ЖВМ и МФ, 1967, т.7, №1, с.218-222

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

2526

А.А. Корнейчук

ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ И СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАДИОАКТИВНОМ РАСПАДЕ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

1965

2526

А.А. Корнейчук

ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ И СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАДИОАКТИВНОМ РАСПАДЕ

Направлено в ЖВМ и МФ

Задача состоит в определении количеств A_i и характеристик скорости распада α_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) по результатам измерения интенсивности излучения $f(t)$ в дискретные моменты времени $t_0, t_1 \ldots, t_m$:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\alpha_i t_j} = f(t_j), \; j = 0,1,\ldots,m. \tag{1}$$

Обычно число измерений $m+1$ (а следовательно, и число уравнений) превышает число $2n$ определяемых неизвестных, и для нахождения последних применяется, например, метод наименьших квадратов. Мы упростим постановку задачи. Будем считать, во-первых, что для нахождения A_i и α_i взято в точности $2n$ уравнений:

$$m = 2n - 1, \tag{2}$$

и, во-вторых, предполагаем, что измерения проводились через равные промежутки времени:

$$t_j = \tau j, \; j = 0,1,\ldots,2n-1. \tag{3}$$

Обозначив

$$f(t_j) = f_j, \; A_i = \lambda_i, \; e^{-\alpha_i \tau} = x_i,$$

мы придем к системе уравнений классической проблемы моментов

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^j = f_j, \; j = 0,1,\ldots,2n-1 \tag{4}$$

с естественными дополнительными условиями

$$\lambda_i \geq 0, \; 0 \leq x_i \leq 1, \; i = 1,2,\ldots,n \tag{5}$$

(количества распадающихся веществ неотрицательны, а интенсивность экспоненциально убывает со временем).

Из уравнений (4) и неравенств (5) следуют

$$\Delta^{\ell} f_m = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \binom{\ell}{k} f_{m+k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^m (1-x_i)^{\ell} \geq 0 ,$$

$$0 \leq m+\ell \leq 2n-1 , \tag{6}$$

условия, необходимые для существования решения системы (4) – (5). (Эти условия являются и достаточными, когда $n=\infty$, см. /1/, стр. 97).

А теперь предположим, что измерения выполнены с ошибками и вместо f_j нам известны $\tilde{\tilde{f}}_j$ такие, что

$$|f_j - \tilde{\tilde{f}}_j| \leq \epsilon , \quad j=0,1,\ldots 2n-1. \tag{7}$$

Потребуем, чтобы точность измерений была такова, что система (4)–(5) остается разрешимой, когда ее правые части произвольно меняются в пределах ошибки измерения. Тогда может быть доказана следующая

Теорема 1. Если система (4)–(5) разрешима для всех f_i, удовлетворяющих (7), то f_i подчинены неравенствам

$$\Delta^{\ell} f_m \geq 3^{2n-1-\ell-m} 2^{\ell} \cdot \epsilon , \quad 0 \leq \ell+m \leq 2n-1 . \tag{8}$$

Доказательство. Сначала убедимся в справедливости более слабых неравенств

$$\Delta^{\ell} \tilde{\tilde{f}}_m \geq 2^{\ell} \epsilon , \quad 0 \leq \ell+m < 2n-1 . \tag{9}$$

Допустим противное, что для некоторого $m=m_0$, $\ell=\ell_0$ неравенство (9) не выполнено:

$$\Delta^{\ell_0} \tilde{\tilde{f}}_{m_0} = \sum_{k=0}^{\ell_0} (-1)^k \binom{\ell_0}{k} f_{m_0+k} < 2^{\ell_0} \epsilon , \tag{10}$$

и покажем, что тогда найдутся такие f_j, $j=0,1,\ldots,2n-1$, удовлетворяющие (7) (т.е. находящиеся в пределах ошибки измерения), для которых одно из необходимых условий (6) не выполнено, и, следовательно, система (4)–(5) неразрешима. Для этого положим

$$f_{m_0+k} = \tilde{\tilde{f}}_{m_0+k} - (-1)^k \epsilon . \tag{11}$$

Тогда

$$\Delta^{\ell_0} f_{m_0} = \sum_{k=0}^{\ell_0} (-1)^k \binom{\ell}{k} \tilde{\tilde{f}}_{m_0+k} - 2^{\ell_0} \epsilon < 0 \tag{12}$$

и система (4)–(5) с правыми частями (11) неразрешима.

Переходим к доказательству неравенства (8). Из соотношения

$$\Delta^{\ell} \tilde{\tilde{f}}_k = \Delta^{\ell+1} \tilde{\tilde{f}}_k + \Delta^{\ell} \tilde{\tilde{f}}_{k+1} \tag{13}$$

и (9) последовательно получаем:

$$\Delta^{2n-1-i} \tilde{\tilde{f}}_i \geq 2^{2n-1-i} \epsilon ; \quad i=0,1,\ldots, 2n-1 .$$

$$\Delta^{2n-2-i} \tilde{\tilde{f}}_i = \Delta^{2n-1-i} \tilde{\tilde{f}}_i + \Delta^{2n-2-i} f_{i+1} \geq 3 \cdot 2^{2n-2-i} \epsilon ; \quad i=0,1,\ldots,2n-2 .$$

$$\Delta^{2n-3-i} \tilde{\tilde{f}}_i = \Delta^{2n-2-i} \tilde{\tilde{f}}_i + \Delta^{2n-3-i} \tilde{\tilde{f}}_{i+1} > 3^2 \cdot 2^{2n-3-i} \epsilon ; \quad i=0,1,\ldots,2n-3 .$$

$$\Delta^{1-i} \tilde{\tilde{f}}_i = \Delta^{2-i} \tilde{\tilde{f}}_i + \Delta^{1-i} \tilde{\tilde{f}}_{i+1} \geq 3^{2n-2} \cdot 2^{1-i} \epsilon ; \quad i=0,1 .$$

$$\Delta^{0} \tilde{\tilde{f}}_0 = \Delta^{1} \tilde{\tilde{f}}_0 + \Delta^{0} \tilde{\tilde{f}}_1 \geq 3^{2n-1} \epsilon .$$

Таким образом, неравенства (8) доказаны.

В качестве примера применения этих неравенств проанализируем данные К.Ланцоша (см. /2/, стр. 284, после суммирования). В приводимой ниже таблице числители дают левые части, а знаменатели – правые части неравенств (8) ($\epsilon = 2$):

$\Delta^{\ell} \tilde{\tilde{f}}_0$	$\frac{759}{486}$	$\frac{413}{324}$	$\frac{235}{216}$	$\boxed{\frac{138}{144}}$	$\boxed{\frac{84}{96}}$	$\boxed{\frac{54}{64}}$
$\Delta^{\ell} \tilde{\tilde{f}}_1$	$\frac{346}{162}$	$\frac{178}{108}$	$\frac{97}{72}$	$\frac{54}{48}$	$\boxed{\frac{30}{32}}$	
$\Delta^{\ell} \tilde{\tilde{f}}_2$	$\frac{168}{54}$	$\frac{81}{36}$	$\frac{43}{24}$	$\frac{25}{16}$		
$\Delta^{\ell} \tilde{\tilde{f}}_3$	$\frac{87}{18}$	$\frac{38}{12}$	$\frac{19}{8}$			
$\Delta^{\ell} \tilde{\tilde{f}}_4$	$\frac{49}{6}$	$\frac{19}{4}$				
$\Delta^{\ell} \tilde{\tilde{f}}_5$	$\frac{30}{2}$					

В четырех случаях, обведенных рамкой, неравенства (8) нарушаются. Мы должны сделать вывод, согласующийся с заключением К. Ланцоша в /2/, что эти данные недостаточно точны, их можно так изменить в пределах ошибки, что система (4) – (5) станет неразрешимой.

При другом предположении о характере ошибок измерения представление о разрешимости системы (4) – (5) дает следующая

Теорема 2. Если $f_0, f_1, \ldots, f_{2n-1}$ – нормально распределенные и попарно независимые случайные величины со средними значениями соответственно $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{2n-1}$ и дисперсией σ^2, то с вероятностью, не меньшей чем

$$\Phi(u^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u^*}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{15}$$

где

$$u^* = \min_{0 \le \ell + m \le 2n-1} \left\{ \frac{\Delta^\ell \tilde{f}_m}{\sigma \sqrt{\binom{2\ell}{\ell}}} \right\}, \tag{16}$$

система (4)-(5) неразрешима.

Доказательство. Случайная величина $\Delta^\ell f_m$, будучи линейной комбинацией нормально распределенных независимых случайных величин $f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+\ell}$, также имеет нормальное распределение (см. /3/, стр. 33) со средним значением

$$\widetilde{\Delta^\ell f_m} = \Delta^\ell \tilde{f}_m \tag{17}$$

и дисперсией

$$\sum_{k=0}^{\ell} \sigma^2 \binom{\ell}{k}^2 = \sigma^2 \binom{2\ell}{\ell} \tag{18}$$

(см. /4/, стр. 18). Вероятность неравенства

$$\Delta^\ell f_m < 0 \tag{19}$$

равна

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{\binom{2\ell}{\ell}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\Delta^\ell \tilde{f}_m}{\sigma\sqrt{\binom{2\ell}{\ell}}}\right)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\Delta^\ell \tilde{f}_m}{\sigma\sqrt{\binom{2\ell}{\ell}}}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{20}$$

Взяв наибольшую из этих вероятностей, мы придем к утверждению теоремы 2.

Несколько сложнее формулируются достаточные условия существования решения системы (4)-(5). Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть результаты измерений $\tilde{f}_i$ заключены в пределах

$$f_i \le \tilde{f}_i \le F_i, \quad i = 0, 1, \ldots, 2n-1, \tag{21}$$

Обозначим

$$\{a_i\} = (F_0, f_1, F_2, \ldots, F_{2n-2}, f_{2n-1}), \tag{22}$$

$$\{s_i\} = (\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_{2n-2}, \tilde{f}_{2n-1}), \tag{23}$$

$$\{b_i\} = (f_0, F_1, f_2, \ldots f_{2n-2}, F_{2n-1}). \tag{24}$$

Пусть все главные миноры матриц n-го порядка с элементами

$$A_{i,k} = a_{i+k} - a_{i+k+1};\ a_{i+k+1};\ b_{i+k} - b_{i+k+1};\ b_{i+k+1}; \quad i, k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{25}$$

положительны. Тогда система (4)-(5) разрешима при всех правых частях $\tilde{f}_i$, удовлетворяющих неравенству (21), и при этом

$$x_i \le \tilde{x}_i \le X_i, \tag{26}$$

где x_i, $\tilde{x}_i$ и X_i удовлетворяют системе (4)-(5) с правыми частями соответственно (22), (23) и (24).

Доказательство. Из условия положительности главных миноров матриц (25) следует положительная определенность квадратичных форм

$$\sum_{i,k=0}^{n-1} (a_{i+k} - a_{i+k+1}) x_i x_k;\ \sum_{i,k=0}^{n-1} a_{i+k+1} x_i x_k; \tag{27}$$

$$\sum_{i,k=0}^{n-1} (b_{i+k} - b_{i+k+1}) x_i x_k,\ \sum_{i,k=0}^{n-1} b_{i+k+1} x_i x_k. \tag{28}$$

Значит, положительно определены формы

$$\sum_{i,k=0}^{n-1} a_{i+k} x_i x_k \qquad \sum_{i,k=0}^{n-1} b_{i+k} x_i x_k \tag{29}$$

как суммы двух положительных форм (27) либо (28). Стало быть, все главные миноры матриц n-го порядка с элементами

$$A_{i,k} = a_{i+k} \ ; \ b_{i+k} \tag{30}$$

положительны. Итак, выполнены условия теорем Маркова (см. /5/, стр. 473). Из теоремы Маркова об определителях следует, в частности, что все главные миноры матриц n -го порядка с элементами

$$A_{i,k} = s_{i+k} \tag{31}$$

положительны. Из этой же теоремы следует, далее, что главные миноры ганкелевой матрицы с элементами $\{t_{i+k}\}$ убывают, если t_{2k} убывают, а t_{2k+1} возрастают до тех пор, пока все эти миноры остаются положительными. Если t_{2k} убывают, а t_{2k+1} возрастают, то $t_{2k}-t_{2k+1}$ убывают, а $t_{2k+1}-t_{2k+2}$ возрастают и, следовательно, по той же теореме Маркова, главные миноры ганкелевой матрицы $\{t_{i+k}-t_{i+k+1}\}$ убывают – до тех пор, пока они остаются положительными.

Таким образом, используя положительную определенность форм

$$\sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k}\, x_i x_k \, , \sum_{i,k=0}^{n-1} (a_{i+k} - a_{i+k+1})\, x_i x_k \, , \sum_{i,k=0}^{n-1} (b_{i+k} - b_{i+k+1})\, x_i x_k \tag{32}$$

и неравенства (21), мы приходим к положительной определенности формы

$$\sum_{i,k=0}^{n-1} (s_{i+k} - s_{i+k+1})\, x_i x_k \, . \tag{33}$$

Значит, разрешима соответствующая проблема моментов Хаусдорфа (см. /1/, стр. 97), т.е. существует неубывающая функция $\tilde{\sigma}(x)$, такая, что

$$s_k = \int_0^1 x^k \, d\tilde{\sigma}(x) \, ; \ k = 0,1,\ldots,2n-1 \, . \tag{34}$$

Коэффициенты Кристоффеля $\tilde{\lambda}_i$ и узлы $\tilde{x}_i$ квадратурной формулы Гаусса, соответствующей распределению $d\tilde{\sigma}(x)$, дают, как известно, решение системы (4). При этом $\tilde{\lambda}_i > 0$ (см. /6/, стр. 61). Узлы $\tilde{x}_i$ принадлежат области ортогональности (см. /6/, стр. 57): $0 < \tilde{x}_i < 1$.

Далее, из положительной определенности форм (27), (28) следует, что разрешимы соответствующие усеченные проблемы моментов Хаусдорфа, т.е. существуют неубывающие функции $\sigma(x)$ и $\Sigma(x)$, такие, что

$$a_k = \int_0^1 x^k \, d\sigma(x) \, ; \quad b_k = \int_0^1 x^k \, d\Sigma(x) \, ; \ k = 0,1,\ldots,2n-1 \, . \tag{35}$$

Обозначим узлы соответствующих квадратурных формул Гаусса через x_i и X_i, $i=1,2,\ldots,n$. Известны уравнения, которым эти узлы удовлетворяют (см. /1/, стр. 12). Эти уравнения совпадают с уравнениями теоремы Маркова о корнях (см. /5/, стр. 476), откуда и следует неравенство (26). Так как узлы квадратурной формулы Гаусса принадлежат отрезку ортогональности, то

$$0 < x_i \le \tilde{x}_i \le X_i < 1 \, . \tag{36}$$

Теорема 3 доказана. Чтобы убедиться в разрешимости системы (4)-(5) для всех правых частей, находящихся в пределах (21), достаточно проверить, что разрешимы две "граничные" системы с правыми частями (22) и (24). Найдя их решения, мы можем указать границы (26) для решения системы (4)-(5) – т.е. по точности, с которой известны правые части, указать точность, с которой могут быть определены величины $\tilde{x}_i$ –практически наиболее важные параметры радиоактивного распада.

Литература

1. Н.И. Ахиезер. Классическая проблема моментов. Физматгиз, М., 1961.
2. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1961.
3. Ван дер Варден. Математическая статистика. ИЛ, М., 1960.
4. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.
5. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц, ГИТТЛ, М, 1953.
6. Г. Сеге. Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1965 г.