac{m_1^2 + m_2^2}{M^2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{M^4}} \left\{ |g_1|^2 \left[2 + \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^2 m_1^2} \right] \right.$$

$$+ |g_2|^2 \left[M^2 - 2(m_1^2 + m_2^2) + \frac{(M^2 - 3m_1^2 - m_2^2)^2}{4m_1^2} \right] \left[M^2 - 2(m_1^2 + m_2^2) + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{M^2} \right]$$

$$+ 2 \operatorname{Re} g_1 g_2^* \left[M^2 - 2(m_1^2 + m_2^2) + \frac{(M^2 - 3m_1^2 - m_2^2)^2}{4m_1^2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{M^2} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{(M^2 - 3m_1^2 - m_2^2)(M^2 + m_1^2 - m_2^2)(m_1^2 - m_2^2)}{4M^2 m_1^2} \right] \right\}. \quad (67)$$

Из требования инвариантности относительно группы $SU(3)$ можно получить соотношения между константами g_1 и g_2 для различных распадов. Однако, поскольку кинематические коэффициенты при $|g_1|^2$, $|g_2|^2$ и $\operatorname{Re} g_1 g_2^*$ в выражении вероятности распада зависят сложным образом от масс частиц, то из соотношений между константами g_1 и g_2 для различных процессов нельзя получить простые соотношения между вероятностями. Дело обстоит совсем иначе в случае радиационных распадов мезонов I^+ на псевдоскалярные мезоны и фотоны. В силу калибровочной инвариантности матричный элемент каждого такого распада зависит от одной произвольной константы

$$M(A \rightarrow P\gamma) = g \bar{\varphi}(q) \bar{e}_\mu(k) \left[q_\mu A_\nu(p) k_\nu - A_\mu(p) (qk) \right]. \quad (68)$$

Вероятность равна

$$W(A \rightarrow P\gamma) = \frac{|g|^2}{96\pi} \frac{(M^2 - m^2)^3}{M^3}, \quad (69)$$

где M и m - массы мезонов I^+ и 0^- , соответственно. Таким образом, из соотношений между константами распада, вытекающих из унитарной симметрии, можно получить простые соотношения между вероятностями.

Формулы (63), (64) и (65) показывают, какие мультиплеты подгруппы $SU(3) \otimes SU(2)$ содержатся в рассматриваемых мультиплетах группы $SU(6)$. Однако, как было отмечено, цепь редукции $SU(6) \supset SU(3) \otimes SU(2)$ является нефизической, а физической оказывается цепь $SU(6) \supset SU(4) \otimes SU(2)$. Наблюдаемые частицы и резонансы должны принадлежать определенным неприводимым представлениям подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$. Как и в случае расщепления 35-плета группы $SU(6)$, многие состояния, принадлежащие неприводимым представлениям $SU(4) \otimes SU(2)$, являются суперпозицией состояний различных унитарных мультиплетов. Иначе говоря, здесь происходят процессы смешивания частиц из различных унитарных мультиплетов с одним и тем же спином. Сравнивая результаты цепей редукций $SU(6) \supset SU(3) \otimes SU(2)$ и $SU(6) \supset SU(4) \otimes SU(2)$, мы можем определить углы смешивания для этих состояний. Зная углы смешивания, можно получить массовые формулы для частиц с одним и тем же спином, а также соотношения между вероятностями распада частиц в рассматриваемых мультиплетах.

§ 2. Барийные резонансы

В главе III была предложена гипотеза о существовании октуплета барионов со спином и четностью $\frac{3}{2}^-$. Рассмотрим теперь вкратце возможность классификации этих частиц в симметрии $SU(6)$. Наименьшим мультиплетом группы $SU(6)$, содержащим этот унитарный мультиплет, является 70-плет, который расщепляется на следующие мультиплеты подгруппы $SU(3) \otimes SU(2)$

$$70 = (8,4) + (1,2) + (8,2) + (10,2) \quad (70)$$

Этот мультиплет описывается спинором третьего ранга $\Psi_{\{A\}B\{C\}}$ группы $SU(6)$. Здесь также происходит процесс смешивания между синглетом, октуплетом и декуплетом со спином $\frac{1}{2}$. Изучая расщепление 70-плета на мультиплеты подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$, мы можем определить углы смешивания и, следовательно, получить массовые формулы для частиц со спином $\frac{1}{2}$ в данном мультиплете группы $SU(6)$, а также получить соотношения между вероятностями распада этих частиц.

Литература:

1. F.Gursey and L.A.Radicati, Phys.Rev.Lett. 13, 173 (1964).
2. B.Sakita, Phys.Rev., 136, B1756 (1964).
3. A.Pais, Phys.Rev.Lett., 13, 175 (1964).
4. F.Gursey, A.Pais and L.A.Radicati, Phys.Rev.Lett., 13, 299 (1964).
5. M.A.Beg, B.W.Lee and A.Pais, Phys.Rev.Lett. 13, 514 (1964).
6. B.Sakita, Phys.Rev.Lett., 13, 643 (1964).
7. В.Г. Кадышевский, Р.М. Мурадян и Я.А. Смородинский, препринт ОИЯИ, Р-2061, 1965 год.
8. L.D.Soloviev, Phys.Lett. 16, 345 (1965).
9. V.V.Anisovich, A.A.Anselm, Ya.I.Azimov, G.S.Panilov, I.T.Dyatlov, Phys.Lett., 16, 194 (1965).
10. K.Johnson and S.B.Treiman, Phys.Rev.Lett., 14, 189 (1965).
11. С.М. Биленький, Ю.М. Казаринов, Л.И. Липидус и Р.М. Рындиц, Ядерная физика, 2, 762 (1965).
12. В.И. Захаров и И.В. Тютин, Ядерная физика 2, 918 (1965).
13. Б.В. Струминский, препринт ОИЯИ, Р-1939. 1965 г.
14. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Струминский и А.Н. Тавхелидзе, препринт ОИЯИ, Д-1968, 1965 .
15. Дао Вонг Дык и Фам Кун Ты, Ядерная физика, 2, 748 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
10 февраля 1966 г.