

T-243

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2543



Г. Тахтамышев

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СПЕКТРОВ
НЕОДНОЗНАЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ВЕЛИЧИН

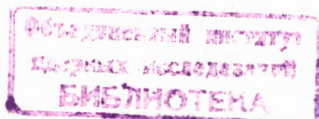
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1966

3962/3 48-

Г. Тахтамышев

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СПЕКТРОВ
НЕОДНОЗНАЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ВЕЛИЧИН



В настоящей работе предлагается один из возможных способов построения гистограммы некоторой величины x в том случае, когда эта величина не может быть определена однозначным образом.

Рассмотрим следующий пример. Требуется построить гистограмму величины x ; в эксперименте же измеряются некие другие величины a , b , c , связанные с первой соотношением

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (1)$$

Тогда каждому измерению a_i , b_i , c_i будут соответствовать, вообще говоря, два значения величины x , одно из которых является истинным (x_i^H), а второе - ложным (x_i^L).

Принцип решения основан на том, что для данного распределения истинных значений $\rho_1(x^H) dx^H$ можно построить распределение ложных значений $\rho_2(x^L) dx^L$, т.е. спектр, получающийся в эксперименте и содержащий как истинные, так и ложные значения, будет связан со спектром истинных значений некоторыми соотношениями.

В данном случае способ применяется для построения спектра энергий K_2^0 -мезонов, выводящихся под углом 90° от внутренней мишени синхрофазотрона ОИЯИ. В камере Вильсона наблюдались заряженные продукты трехчастичного распада



и определялись их импульсы (по кривизне траектории в магнитном поле).

Для получения энергии K_2^0 -мезона используем законы сохранения энергии и импульса:

$$E_K = E_c + E_0$$

$$p_0^2 = p_K^2 + p_c^2 - 2p_K p_c \cos \theta, \quad (2)$$

где E_K и p_K - энергия и импульс K_2^0 -мезона, E_c , p_c - энергия и импульс

нейтральной частицы, $E_0 = E_+ + E_-$, $p_0 = |\vec{p}_+ + \vec{p}_-|$ - суммарная энергия и суммарный импульс двух заряженных частиц, θ - угол между направлением K_2^0 -мезона и суммарным импульсом заряженных частиц.

Используя соотношения между энергией и импульсом:

$$E_K^2 = p_K^2 + M_K^2, \quad E_0^2 = p_0^2 + m_0^2, \quad (3)$$

получаем для E_K уравнение:

$$a E_K^2 + b E_K + c = 0, \quad (4)$$

где

$$a = E_0^2 - p_0^2 \cos^2 \theta$$

$$b = -E_0 (M_K^2 - m_0^2 + E_0^2 - p_0^2). \quad (5)$$

$$c = \frac{(M_K^2 - m_0^2 + E_0^2 - p_0^2)}{4} + M_K^2 p_0^2 \cos^2 \theta.$$

Уравнение (4) имеет два решения, ни одним из которых нельзя пренебречь. Для построения спектра истинных значений энергии нужно найти распределение вероятностей ложных значений $E_K^{\text{л}}$ при данном истинном $E_K^{\text{н}}$: $G(E_K^{\text{л}}, E_K^{\text{н}}) dE_K^{\text{л}}$. Физически это соответствует случаю распада моноэнергетических K_2^0 -мезонов ($E = E_0$). Однако и в этом случае ур. (4) имеет два решения, одно из которых E_0 , а спектр вторых значений реализует искомую функцию $G(E_K^{\text{л}}, E_0)$.

Рассмотрим вначале дискретный случай (как более простой). Всю область энергий (от $E = 0$ до $E = E_{\text{max}}$) разбиваем на m интервалов. Введем следующие обозначения:

$A = \{a_{ik}\}$ - экспериментальная гистограмма, включающая оба решения уравнения (4)^х;

$N = \{n_i\}$ - искомая гистограмма только истинных значений;

$G = \{g_{ik}\}$ - вероятность того, что ложное значение лежит в i -м интервале, при истинном, лежащем в k -м интервале.

Для получения матрицы G применялся метод Монте-Карло: моделировались распады (*) при определенной энергии K_2^0 -мезона $E_K^{\text{н}}$ и для данного распада

^х) Если решение уравнения (4) дает значения, лежащие в j -м, k -м интервалах, то единица заносится одновременно в клетки a_{jk} и a_{kj} . Возможен другой способ - единица заносится в клетку a_{jk} при $j < k$ и в клетку a_{kj} при $k < j$. Тогда матрица A будет треугольной и изменится вид уравнения (7).

вычислялись коэффициенты a , b , c (уравнение (5)), после чего должное значение энергии находилось (согласно теореме Визета) по формуле:

$$E^N = -\frac{b}{a} - E^M. \quad (6)$$

Очевидно, что должно выполняться соотношение:

$$a_{ik} = g_{ik} n_k + g_{ki} n_i \quad (i, k = 1, \dots, m). \quad (7)$$

Действительно, в двумерную экспериментальную гистограмму A , в клетку с координатами i и k события попадают в том случае, когда истинное значение лежит в k -интервале, которых там n_k штук, а ложное - в i -м (вероятность чего равна g_{ik}) и наоборот - истинное в i -м (n_i штук), а ложное в k -м (вероятность g_{ki}). Если представить N в виде матрицы $m \times m$, у которой по диагонали стоят элементы n_1, \dots, n_m , а на остальных местах нули, то уравнение (7) можно представить в матричном виде:

$$A = N G + G^T N. \quad (8)$$

Мы видим, что для нахождения m чисел n_1, \dots, n_m имеется m^2 уравнений (7), т.е. система явно переопределенная. Для решения такой системы мы применяли метод наибольшего правдоподобия^{/1/}. Поскольку статистика в матрице A была небольшая, мы предполагали, что флуктуации распределены по Пуассону (а не по Гауссу); в этом случае для выбранного спектра N вероятность реализации матрицы A равна

$$W = \prod_{i,k} \frac{\exp[-g_{ik} n_k - g_{ki} n_i] (g_{ik} n_k + g_{ki} n_i)^{a_{ik}}}{a_{ik}!}. \quad (9)$$

Задача заключается в подборе n_j , дающих максимальное значение W . Как обычно, это эквивалентно приравниванию нулю производных $\frac{\partial \ln W}{\partial n_j}$, что дает

$$\sum_k g_{jk} \left(\frac{a_{jk}}{g_{jk} n_k + g_{kj} n_j} - 1 \right) = 0 \quad (j = 1, \dots, m). \quad (10)$$

Мы получили систему m уравнений с m неизвестными.

Гистограмма для кинетической энергии K_2^0 -мезонов строилась на отрезке от 0 до 500 Мэв, разбитом на 10 интервалов по 50 Мэв. На рис. 1 приведена матрица A (левая верхняя клетка соответствует интервалу 0-50 Мэв).

На рис. 2 представлена матрица G . i -й столбец этой матрицы дает распределение вероятностей ложного значения энергии при истинном, лежащем в i -м интервале.

Поскольку решать систему уравнения (10) в общем виде не представляется возможным, расчет проводился на ЭВМ М-20 с использованием стандартной подпрограммы "Метод наименьших квадратов" /2/ (СП-123). Решение показано на рис. 3. Отрицательное значение в предпоследнем интервале и выброс в последнем показывают, что вкладом этих интервалов в гистограмму можно пренебречь.

Этот метод можно применять и для аппроксимации спектра функций некоторого заданного типа (с несколькими параметрами). Например, мы могли бы искать наш спектр в виде:

$$N(E) dE = A E^{\alpha} e^{-\beta E} dE \quad (11)$$

и подбирать параметры α и β тем же методом наибольшего (параметр A при данных α и β фиксирован условием нормировки). Функция правдоподобия в этом случае имеет тот же вид (8), но α уже не являются независимыми параметрами, а функциями величины E и условие максимума заключается в приравнивании нулю производных по параметрам этой функции

$$\left(\frac{\partial \ln W}{\partial \alpha} = \frac{\partial \ln W}{\partial \beta} = 0 \right).$$

Считаю приятным долгом поблагодарить Д.М. Котляревского и Э.О. Ожонва за стимулирующие обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. Н.П. Клепиков, С.Н. Соколов. "Анализ экспериментальных данных методом максимума правдоподобия", Дубна, 1958.
2. С.Н. Соколов, И.Н. Силян. "Нахождение минимумов функционалов методом линеаризации", Дубна, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 января 1968 года.

10	31	22	18	8	3	1	1	0	0
31	2	10	10	16	12	6	3	1	0
22	10	10	7	7	5	5	2	3	2
18	10	7	6	2	7	2	3	1	1
8	16	7	2	0	1	1	1	0	1
3	12	5	7	1	0	1	1	0	2
1	6	5	2	1	1	0	1	0	1
1	3	2	3	1	1	1	0	0	0
0	1	3	1	0	0	0	0	0	1
0	0	2	1	1	2	1	0	1	0

Рис. 1. Матрица A . 10 строк матрицы соответствуют 10-ти интервалам по 50 Мэв. Левая верхняя клетка соответствует интервалу 0-50 Мэв, правая нижняя - 450 - 500 Мэв.

424	278	186	164	79	60	41	18	8	0
228	232	176	158	148	104	81	70	59	38
148	159	180	163	130	132	106	94	85	88
97	120	133	117	152	127	120	112	110	95
54	88	96	116	125	147	123	130	123	105
28	48	63	87	107	118	124	134	127	125
15	32	71	61	90	96	125	137	144	143
7	18	40	58	67	83	117	109	126	126
1	17	31	47	48	80	87	110	121	149
0	8	24	29	54	53	76	86	97	131

Рис. 2. Матрица G , полученная моделированием распадов $K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$. Энергия, как и в предыдущей гистограмме, возрастает слева направо и сверху вниз.

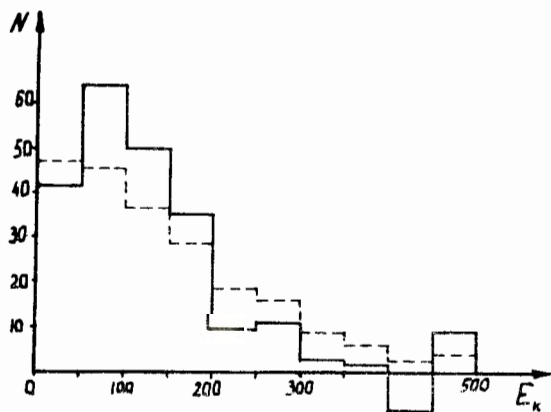


Рис. 3. Решение системы уравнений (10). Пунктиром показана гистограмма обих (истинного и ложного) значений.