ЖВМ и МР, 1967, т. 7, N1, с 214-218

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2549

С.И. Сердюкова

РАВНОМЕРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ШЕСТИТОЧЕЧНОЙ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

1966

2549

С.И.Сердюкова

РАВНОМЕРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ШЕСТИТОЧЕЧНОЙ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Направлено в ЖВМ и МФ

В предлагаемой работе рассматривается разностный аналог задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} .$$

Рассматриваем шеститочечную схему повышенного порядка точности (см [1], стр. 137–138)

$$u_j^{n+1} - u_j^n - \frac{6\frac{r}{h^2} - 1}{12} \left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} \right) -$$

$$- \frac{6\frac{r}{h^2} + 1}{12} \left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n \right) = 0 \tag{1}$$

$$u_j^0 = r_j , \qquad |r_j| < c .$$

В этой работе доказана устойчивость (1) в равномерной метрике без какого–либо ограничения на соотношение между шагами сетки; предполагается, что

$$0 \leq \frac{r}{h^2} < \infty .$$

Аналогичный результат был получен мною в работе [2] для шеститочечной схемы более низкого порядка точности. Предлагаемый здесь метод является более простым по сравнению с [2]. Этот метод можно использовать для исследования схемы, рассмотренной в [2].

Для того чтобы схема (1) была устойчива в равномерной метрике, необходимо и достаточно, чтобы равномерно по n в метрике ℓ_1 была ограничена разностная функция Грина (1):

$$\Gamma_j^n = \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \frac{r}{h^2} \dfrac{6\sin^2\frac{\phi}{2}}{3 - \sin^2\frac{\phi}{2}}}{1 + \frac{r}{h^2} \dfrac{6\sin^2\frac{\phi}{2}}{3 - \sin^2\frac{\phi}{2}}} \right)^n \cos j\phi \, d\phi . \tag{2}$$

Основной результат статьи состоит в следующем.

Теорема. Для любого n и любого $\frac{r}{h^2}$ $(0 \le \frac{r}{h^2} < \infty)$ справедлива оценка:

$$\sum_j |\Gamma_j^n| \le 29.$$

Доказательство сводится к получению ряда оценок для Γ_j^n и последующему их суммированию. Основными являются ОЦЕНКИ 1-4. Они составляют содержание второй части работы. В первой части получены некоторые вспомогательные оценки.

Прежде всего проведем небольшое исследование характеристической функции (1):

$$f(\phi) = \frac{1 - \frac{r}{h^2}\dfrac{6\sin^2\frac{\phi}{2}}{3-\sin^2\frac{\phi}{2}}}{1 + \frac{r}{h^2}\dfrac{6\sin^2\frac{\phi}{2}}{3-\sin^2\frac{\phi}{2}}} .$$

Характеристическая функция $f(\phi)$ при $\frac{r}{h^2} \geq \frac{1}{3}$ обращается в нуль на отрезке $[0,\pi]$ в некоторой точке a . Пусть

$$c = \begin{cases} a & \text{при } \frac{r}{h^2} \ge \frac{1}{3}, \\ \pi & \text{при } \frac{r}{h^2} < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Тогда справедлива оценка: при $0 \le \phi \le c$

$$|f(\phi)| < \exp\left(-2\frac{r}{h^2}\frac{\phi^2}{\pi^2}\right). \tag{3}$$

Далее нам потребуются некоторые оценки для $(f^n(\phi))'$:

$$(f^n(\phi))' = -n\frac{r}{h^2}\,18\,\frac{\sin\phi}{(3-\sin^2\frac{\phi}{2})^2}\,\frac{1}{\left(1+\frac{r}{h^2}\dfrac{6\sin^2\frac{\phi}{2}}{3-\sin^2\frac{\phi}{2}}\right)^2}\,f^{n-1}(\phi). \tag{4}$$

Из (4) и (3) получаем оценку: при $0 \le \phi \le c$

$$|(f^n(\phi))'| \le n\frac{r}{h^2}\,\frac{9}{2}\,\phi\,|f^{n+1}(\phi)| < \sqrt{n\frac{r}{h^2}}\,\frac{9\pi}{4}\,e^{-1/2}. \tag{5}$$

Для того чтобы оценить $(f^n(\phi))'$ на $[c,\pi]$ в (3) делаем замену:

$$u = 1 + \frac{r}{h^2}\,\frac{6\sin^2\frac{\phi}{2}}{3-\sin^2\frac{\phi}{2}}.$$

Тогда $(f^n(\phi))'$ принимает вид:

$$(f^n(\phi))' = -n\frac{r}{h^2}\,\frac{18}{(3-\sin^2\frac{\phi}{2})^2u^2}\sqrt{\frac{12(u-1)}{6\frac{r}{h^2}+(u-1)} - \frac{36(u-1)^2}{(6\frac{r}{h^2}+(u-1))^2}}\;\left(\frac{2-u}{u}\right)^{n-1}.$$

Отсюда получаем оценку: при $c \le \phi \le \pi$, или при $2 \le u \le 1 + 3\frac{r}{h^2}$

$$|(f^n(\phi))'| \le n\sqrt{\frac{r}{h^2}}\,\frac{9}{\sqrt{2}} \max_{u \ge 2}\left(u^{-3/2}\left(\frac{u-2}{u}\right)^{n-1}\right) \le \sqrt{\frac{1}{n}\,\frac{r}{h^2}}\;\frac{27\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}. \qquad (6)$$

Переходим к основным оценкам.

ОЦЕНКА 1. При $n \ge 1$ справедлива оценка:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^c f^n(\phi)\cos j\phi\, d\phi\right| < ½\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(n\frac{r}{h^2}\right)^{-½}.$$

Эта оценка выводится с помощью вспомогательной оценки (3) следующей цепочкой неравенств:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^c f^n(\phi)\cos j\phi\, d\phi\right| < \frac{1}{\pi}\int_0^c \exp\left(-2n\frac{r}{h^2}\,\frac{\phi^2}{\pi^2}\right)d\phi <$$

$$< \int_0^\infty \exp\left(-2n\frac{r}{h^2}\phi^2\right)d\phi = ½\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(n\frac{r}{h^2}\right)^{-½}.$$

Для того чтобы получить две следующие оценки, представим Γ_j^n в другом виде. Интеграл в правой части (2) два раза интегрируем по частям. Внеинтегральные члены пропадают первый раз за счет $\sin j\phi$, второй раз – за счет $(f^n(\phi))'$, так что получаем:

$$\Gamma_j^n = -\frac{1}{\pi j^2}\int_0^\pi (f^n(\phi))''\cos j\phi\, d\phi. \qquad (7)$$

ОЦЕНКИ 2–3 относятся к частям интеграла (7) и получены с помощью следующей очевидной леммы.

Лемма. Пусть $f(\phi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$ и обращается в нуль на концах этого отрезка. Обозначим через N удвоенное число нулей $f'(\phi)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, которые одновременно не являются нулями $f(\phi)$. Тогда, если

$$M = \max_{\alpha \le \phi \le \beta} |f(\phi)|,$$

то справедлива оценка:

$$\int_\alpha^\beta |f'(\phi)|\, d\phi \le NM. \qquad (8)$$

При этом, если $f(\phi)$ не обращается в нуль на одном из концов отрезка интегрирования, то N в правой части (8) увеличивается на единицу.

ОЦЕНКА 2. При $n \ge 1$ справедлива оценка

$$\left|\frac{1}{\pi j^2}\int_0^c (f^n(\phi))''\cos j\phi\, d\phi\right| \le \frac{18}{j^2}e^{-½}\sqrt{n\frac{r}{h^2}}. \qquad (9)$$

Интеграл в левой части (9) допускает очевидную оценку:

$$\left| \frac{1}{\pi j^2} \int_0^c (f^n(\phi))'' \cos j\phi \; d\phi \right| < \frac{1}{\pi j^2} \int_0^c |(f^n(\phi))''| \, d\phi ,$$

последний интеграл оцениваем с помощью леммы; $|(f^n(\phi))''|$ оцениваем с помощью (5). При всех $n \geq 1$ $N \leq 8$.

ОЦЕНКА 3. При $n \geq 1$ справедлива оценка:

$$\left| \frac{1}{\pi j^2} \int_c^\pi (f^n(\phi))'' \cos j\phi \; d\phi \right| \leq \frac{27\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2}} \; \frac{1}{j^2} \sqrt{\frac{1}{n} \; \frac{r}{h^2}} .$$

Опять применяем лемму. $|(f^n(\phi))''|$ оценивается с помощью (5). При всех $n \geq 1$ $N \leq 8$.

ОЦЕНКА 4. При $n \geq 1$ справедлива оценка:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f^n(\phi) \cos j\phi \, d\phi \right| < \frac{4}{\pi} \sqrt{2n \frac{h^2}{r}} .$$

Доказательство этой оценки совершенно аналогично доказательству оценок 6, 7 в статье /2/.

Заметим, что при $n \geq 2$

$$\int_0^c f^n(\phi) \cos j\phi \; d\phi = \int_0^c (f^n(\phi))'' \frac{\cos j\phi}{j^2} \; d\phi ,$$

поэтому ОЦЕНКА 1 в равной степени относится к интегралу

$$\frac{1}{\pi j^2} \int_0^c (f^n(\phi))'' \cos j\phi \; d\phi .$$

Остается просуммировать полученные оценки. Так как $\Gamma_j^n = \Gamma_{-j}^n$ (см. (2)), имеем

$$\sum_j |\Gamma_j^n| < 2 \sum_{j \geq 0} |\Gamma_j^n| .$$

Далее производим разбиение:

$$\sum_{j \geq 0} |\Gamma_j^n| = \sum\nolimits_1 |\Gamma_j^n|_{0 \leq j \leq \gamma_1 \sqrt{\frac{1}{n} \frac{r}{h^2}}} + \sum\nolimits_2 |\Gamma_j^n|_{j > \gamma_1 \sqrt{\frac{1}{n} \frac{r}{h^2}}} .$$

Параметр γ_1 и другие параметры будут выбраны по окончанию процесса суммирования таким образом, чтобы окончательная оценка была как можно лучше.

ОЦЕНКА 4 сразу дает:

$$\Sigma_1 < \gamma_1 \frac{4}{\pi} \sqrt{2} \qquad \text{при} \quad n \geq 1 . \tag{10}$$

Чтобы оценить Σ_2, проводим еще одно разбиение:

$$\sum_{\substack{2 \\ j>\gamma_1\sqrt{\frac{1}{n}\frac{r}{h^2}}}} |\Gamma_j^n| < \sum_{\substack{2 \\ j>\gamma_1\sqrt{\frac{1}{n}\frac{r}{h^2}}}}' \left|\frac{1}{\pi}\int_0^c (f^n(\phi))'' \frac{\cos j\phi}{j^2} d\phi\right| +$$

$$+ \sum_{\substack{2 \\ j>\gamma_1\sqrt{\frac{1}{n}\frac{r}{h^2}}}}'' \left|\frac{1}{\pi}\int_c^\pi (f^n(\phi))'' \frac{\cos j\phi}{j^2} d\phi\right| .$$

ОЦЕНКА 3 дает

$$\sum_2'' < \frac{1}{\gamma_1}\frac{27\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2}} \qquad \text{при} \quad n \geq 1 . \tag{11}$$

ОЦЕНКА 2 позволяет полностью оценить $\sum_2'$ лишь при $n=1$, а именно, при $n=1$

$$\sum_2' \leq \frac{1}{\gamma_1} 18\, e^{-1/2} .$$

Учитывая эту оценку, а также оценки (10), (11), получаем:

$$\sum \leq 2\left(\sum_1 + \sum_2\right) \leq 2\left(\gamma_1 \frac{4}{\pi}\sqrt{2} + \frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{27\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2}} + 18\, e^{-1/2}\right)\right). \tag{12}$$

Выражение $(\gamma_1 a + \frac{1}{\gamma_1} b)$ принимает минимальное значение, равное $\sqrt{ab}$ при

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{b}{a}} .$$

Выбирая указанным образом γ_1 в (12), получаем окончательную оценку:

$$\sum = \sum_j |\Gamma_j^1| < 29 .$$

Вернемся к случаю $n \geq 2$. Здесь придется провести еще одно разбиение:

$$\sum_2' = \sum_{\gamma_1\sqrt{\frac{1}{n}\frac{r}{h^2}} < j \leq \gamma_2\sqrt{n\frac{r}{h^2}}} \tilde{\sum_2}' + \sum_{j>\gamma_2\sqrt{n\frac{r}{h^2}}} \tilde{\tilde{\sum_2}}' .$$

Применяя к $\tilde{\sum}_2'$ и $\tilde{\tilde{\sum}}_2'$ ОЦЕНКИ 1 и 2 соответственно, после последующего суммирования по j получаем: при $n \geq 2$

$$\sum_2' < \gamma_2 \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\gamma_2} 18\, e^{-1/2} ,$$

что совместно с (10) и (11) при соответствующем выборе параметров γ_1 и γ_2 дает оценку:

$$\sum = \sum_j |\Gamma_j^n| < 29 \qquad \text{при} \quad n \geq 2 .$$

Теорема доказана.

Литература

1. В.Вазов, Дж. Форсайт. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ, 1963.

2. С.И.Сердюкова. Равномерная устойчивость по начальным данным шеститочечной симметричной схемы для уравнения теплопроводности. Вычислительная математика и математическая физика. М., изд. "Наука", 212-216, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 января 1966 г.