

0-756

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2535



Г.А. Ососков, И.И. Шелонцев

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ПАМЯТИ
В СИСТЕМЕ РЕГИСТРАЦИИ
С ГРУППОВЫМ ПРИБЫТИЕМ СИГНАЛОВ

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

1966

2585

Г.А. Ососков, И.И. Шелонцев

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ПАМЯТИ
В СИСТЕМЕ РЕГИСТРАЦИИ
С ГРУППОВЫМ ПРИБЫТИЕМ СИГНАЛОВ



3965/3 48.

Во избежание потерь в системах, регистрирующих сигналы от источников, регулярно посылающих случайные группы сигналов, необходимо буферное устройство - промежуточная память (ПП), позволяющая быстро запомнить группу сигналов, чтобы в отрезок времени до появления следующей группы передать их в медленнодействующую основную память (ОП) регистрирующей системы.

В работе ^{1/} рассматривалась задача о выборе оптимального соотношения между объемом ПП и скоростью передачи сигналов в ОП. Эта задача в идеализированной математической постановке выглядит следующим образом.

Из импульсного источника сигналов через единицу времени одновременно приходят группы сигналов. Числа сигналов в каждой i -й группе ν_i ($i = 1, 2, \dots$) случайны, независимы и распределены по закону

$$P \{ \nu_i = k \} = w_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

т.е. с вероятностью w_k в i -й группе будет k сигналов. Среднее число сигналов в группе равно

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} k w_k. \quad (2)$$

Промежуточная память имеет конечный объем m и за единицу времени передает в ОП s сигналов, если сумма сигналов, оставшихся в ПП от предыдущей группы и вновь прибывших, превысит m , то "лишние" теряются. Будем еще предполагать, что справедливо условие

$$\lambda \leq s \leq m. \quad (3)$$

Для снижения вероятности потерь необходимо увеличение m или s . Поскольку и то, и другое требует определенных затрат, возникает задача о нахождении оптимального соотношения m и s . Обычно тот или иной параметр фиксирован и при известном λ отыскивается величина другого, дающая заданный малый уровень вероятности $P_\lambda(m, s)$ переполнения ПП.

На практике часто бывает достаточно, чтобы при заданном λ не была большой относительная средняя величина просчета $Q_\lambda(m, s)$, т.е. математическое ожидание

отношения числа сигналов, потерянных при переполнении ПП к их общему числу.

В /1/ задача решалась методом Монте-Карло для частного случая, когда распределение (1) являлось пуассоновским, т.е.

$$w_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

В настоящей работе излагается общее аналитическое решение задачи. Конкретные расчеты на ЭВМ проводились для интересного в практических приложениях пуассоновского случая. Приведена программа для решения получившейся системы линейных уравнений и результаты расчетов, совпадающие с результатами, полученными методом статистических испытаний в /1/, в пределах точности, даваемой этим методом.

Отметим, что основным преимуществом аналитического решения по сравнению с методом Монте-Карло в данной задаче является многократное сокращение времени счета на ЭВМ, необходимого для достижения заданной точности результатов.

2.

По терминологии, установившейся в математической теории массового обслуживания, мы имеем систему с постоянным временем обслуживания $\tau = 1/\mu$ и ограниченной очередью.

Будем обозначать момент поступления i -й группы сигналов через t_i ($t_i - t_{i-1} = 1$; $i = 1, 2, \dots$) и рассмотрим последовательность случайных величин ξ_i - число сигналов, находившихся в ПП в момент $t_{i+1} - 0$. Величина ξ_i полностью определяется содержанием ПП в момент t_i , т.е. суммой $\xi_{i-1} + \nu_i$ и скоростью s передачи сигналов в ОП.

Если вспомнить об ограниченной емкости m промежуточной памяти и учесть, что ПП может опустеть до момента $t_i - 0$, то для ξ_i получаем следующую рекуррентную формулу:

$$\xi_i = \max \{ 0; \min (\xi_{i-1} + \nu_i; m) - s \}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

ξ_i может принимать любые целочисленные значения от 0 до $m - s$. Относительно ξ_0 естественно предположить, что $\xi_0 = 0$. Определенная так последовательность $\{\xi_i\}$ является, таким образом, простой, однородной цепью Маркова с конечным числом $m + 1 - s$ состояний.

(1) Подсчитаем матрицу M переходных вероятностей для этой цепи. Обозначим P_{kj} вероятность перехода из состояния k в состояние

j ($k, j = 0, 1, \dots, m - s$), т.е. вероятность того, что $\xi_{i+1} = j$ при условии $\xi_i = k$.

При $0 < j < m - s$ для перехода к событию $\xi_{i+1} = j$, если $\xi_i = k$, необходимо, чтобы в момент t_i в ПП поступило $(j - k) + s$ сигналов, s из которых до момента $t_{i+1} = 0$ перейдут в ОП. Согласно (1), вероятность поступления $j + s - k$ сигналов при $k \leq j + s$ равна w_{j+s-k} . При $k > j + s$ переход из k -го состояния в j -е невозможен, т.е. $P_{kj}^{(i)} = 0$.

Определение переходных вероятностей для $j = m - s$ и $j = 0$ проводится аналогично. Учет ограничения емкости ПП дает, что $\xi_{i+1} = m + s$ только тогда, когда в момент t_i приходит не менее $m - k$ сигналов, вероятность чего равна $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$. Для $\xi_{i+1} = 0$ достаточно, чтобы в момент t_i пришло не более $s - k$ сигналов (вероятность этого равна $\sum_{n=0}^{s-k} w_n$).

Таким образом, вводя обозначение

$$w_k = \begin{cases} w_k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (8)$$

получаем следующую формулу, описывающую все элементы матрицы переходных вероятностей

$$P_{kj} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{s-k} w_n, & j = 0 \\ w_{i+s-k}, & 0 < j < m - s \\ \sum_{n=m-k}^{\infty} w_n, & j = m - s \end{cases} \quad (7)$$

$k=0, 1, \dots, m-s$

Как и следовало ожидать, переходные вероятности не зависят от i (цепь однородная).

Из формул (8) мы видим, что матрица M является стохастической, т.е. $P_{kj} \geq 0$, каждый столбец содержит хоть один элемент, отличный от нуля, и для каждого k ($k = 0, 1, \dots, m-s$)

$$\sum_j P_{kj} = 1.$$

Обозначим безусловные вероятности пребывания в j -м состоянии на i -м шагу через $F_j^{(i)}$, а вектор с координатами $F_j^{(i)}$ ($0 \leq j \leq m-s$) через $P^{(i)}$. Тогда

$$P^{(i)} = M P^{(i-1)} \quad (8)$$

Применяя формулу (8) многократно, получим распределение вероятностей пребывания системы в любом из состояний на каждом шагу

$$P^{(i)} = M^i P^{(0)} \quad (9)$$

Таким образом, знание M и $P^{(0)}$ дает нам полное описание системы. Относительно $P^{(0)}$ разумно предположить, что в начале процесса промежуточная память была пуста, т.е.

$$P_j^{(0)} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m-s); P_0^{(0)} = 1.$$

Для наших целей естественно исследовать вопрос, настанет ли для рассматриваемой системы с течением времени такое установившееся состояние, когда распределение вероятностей $P^{(i)}$ перестанет изменяться, не будет зависеть от i .

Цепи, для которых с течением времени, т.е. при $i \rightarrow \infty$, имеет место такое явление, называются регулярными, а предельное распределение P — финальным. Известно, что необходимым и достаточным условием регулярности является требование, чтобы все возможные состояния цепи составляли один существенный класс, т.е. с положительной вероятностью за конечное число шагов был возможен переход из любого состояния k в любое состояние j и обратно (см., например, /2/ § 10).

Из формул (6) следует, что это условие выполняется в нашем случае, и нам предоставляется возможность вместо исследования системы для определения вероятности переполнения на каждом шагу i сделать это один раз в установившемся состоянии.

Составляющие P_j ($j=0, 1, \dots, m-s$) финального вектора P можно определить с помощью уравнения (8), переходя в нем к пределу при $i \rightarrow \infty$.

Если выписать получившееся уравнение как систему для финальных вероятностей P_j и заменить в ней последнее уравнение условием нормировки $\sum_j P_j = 1$, то получим следующую систему $m+1-s$ уравнений

$$\begin{aligned} P_0 &= \sum_{k=0}^{m-s} (P_k \sum_{n=0}^{s-k} W_n) \\ P_j &= \sum_{k=0}^{m-s} P_k W_{s+j-k} \quad (1 < j < m-s). \\ \sum_{k=0}^{m-s} P_k &= 1 \end{aligned} \quad (10)$$

С помощью полученных после решения системы (10) финальных вероятностей P_j ($j=0, 1, \dots, m-s$) легко подсчитываются искомые величины $P_\lambda(m, s)$ и $Q_\lambda(m, s)$.

Переполнение промежуточной памяти происходит, если при наличии в ней k ($0 \leq k \leq m-s$) сигналов в нее поступает более, чем $m-k$ сигналов. Таким образом, по формуле полной вероятности получаем вероятность переполнения ПП

$$P_\lambda(m, s) = \sum_{k=0}^{m-s} (P_k \sum_{n=m-k+1}^{\infty} W_n). \quad (11)$$

Вероятность потери n сигналов при переполнении ПП равна

$$\sum_{k=0}^{m-s} P_k W_{m+n-k}.$$

Отсюда находим среднюю относительную величину числа потерянных сигналов

$$Q_{\lambda}(m, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\lambda} \right) \sum_{k=0}^{m-s} P_k W_{m+n-k}$$

или после некоторых преобразований

$$Q_{\lambda}(m, s) = \sum_{k=0}^{m-s} P_k \left[W_{m-k} + \left(1 - \frac{m-k}{\lambda} \right) \sum_{n=m-k+1}^{\infty} W_n \right]. \quad (12)$$

В случае $s \geq m$, когда все сигналы, поступившие в ПП, успевают быть переданными, ПП всегда бывает пуста перед поступлением очередной группы сигналов, т.е.

$$P_0 = 1, \quad P_1 = P_2 = \dots = P_{m-s} = 0.$$

В этом случае $P_{\lambda}(m, s)$ и $Q_{\lambda}(m, s)$ не меняются с ростом s , и формулы для них приобретают особенно простой вид

$$P_{\lambda}(m) = \sum_{n=m+1}^{\infty} w_n \quad (13)$$

$$Q_{\lambda}(m) = w_m + \left(1 - \frac{m}{\lambda} \right) \sum_{n=m+1}^{\infty} w_n. \quad (14)$$

III.

Расчет величины $P_{\lambda}(m, s)$ и $Q_{\lambda}(m, s)$ проводился для w_k вида (4). Для параметра λ было взято 10 значений:

$$2, 3, 5, 7, 10, 15, 20, 30, 40, 50.$$

Система (10) решалась путем построения обратной матрицы методом Жордана с выбором главного элемента ^{/3/}. В библиотеке стандартных программ М-20 имеется СП, реализующая этот метод ^{/4/}.

Результаты расчета $P_{\lambda}(m, s)$ и $Q_{\lambda}(m, s)$ приведены на рис. 1-10. Описание программы дано в приложении.

IV.

В заключение следует отметить, что идеализированная постановка задачи, рассматриваемой в настоящей работе, является лишь первым приближением к реальной ситуации, когда сигналы поступают на вход промежуточной памяти не мгновенно, а в течение некоторого промежутка времени, называемого периодом регистрации. На протяжении этого промежутка интенсивность потока поступающих сигналов спадает, для

промежутка может быть в некоторых случаях сравнимой с периодом импульсного источника сигналов, так что за период регистрации часть сигналов может быть передана в основную память системы.

В связи с этим реальный объем промежуточной памяти при сохранении выбранного уровня надежности работы системы может быть взят несколько меньшим, чем это следует из приводимых таблиц, которые, таким образом, дают для m оценку сверху.

Тем не менее применяемый нами метод расчета с использованием аппарата цепей Маркова будет, по-видимому, полезным и при решении общей задачи.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Вначале для заданного λ вычислялись таблицы

$$w_k = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$v_k = \sum_{i=0}^k w_i$$

$$w_0 = \exp[-\lambda];$$

$$w_k = w_{k-1} \frac{\lambda}{k}$$

$$k = 1, 2, \dots, 120$$

$$v_0 = w_0;$$

$$v_k = v_{k-1} + w_k$$

Для больших λ , $\lambda > 42$, когда для малых k $w_k < 10^{-19}$ (машинный нуль), вычисления w_k велись несколько по-иному:

$$r_0 = -\lambda;$$

$$r_k = r_{k-1} + \ell \ln \lambda - \ell \ln k$$

$$w_0 = \exp[r_0];$$

$$w_k = \exp[r_k]$$

Когда в программе требовалось w_k и v_k , то они находились из таблиц, причем при $k < 0$ $w_k = v_k = 0$.

Далее следовали два вложенных друг в друга цикла:

по m ; $m_0 = \lambda + 1$ с шагом 1 до ℓ ($\ell = 20$)

по s ; $s_0 = \lambda$ шаг 1 до m .

По текущим s и m строится матрица порядка m ; $m - 1 = m - s'$.

Вектор правых частей всегда одинаков $\bar{b} = (1, 0, 0, \dots, 0)$.

В матрице первая и вторая строки отличаются по внешнему виду от остальных, поэтому они строятся особыми блоками. Из элементов главной диагонали (кроме первого элемента первой строки) вычитались единицы.

Общий вид матрицы

| №№ строк и столбцов | 1 | 2 | 3 | ... | n + 1 | Вектор \bar{b} |
|---------------------------|-------------|----------------|----------------|-----|----------------|---------------------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | ... | 1 | 1 |
| 2 | V_s | V_{s-1}^{-1} | V_{s-2} | ... | V_{s-n} | 0 |
| 3 | W_{s+1} | W_s | W_{s-1}^{-1} | ... | W_{s-n+1} | 0 |
| | | | | | | |
| n+1 | W_{s+n-1} | W_{s+n-2} | W_{s+n-3} | ... | W_{s-1}^{-1} | 0 |

Напомним, что индекс W и V должен быть положительным или равным 0, если он был отрицательным, то существующий элемент равен нулю.

Вектор решения \bar{P} использовался в дальнейшем при подсчете $P_\lambda(m,s)$ и $Q_\lambda(m,s)$. На печать выдавались (для заданного λ) m,s,P,Q .

Л и т е р а т у р а

1. Г.И.Забянки, Г.А.Ососков. Особенности многоканальных регистрирующих устройств с промежуточной памятью при импульсном режиме работы. ПТЭ, № 6, 1963, 73-77.
2. Т.А.Сарымсаков, Основы теории процессов Маркова. ГИТТЛ, Москва, 1954.
3. Д.К.Фаддеев, В.Н.Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, Москва, 1960.
4. Библиотека стандартных программ, ЦБТИ, Москва, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 января 1966 г.

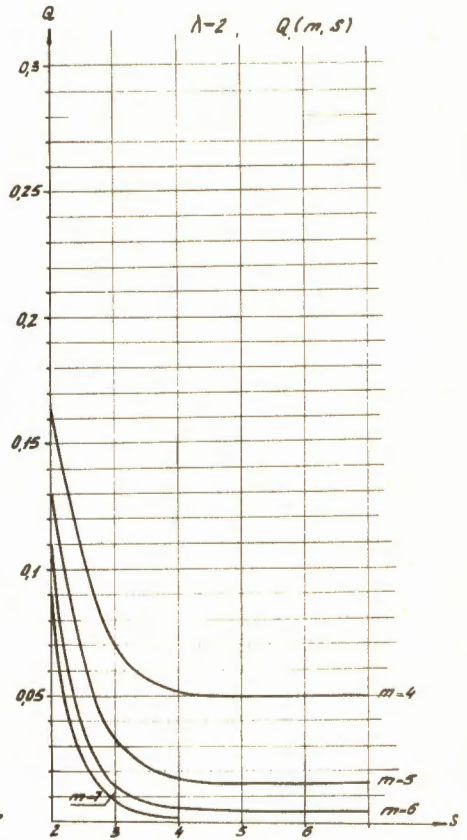
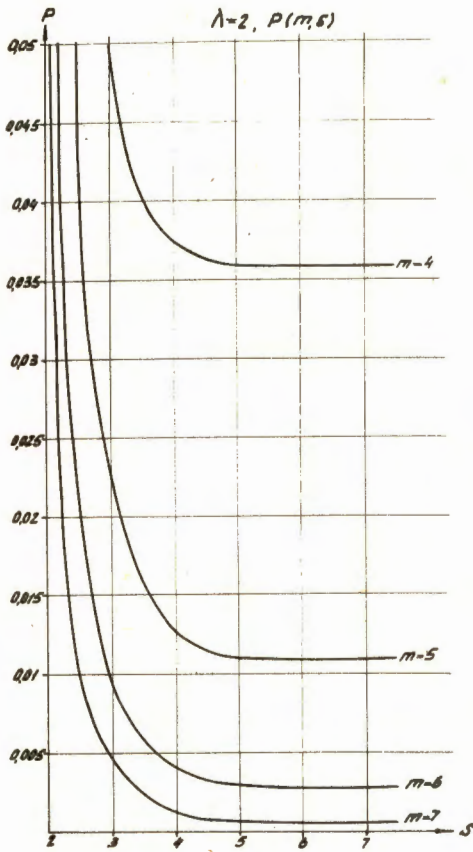


Рис. 1.

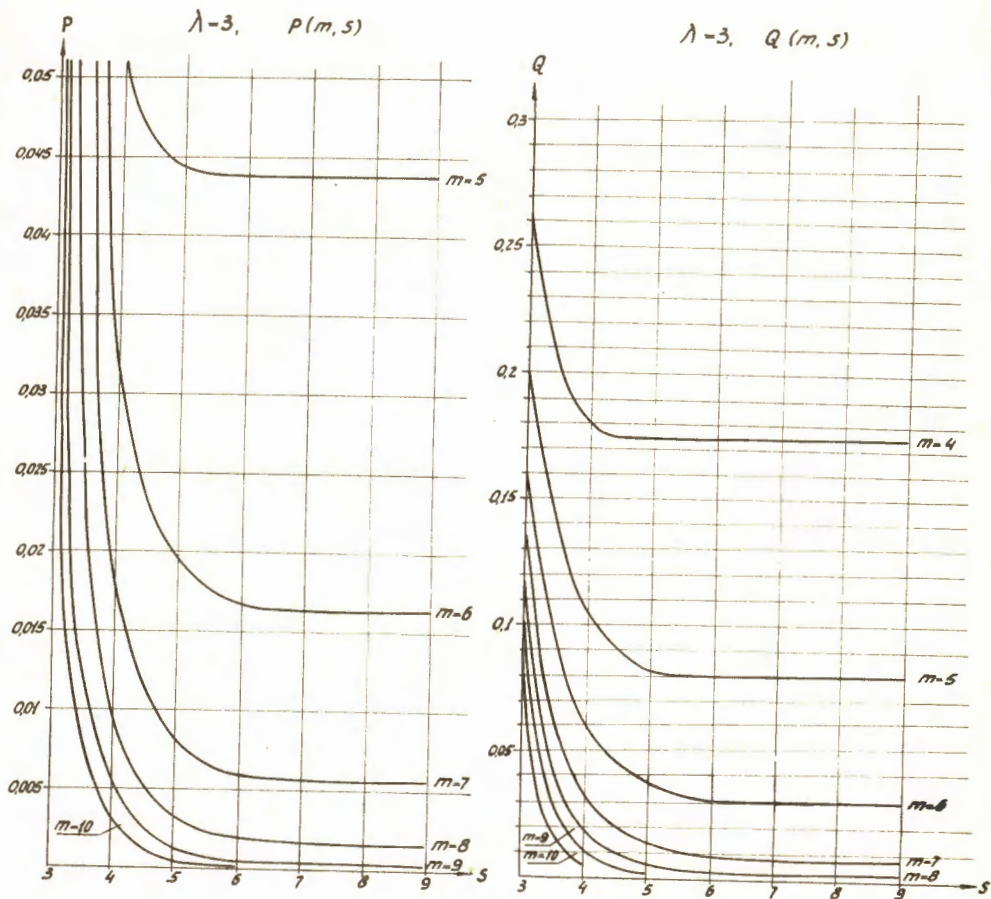


Рис. 2.

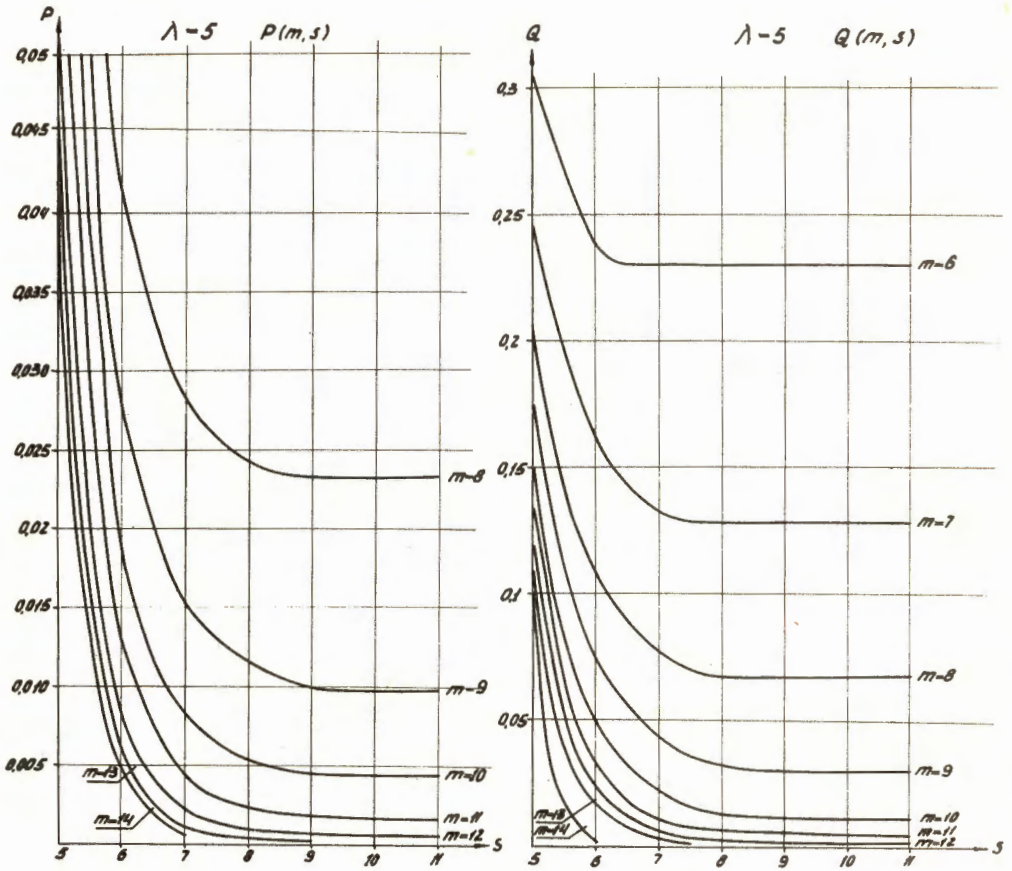


Рис. 3.

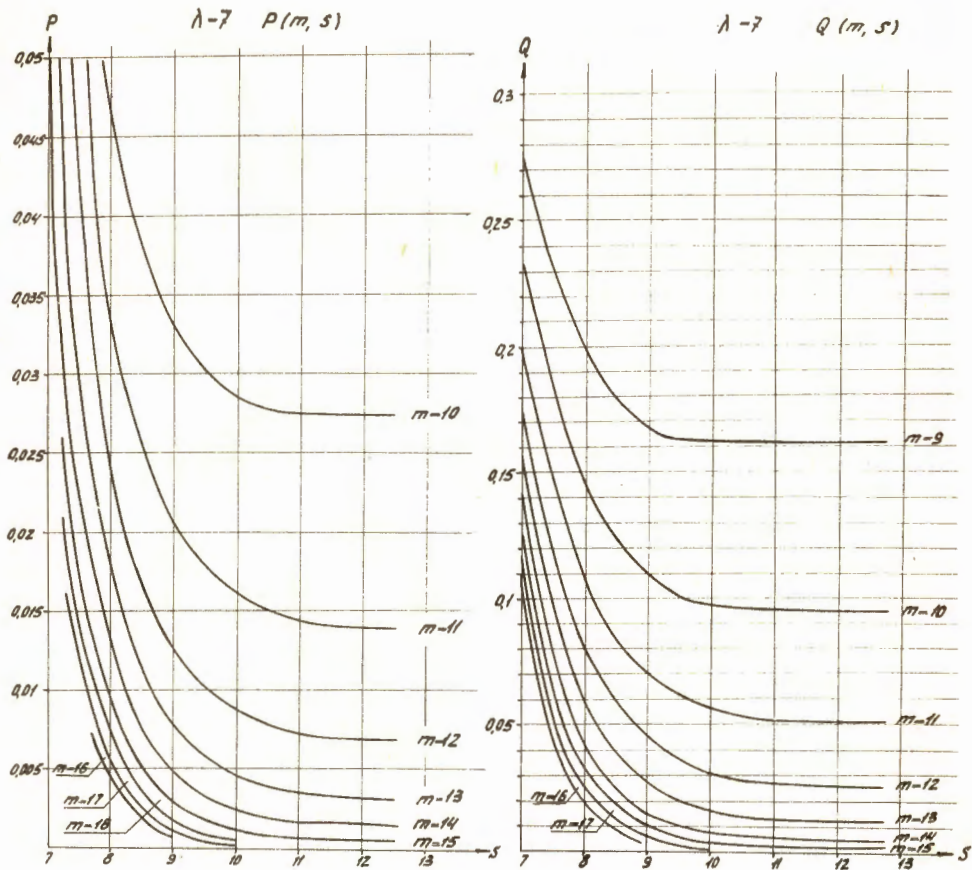


Рис. 4.

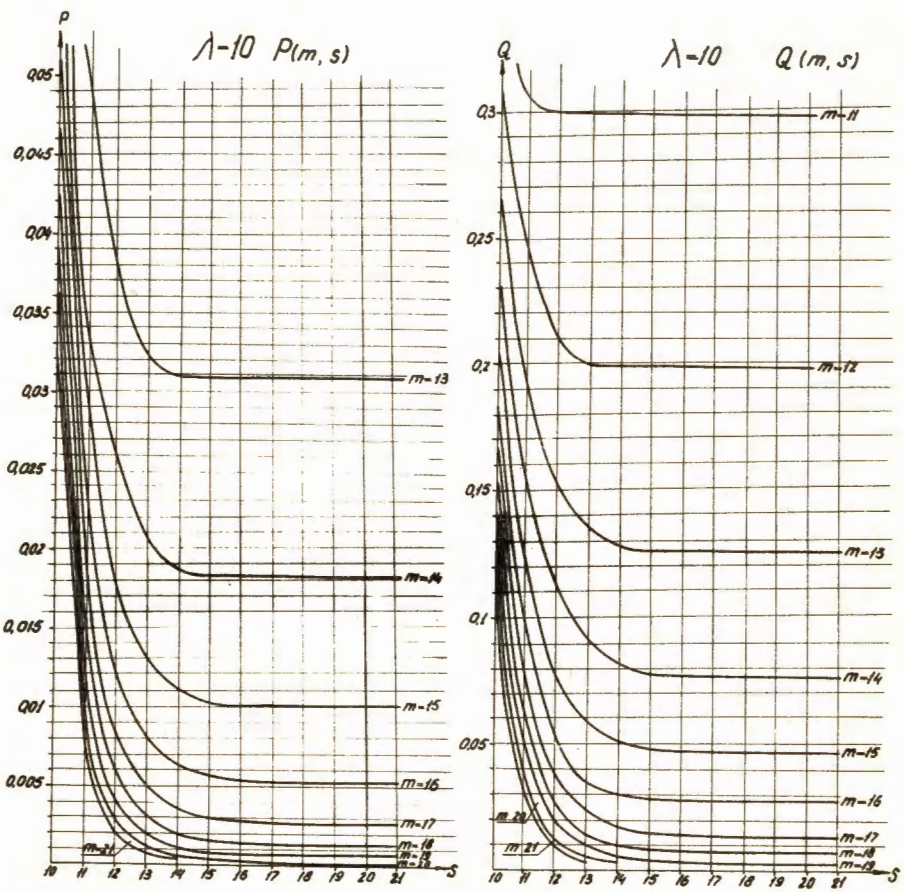


Рис. 5.

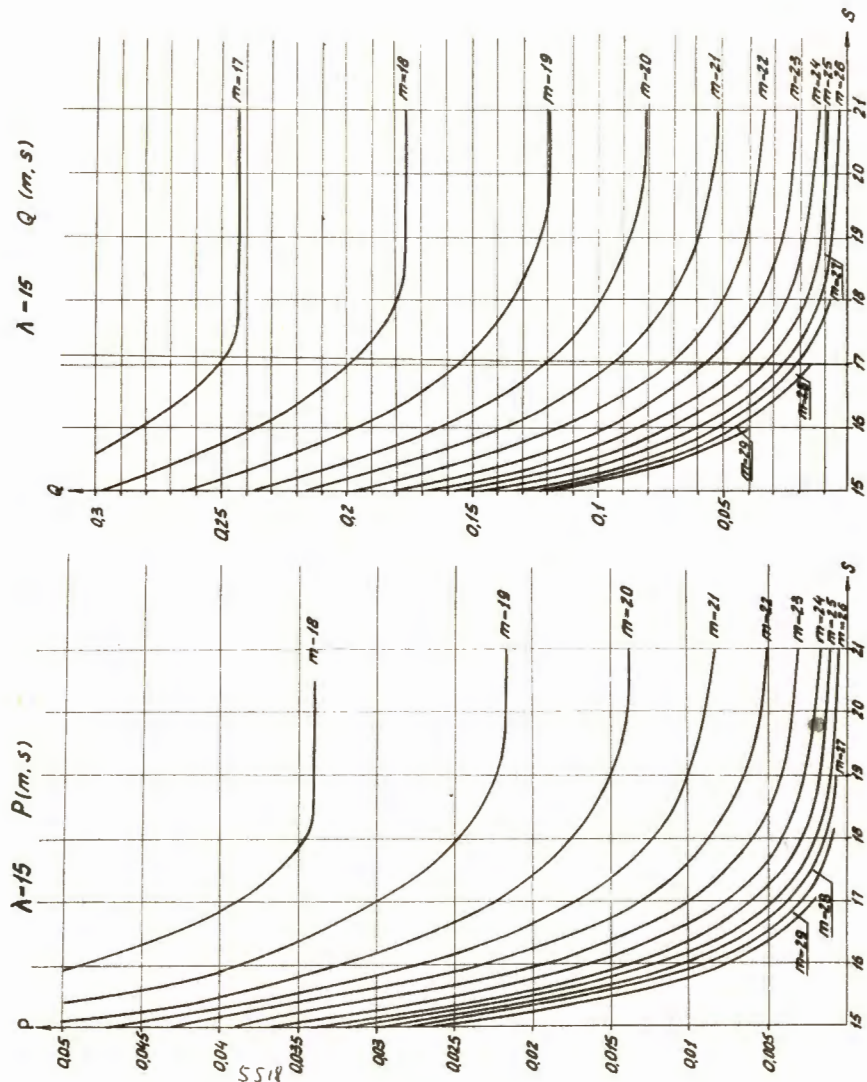


Рис. 6.

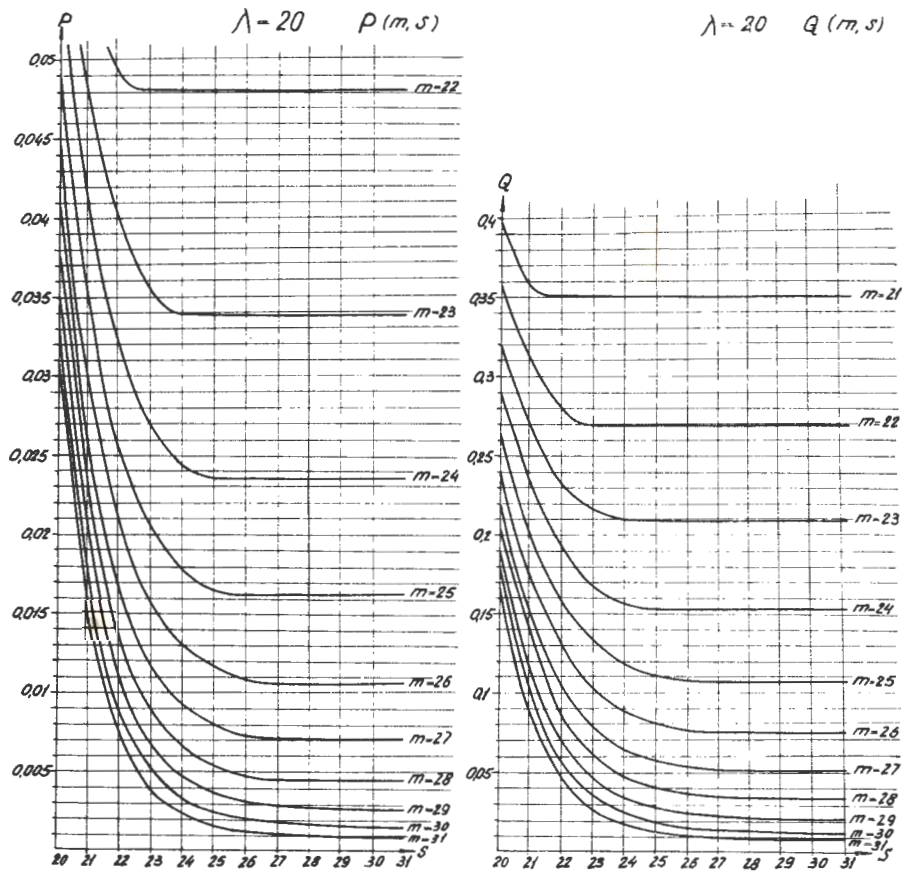


Рис. 7.

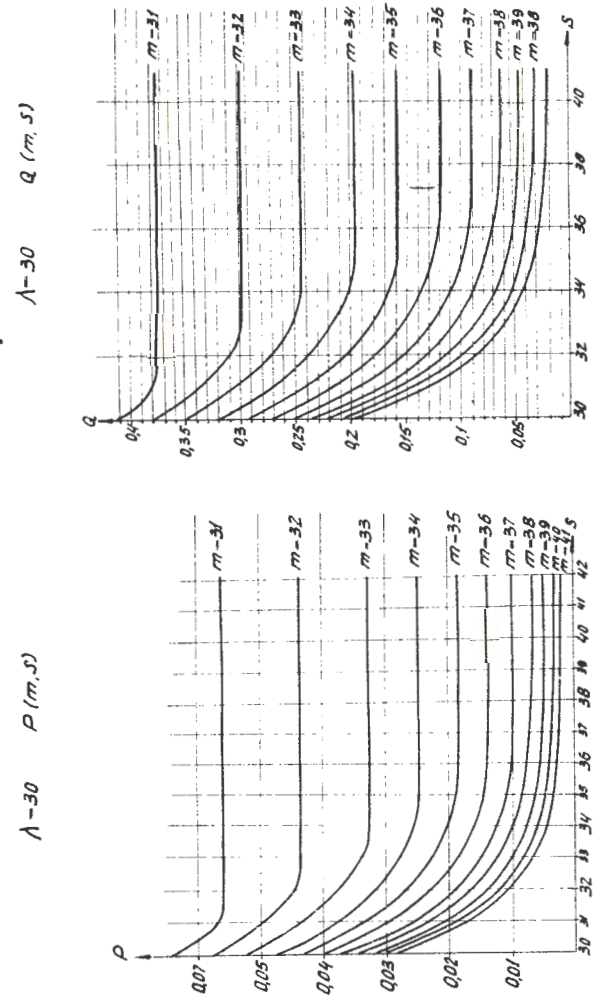
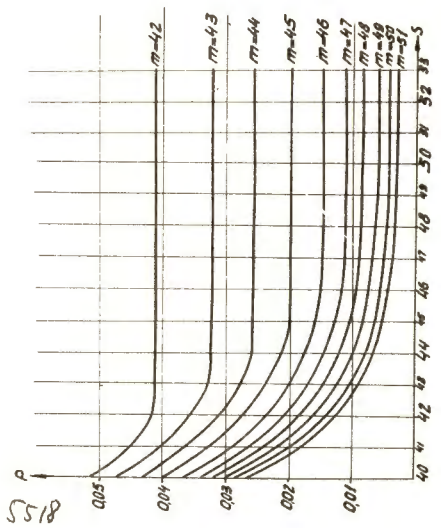


Рис. 8.

$\lambda=40$ $P(m, s)$



$\lambda=40$ $Q(m, s)$

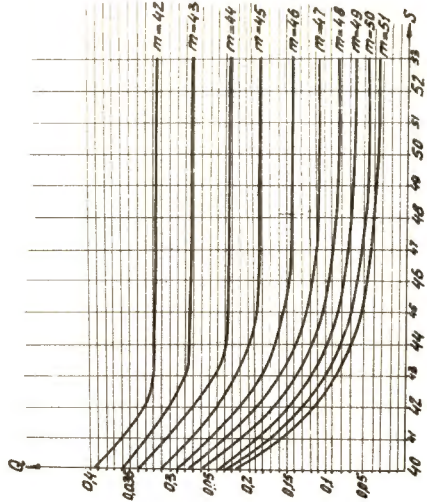
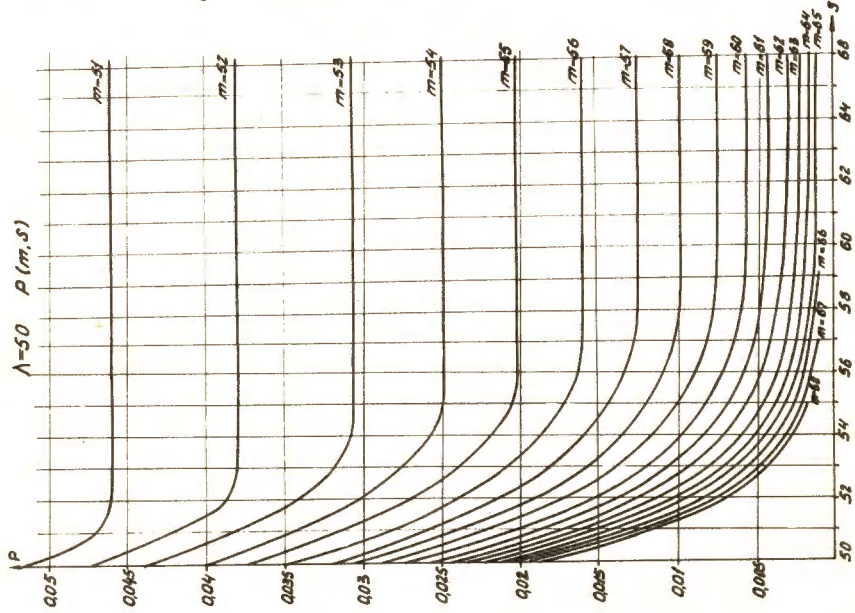


Рис. 9.



$\lambda=50$ $Q(s, m)$

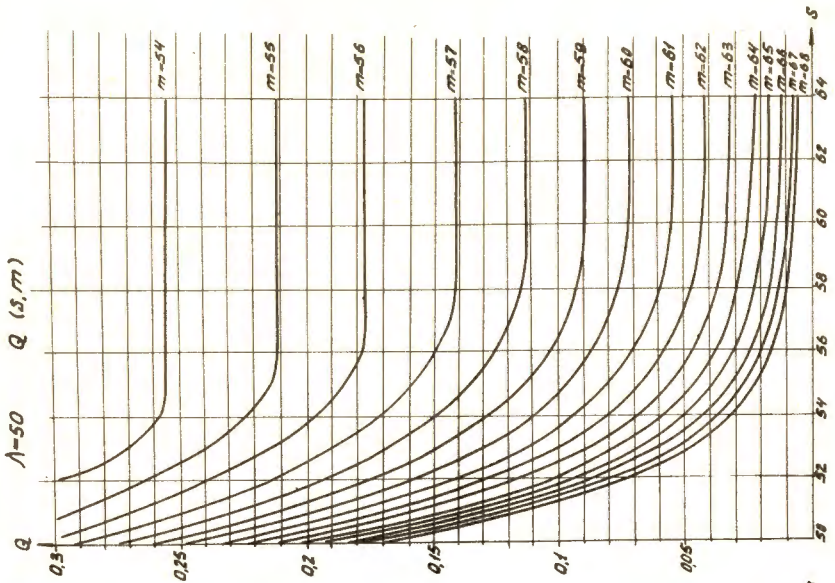


Рис. 10.