ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2351

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Э.А. Перельштейн, О.И. Ярковой

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОГО ПУЧКА, СВЕРНУТОГО В АЗИМУТАЛЬНО-ОДНОРОДНОЕ КОЛЬЦО

1965

2351

Э.А.Перельштейн, О.И.Ярковой

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОГО ПУЧКА, СВЕРНУТОГО В АЗИМУТАЛЬНО-ОДНОРОДНОЕ КОЛЬЦО

Рассматривая движение заряженных частиц в пучке в ряде современных установок, например, в накопителях необходимо учитывать влияние поля самого пучка (при достаточно большой плотности заряда и тока).

В настоящей работе вычисляется электромагнитное поле пучка, действующее на заряженную частицу, движущуюся внутри него, в первом и во втором приближении по запаздыванию. Результат справедлив и при релятивистских или ультрарелятивистских значениях скорости движения частиц вдоль пучка. Пучок предполагается свернутым в замкнутое азимутально-однородное кольцо.

В первом приближении в определенных условиях (см. текст) поле излучения возникает лишь при перемещении пучка как целого и не влияет на относительное движение частиц пучка. Часть поля, влияющую на относительное движение частиц, естественно назвать квазичастичной, так как она подчиняется уравнению Пуассона, а время входит лишь как параметр в заряд и ток. Отметим, что хотя для справедливости первого приближения (как и разложения поля по запаздыванию вообще) требуется определенная медленность изменения параметров пучка, движение частиц при этом не обязано быть адиабатическим (см. решение самосогласованной задачи в работе [1], где используется первое приближение). Второе приближение следует использовать, изучая влияние излучения на относительное движение частиц, а также для оценки границ применимости первого приближения.

1. Общие выражения для полей

Будем исходить из известных выражений для запаздывающих потенциалов (см., например, [2])

$$\phi(t,\vec{r}) = \int \frac{\rho_{t'}}{R}\, dV', \qquad \vec{A}(t,\vec{r}) = \int \frac{\vec{j}_{t'}}{R}\, dV' \tag{1}$$

$$t' = t - R, \qquad R = |\vec{r} - \vec{r}\,'| .$$

Здесь и везде далее принято: скорость света $c=1$. Для наших целей естественно использовать цилиндрическую систему координат (r,θ,z), где θ – азимут кольца, образованного пучком. Учитывая азимутальную однородность, будем в распределении плотности заряда и тока отсчитывать координаты от некоего центра сечения пучка $(r_0(t), z_0(t))$. Таким образом, этот центр может двигаться в плоскости (r,z), что соответствует перемещению пучка как целого, если сюда включить и изменение его большого радиуса $r_0(t)$. Примером такого движения являются колебания пучка относительно некоторого положения равновесия. Итак, запишем:

$$\rho_{t'} = \rho\,(t', x'_1, x'_2)\,,\quad \vec{i}_{t'} = \vec{j}\,(t', x'_1, x'_2)\,, \tag{2}$$

где

$$x'_1 = r' - r_0(t') \tag{2a}$$

$$x'_2 = z' - z_0(t').$$

Явная зависимость $\rho_{t'}$ и $\vec{i}_{t'}$ от времени учитывает возможное перераспределение плотности заряда и тока по сечению в процессе движения.

Записывая (1) в цилиндрической системе координат $dV' = r'\,d\theta'\,dr'\,dz'$, удобно перейти на плоскости (r,z) к интегрированию по x'_1, x'_2.

Учитывая, что $t' = t - R$, имеем для якобиана перехода

$$\frac{\partial(r'\ z')}{\partial(x'_1, x'_2)} = \left[\frac{\partial(x'_1, x'_2)}{\partial(r', z')}\right]^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{\beta}'\vec{R}'}{R'}}\,, \tag{3}$$

где по определению

$$\vec{\beta}' = \vec{\beta}\,(t') = \frac{d\vec{r}_0(t')}{dt} = \{\dot{r}_0(t'), 0, \dot{z}_0(t')\} \tag{3a}$$

$$\vec{R}' = \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial R^2}{\partial \vec{r}'}\Big|_{\vec{r}' = \mathrm{const}}\,,\qquad R' = |\vec{R}'|.$$

Здесь и далее мы систематически используем аппарат векторного анализа. Поскольку принята криволинейная (цилиндрическая) система координат, необходимо следить, чтобы векторы, участвующие в векторных операциях, брались в одной точке. В связи с этим нужно сделать некоторые пояснения.

1. Под $\vec{r}_0(t)$ понимается поле векторов, имеющих в любой точке (r, θ, z) в цилиндрической системе координат компоненты $\{r_0(t), z_0(t)\}$. То же относится к производным $\dot{\vec{r}}_0(t)$ по аргументу. Из (2a) определим для каждой точки (r,θ,z) вектор $\vec{x}$ с компонентами $(r - r_0(t),\ 0,\ z - z_0(t))$.

2. Далее в векторных операциях участвуют векторы, первоначально определенные как для точки наблюдения $\vec{r} = (r, \theta, z)$, так и для точки $\vec{r}' = (r', \theta, z')$. При этом в зависимости от того, в какой точке берется результат (в основном в точке наблюдения), следует переносить вектор, взятый в другой точке, и соответственно учитывать изменение его компонент. Так, в частности, по определению $\vec{R}'$ в (3a) как градиент скалярной функции является вектором и отнесен к точке наблюдения $\vec{r}$. Следовательно, под вектором $\vec{\beta}'$ в (3) следует понимать соответствующий вектор, параллельно перенесенный из $\vec{r}'$ в $\vec{r}$. При этом скалярное произведение $(\vec{\beta}'\vec{R}')$ не зависит, конечно, от того, в какой именно точке ($\vec{r}, \vec{r}'$ и т.д.) оно вычислено, что было уже использовано в (3). Действительно, по вычислению вместо $(\vec{\beta}'\vec{R}')$ должно быть $-\tfrac{1}{2}\vec{\beta}'\frac{\partial R^2}{\partial \vec{r}'}\Big|_{\vec{r} = \mathrm{const}}$ где $\vec{\beta}'$ взято также в $\vec{r}'$, т.е. в цилиндрической системе $\vec{\beta}' = \{\frac{dr_0}{dt'}, 0, \frac{dz_0}{dt'}\}$ и соответственно $-\frac{1}{2}\frac{\partial R^2}{\partial \vec{r}'} = \{-r' + r\cos(\theta - \theta'),\ -r\sin(\theta - \theta'),\ z - z'\}$. Нетрудно, однако, видеть, что $-\tfrac{1}{2}\frac{\partial R^2}{\partial \vec{r}'}$ есть вектор $\vec{R}'$ из (3), перенесенный в точку $\vec{r}'$, чем и оправдывается запись (3). В дальнейшем мы будем широко пользоваться такого рода простыми свойствами без специальных оговорок.

Итак, имеем ($\vec{R}'$ – в точке $\vec{r}$)

$$\begin{aligned} \vec{R}' &= \vec{r} - \vec{r}_0(t') - \vec{x}' = \{r - [r_0(t') + x'_1]\cos(\theta - \theta'),\ [r_0(t') + x_1]\sin(\theta - \theta'),\ z - z_0(t') - x'_2\}, \\ R'^2 &= r^2 + [r_0 + x'_1]^2 - 2r[r_0 + x_1]\cos(\theta - \theta') + [z - z_0 - x'_2]^2, \\ \vec{\beta}'\vec{R}' &= \frac{dr_0}{dt'}[r\cos(\theta - \theta') - r_0 - x'] + \frac{dz_0}{dt'}[z - z_0 - x'_2]\,,\qquad t' = t - R' \end{aligned} \tag{4}$$

Вектор $\vec{R}'$ помечен штрихом с тем, чтобы подчеркнуть его явную зависимость от t', т.е. в конечном счете от времени t.

В виде (4) $\vec{R}', R'$ и $\vec{\beta}'\vec{R}'$ подставляются во все последующие выражения для полей. Так, для потенциалов теперь имеем

$$\phi = \int_0^{2\pi} d\theta' \int \frac{\rho(t', \vec{x}')\,r'}{\mathcal{R}'}\,d^2x'\,,\qquad \vec{A} = \int_0^{2\pi} d\theta' \int \frac{\vec{j}\,(t', \vec{x}')\,r'}{\mathcal{R}'}\,d^2x' \tag{5}$$

$$\mathcal{R}' = R' - \vec{\beta}'\vec{R}'$$

Выражения (5) удобны тем, что позволяют при нерелятивистском значении скорости центра в плоскости (r,z) (т.е. $\beta' \ll 1$), независимо от того, какова скорость движения частиц вдоль пучка, легко провести разложение поля по запаздыванию (см. следующий раздел). Отсюда непосредственно следуют выражения для потенциалов Льенара-Вихерта бесконечно тонкого кольца. Полагая

$$\rho_t = \frac{Z_e}{2\pi r}\,\delta(r - r_0(t))\,\delta(z - z_0(t))\,,\quad \vec{i}_t = \{\dot{r}_0\rho_t, \beta_\theta(t)\rho_t, \dot{z}_0\rho_t\}\,,$$

где Z_e – полный заряд, получим

$$\phi = \frac{Z_\bullet}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta'}{\mathcal{R}_1}, \qquad A_r = \frac{Z_\bullet}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\dot r_o(t_1)\cos(\theta-\theta')}{\mathcal{R}_1}\,d\theta',$$

$$A_\theta = \frac{Z_\bullet}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\beta_\theta(t_1)\cos(\theta-\theta')}{\mathcal{R}_1}\,d\theta', \qquad A_z = \frac{Z_\bullet}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\dot z_o(t_1)}{\mathcal{R}_1}\,d\theta'; \tag{6}$$

где из (4) $\mathcal{R}_1 = R_1 - \vec\beta(t_1)\vec R_1$, $\vec R_1 = \vec R'|_{\vec x'=0,\ t'=t_1}$ с учетом $t_1 = t - R_1$.

Из (5) получим выражения для напряженностей электромагнитного поля

$$\vec E = -\vec\nabla\phi - \frac{\partial\vec A}{\partial t} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta' \int d^2x' \left\{ \frac{\rho r'\,\vec\nabla R'}{\mathcal{R}'^2} - \frac{\partial(\rho r')}{\partial t'}\frac{\nabla t'}{\mathcal{R}'} + \frac{\vec j r'\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}'}{\mathcal{R}'^2} - \frac{\partial(\vec j r')}{\partial t'}\frac{\frac{\partial t'}{\partial t}}{\mathcal{R}'} \right\} \tag{7}$$

$$\vec H = [\vec\nabla\,\vec A] = \int_0^{2\pi} d\theta' \int d^2x' \left\{ \left[(\vec j r')\frac{\vec\nabla\mathcal{R}'}{\mathcal{R}'^2}\right] - \frac{1}{\mathcal{R}'}\left[\frac{\partial(\vec j r')}{\partial t'}\,\nabla t'\right] \right\}.$$

Вычисление $\vec\nabla t'$, $\frac{\partial t'}{\partial t}$ и пр. проводится аналогично /2/. В результате имеем

$$\vec\nabla t' = -\frac{\vec R'}{\mathcal{R}'}, \qquad \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R'}{\mathcal{R}'}$$

$$\vec\nabla\mathcal{R}' = (1-\beta'^2+\dot{\vec\beta}'\vec R')\frac{\vec R'}{\mathcal{R}'} - \vec\beta'$$

$$\frac{\partial R'}{\partial t} = \frac{\beta'^2 - \dot{\vec\beta}'\vec R'}{\mathcal{R}'}R' - \frac{\vec\beta'\vec R'}{\mathcal{R}'} \tag{7a}$$

$$\mathcal{R}' = R' - \vec\beta'\vec R'.$$

Разложение поля по запаздыванию в первом приближении

Будем рассматривать случай нерелятивистских движений пучка как целого

$$|\vec\beta'| \ll 1. \tag{8}$$

В том случае, когда $\vec\beta'$ достаточно плавно меняется[x)] за времена порядка R', возможно разложение $\vec\beta'$ в ряд Тейлора. Ограничиваясь первыми двумя членами, имеем

$$\vec\beta' = \vec\beta(t') = \vec\beta(t) - \dot{\vec\beta}(t)R_o, \tag{8a}$$

где

$$R_o = |\vec R_o|, \quad \vec R_o = \vec r - \vec r_o(t) - \vec x.$$

Проводя разложение поля по запаздыванию, параметром малости будем считать любое из двух слагаемых (8а)[xx)], а также логарифмическую производную других величин, входящих в ρ и $\vec j$ (принимая также, что каждое воздействие оператора $R\frac{\partial}{\partial t}$, исключая (8а), не превосходит по порядку величины умножения на параметр малости).

Так как мы интересуемся лишь полем внутри пучка, то

$$R_o \approx 2r_o. \tag{9}$$

Далее в первом приближении, имеем

$$\vec R' = \vec R_o + \vec\beta R_o - \tfrac12\dot{\vec\beta} R_o^2$$

$$R' = R_o + \vec\beta\vec R_o - \tfrac12(\dot{\vec\beta}\vec R_o)R_o. \tag{8б}$$

Напряженности $\vec E$ и $\vec H$ из (7) в первом приближении соответствуют потенциалам

$$\phi = \int G_1\rho(t,\vec x')r'd^2x', \qquad A_\theta = \int G_2 j_\theta(t,\vec x')r'd^2x'$$

$$A_r = \int G_2 j_r(t,\vec x')r'd^2x', \qquad A_z = \int G_1 j_z(t,\vec x')r'd^2x' - 2\pi\frac{\partial}{\partial t}\int j_z r'd^2x', \tag{10}$$

где

$$G_1 = \int_0^{2\pi}\frac{1-\tfrac12(\dot{\vec\beta}\vec R_o)}{R_o}d\theta', \qquad G_2 = \int_0^{2\pi}\frac{1-\tfrac12(\dot{\vec\beta}\vec R_o)}{R_o}\cos(\theta-\theta')\,d\theta$$

---

x) Относительно осцилляций величин с периодом, меньшим R', см. конец этого раздела.

xx) Поскольку поле излучения связано с ускорением, следует считать, что второе слагаемое в (8а) может быть не только порядка первого, но и много больше его. Напомним также, что как об этом говорилось ранее, разложение возможно и для релятивистской скорости движения частиц вдоль пучка.

Здесь для простоты пренебрегается запаздыванием в возможной резкой границе плотности заряда.

Используем далее и для точки наблюдения переменные вида (2a)

$$x_1 = r - r_0(t), \qquad x_2 = z - z_0(t).$$

Интегралы G_1 и G_2 в (10) легко выражаются через элементарные функции и эллиптические интегралы. Рассматривая тонкий пучок

$$\frac{a}{r_0} \ll 1, \qquad (11)$$

где a – характерный размер сечения пучка, можно воспользоваться разложением эллиптических интегралов по $\frac{a}{r_0}$. Дальнейшие результаты мы приводим, ограничиваясь первым порядком по $\frac{a}{r_0}$ x) и для специального вида ρ и $\vec{j}$ (см. /1/).

$$\rho(t,\vec{x}) = \frac{eN}{2\pi^2 r}\, |G|^{1/2}\, \sigma\,(1 - G_{ik}x_i x_k), \qquad (11)$$

$$j_\theta = \beta_0(t)\,\rho, \qquad j_i = (\beta_i + \Omega_{ik}x_k)\rho$$

$$(\beta_1 = \dot{r}_0(t), \quad \beta_2 = \dot{z}_0(t))$$

(i,k = 1,2, здесь и далее предполагается суммирование по всем дважды встречающимся индексам).

Здесь

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \ge 0 \\ 0 & \xi < 0 \end{cases}$$

$$|G| = \mathrm{Det}\, G_{ik}$$

G_{ik} – симметричная матрица с положительными собственными значениями,

eN – полный заряд и $\beta_0, G_{ik}, \Omega_{ik}$ могут быть произвольными функциями времени

$$(G_{ik} + G_{i\ell}\,\Omega_{\ell k} + G_{k\ell}\,\Omega_{\ell i} = 0).$$

В результате несложных по существу, но несколько громоздких вычислений (см. также Приложение), получим:

$$\phi = \frac{eN}{\pi r_0}\Big\{ L - \Phi_0 - \frac{x_1}{2r_0}\Big(L - \frac{3}{2} - \Phi_0\Big) + \tfrac{1}{2} - \frac{\Phi_1}{2r_0} -$$

$$- \tfrac{1}{2}(\ddot{r}_0 x_1 + \ddot{z}_0 x_2)(L + \tfrac{1}{2} - \Phi_0) + \tfrac{1}{2}(\ddot{r}_0\Phi_1 + \ddot{z}_0\Phi_2) + \ddot{r}_0\Big(r_0 + \frac{3}{4}x_1\Big)\Big\}$$

---

x) Учет членов более высокого порядка также прост и может быть легко выполнен.

$$A_\theta = \beta_0\,\phi + \beta_0\frac{eN}{\pi r_0}\Big\{-2 + \frac{x_1}{2r_0} + \ddot{r}_0 x_1 + \ddot{z}_0 x_2 - \frac{4}{3}\ddot{r}_0\Big(r + \frac{3}{8}x_1\Big)\Big\}$$

$$A_r = \frac{eN}{\pi r_0}\Big\{\dot{r}_0\Big[L - \frac{3}{2} - \Phi_0 - \frac{x_1}{2r_0}(L - 2 - \Phi_0)\Big] + \Omega_{1k}\Phi_k\Big(1 - \frac{x_1}{2r_0}\Big) - \Omega_{1k}\frac{\Phi_{k1}}{2r_0} + \frac{\Omega_{11}b_1}{r_0}\Big\} \qquad (12)$$

$$A_z = \frac{eN}{\pi r_0}\Big\{\dot{z}_0\Big[L + \tfrac{1}{2} - \Phi_0 - \frac{x_1}{2r_0}\Big(L - \frac{3}{2} - \Phi_0\Big)\Big] + \Omega_{2k}\Phi_k\Big(1 - \frac{x_1}{2r_0}\Big) - \frac{\Omega_{2k}\Phi_{k2}}{2r_0} + \frac{\Omega_{22}b_2}{r_0}\Big\}.$$

Здесь

$$L + \tfrac{1}{2} - \Phi_0(t, x_i) = \frac{|G|^{1/2}}{\pi}\int_\sigma G_0\, d^2x'$$

$$\Phi_i(t, x_i) = \frac{|G|^{1/2}}{\pi}\int_\sigma x'_i G_0\, d^2x' \qquad (12a)$$

$$\Phi_{ik}(t, x_i) = \frac{|G|^{1/2}}{\pi}\int_\sigma x'_i x'_k G_0\, d^2x'$$

$$b_i(t) = \frac{|G|^{1/2}}{\pi}\int_\sigma x'^2_i\, d^2x' \qquad \text{(по } i \text{ не суммировать)},$$

σ – площадка, ограниченная эллипсом $G_{ik}(t)\,x_i x_k = 1$,

где

$$G_0 = \ln\frac{8r_0}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}}.$$

Конкретный вид L и Φ_0 (см. Приложение)

$$L = \ln\frac{16 r_0}{\mathrm{Sp}\, G^{-1/2}} \qquad (13)$$

$$\Phi_0(t, x_i) = \frac{G^{1/2}_{ik}(t)\, x_i x_k}{\mathrm{Sp}\, G^{-1/2}},$$

где матрицы $G^{1/2}$ и $G^{-1/2}$ определены из условий

$$G^{1/2}G^{1/2} = G\,, \quad (G^{1/2} = G^{1/2\,*}, \quad Sp\, G^{1/2} > 0)$$

$$G^{-1/2}G^{1/2} = 1\,.$$

Особенно простой вид (12) принимает для случая

$$\beta^2, (\dot{\beta}\, 2 r_0)^2, \quad \frac{a^2}{r_0^2} L \ll 1 - \beta_0^2.$$

Тогда имеем для потенциалов, определяющих старшие члены в силе Лоренца, действующей на частицу,

$$\phi = \frac{eN}{\pi r_0}\,[\,L - \Phi_0 - \frac{x_1}{2 r_0} L\,]$$

$$A_\theta = \beta_0 \phi \tag{14}$$

$$A_r = \frac{eN}{\pi r_0}\, \dot{r}_0 L$$

$$A_z = \frac{eN}{\pi r_0}\, \dot{z}_0 L\,.$$

Обсуждение этого случая приведено в работе /1/ x). Здесь мы только подчеркнем, что в (14) член Φ_0, влиящий на относительное движение частиц в пучке, подчиняется уравнению Пуассона (Приложение) и, следовательно, может быть назван квазистатическим, так как для Φ_0 запаздыванием полностью пренебрегается. Излучение учитывается лишь при движении пучка как целого (см. /1/).

Сделаем замечание по поводу возможных осцилляторных добавок к величинам под интегралами в (5) и (7). Как видно из (7), напряженности поля включают члены $\frac{1}{R}$ и $\sim \frac{1}{R^2}$ или $\frac{1}{R^3}$ (к последним относится в частности Φ_0). При интегрировании по θ' вклад в интеграл для членов $\sim \frac{1}{R}$ дает вся область интегрирования, а для других – область радиуса a вокруг точки наблюдения. Таким образом, всегда за исключением резонансных для частоты колебаний ω_0 областей $\omega_0 \sim \frac{1}{r_0}$ и $\omega_0 \sim \frac{1}{a}$ возможно вычисление интегралов. При этом, если $\frac{1}{r_0} \ll \omega_0 \ll \frac{1}{a}$, то в величинах, входящих в члены $\sim \frac{1}{R^3}$, следует брать аргумент $\hat{t}$, в членах $\sim \frac{1}{R}$ – пренебрегать осцилляторными добавками.

---

x) В /1/ разложение по a/r_0 проведено до второго порядка, что дает возможность учесть дополнительные по сравнению с прямым пучком силы расталкивания, влияющие на относительное движение частиц, связанные с кривизной пучка и обусловленные различной конфигурацией электрического и магнитного поля (см. /3/). Результаты /1/ справедливы также и в случае $\frac{a^2}{r_0^2} L \gtrsim 1 - \beta_0^2$.

3. Поле во втором приближении по запаздыванию

Разложение поля до второго порядка по запаздыванию проводится вполне аналогично тому, как это делалось в первом приближении и связано с более громоздкими выкладками. Опуская вычисления, даем окончательный результат в виде добавок к первому приближению.

$$A_{\theta 2} = \beta_0 \phi_2 - \beta_0 \frac{Ne}{2\pi r_0} \{ 2\beta^2 - (2\dot{\beta}\, r_0)^2 - 2\vec{\beta}\,\ddot{\vec{\beta}}\, r_0 - \pi\, \overset{\dots}{r}_0 r_0^2 + \tfrac{3}{4}(2\ddot{r}_0 r_0)^2 -$$

$$- 4\dot{r}_0^2 - \frac{x_1}{r_0}[\frac{\beta^2}{2} + \tfrac{1}{2}(2\dot{\beta}\, r_0)^2 - \frac{1}{8}(2\ddot{r}_0 r_0)^2 + \frac{\pi}{3}\overset{\dots}{r}_0 r_0^2 - 4\dot{r}_0^2] -$$

$$- \frac{x_2}{r_0}[-6\,\dot{r}_0 \dot{z}_0 + 4\ddot{r}_0 \ddot{z}_0 r_0^2 - \frac{2\pi}{3}\overset{\dots}{z}_0 r_0^2]\}$$

$$A_{r2} = \frac{eN}{\pi r_0}\{ - \frac{2}{3}\overset{\dots}{r}_0 r_0^2 - \dot{r}_0 \ddot{r}_0 r_0 + \frac{3}{2}\ddot{r}_0 r_0 \dot{r}_0 \frac{\Phi_1}{r_0} + \frac{\pi}{8}(2\ddot{r}_0 r_0)^2 +$$

$$+ \frac{\ddot{z}_0 r_0 \dot{r}_0 \Phi_2}{-2 r_0} + \frac{\ddot{r}_0 r_0 \dot{z}_0 \Phi_2}{r_0} + \frac{\Omega_{1k}}{4 r_0}[2\ddot{z}_0 r_0 \Phi_{k2} + 2\ddot{r}_0 r_0 \Phi_{k1}]$$

$$+ \dot{\Omega}_{k1}[\dot{z}_0 \Phi_{k2} + \dot{r}_0 \Phi_{k1}] - \frac{x_1}{r_0}[\frac{1}{3}\overset{\dots}{r}_0 r_0^2 +$$

$$+ \frac{3}{2}\dot{r}_0 \ddot{r}_0 r_0 (L + 1 - \Phi_0) + \frac{\Omega_{1k}\ddot{r}_0 r_0}{2}\Phi_k + \dot{\Omega}_{1k} r_0 \dot{r}_0 \Phi_k - \frac{\pi^2 \ddot{r}_0^2 r_0^2}{2}] -$$

$$- \frac{x_2}{r_0}[\frac{\ddot{z}_0 r_0}{2}\dot{r}_0 (L - \frac{3}{2} - \Phi_0) + \ddot{r}_0 r_0 \dot{z}_0 (L - \frac{3}{2} - \Phi_0) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(\Omega_{1k}\ddot{z}_0 + 2\Omega_{1k}\dot{z}_0) r_0 \Phi_k]\}\,.$$

$$A_{z2} = \frac{eN}{\pi r_0} \{ -2\dddot{z}_0 r_0^2 - (\dot{z}_0 \ddot{r}_0 r_0 + 2\ddot{z}_0 \dot{r}_0 r_0)(1 + \frac{\Phi_1}{2r_0}) - \pi \ddot{z}_0 r_0 +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \ddot{z}_0 r_0 (\ddot{r}_0 r_0 - \frac{3}{2} \dot{z}_0 \frac{\Phi_2}{r_0}) + \frac{1}{4}(\ddot{r}_0 r_0 \Omega_{21} + 2\dot{r}_0 \dot{\Omega}_{21} r_0) b_1 -$$

$$- \frac{\Omega_{2k} r_0}{2} (\Phi_{k1} \ddot{r}_0 + \Phi_{k2} \ddot{z}_0) + \frac{\pi}{2} \dot{\Omega}_{2k} \dot{\beta}_k r_0 b_k - \dot{\Omega}_{2k} \beta_j \Phi_{kj} -$$

$$- \frac{x_1}{r_0} [\dddot{z}_0 r_0^2 + r_0 (\frac{1}{2} \dot{z}_0 \ddot{r}_0 + \dot{r}_0 \ddot{z}_0)(L - 1 - \Phi_0) - (\frac{1}{2} \Omega_{2k} \ddot{r}_0 + \dot{\Omega}_{2k} \dot{r}_0) \Phi_k -$$

$$- \frac{1}{4}(\Omega_{21} \ddot{r}_0 + 2 \dot{\Omega}_{21} \dot{r}_0) b_1] + \frac{x_2}{r_0} [\frac{3}{2} \ddot{z}_0 \dot{z}_0 r_0 (L + \frac{1}{2} - \Phi_0) -$$

$$- (\frac{1}{2} \Omega_{2k} \ddot{z}_0 + \dot{\Omega}_{2k} \dot{z}_0) \Phi_k - \frac{\pi}{4} (\ddot{z}_0 r_0)^2] \} .$$

Напомним обозначения

$$\vec{\beta} = \{ \beta_1, 0, \beta_2 \} = \{ \dot{r}_0, 0, \dot{z}_0 \} .$$

Выражения для ϕ_2 не приводим, так как в любом случае (в том числе и ультрарелятивистской β_0) вклад этого члена в силу Лоренца, действующую на частицу, имеет второй порядок малости по сравнению с вкладом квазистатической части в (14) чего нельзя сказать о других членах.

Авторы благодарны Х.П. Хуренитову за помощь в работе, а также сотрудникам теоретической группы ЛВЭ за обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Проводя интегрирование по θ', (10) можно записать в виде:

$$\phi = \int \rho r' \{ G_\phi - \frac{1}{2}[\ddot{r}_0(x_1 - x_1') + \ddot{z}_0(x_2 - x_2')] G_\phi + \frac{1}{2} \ddot{r}_0 (r_0 + x_1)(G_\phi - G_A) \} d^2x'$$

$$A_\theta = \int \beta_0 \rho r' \{ G_A - \frac{1}{2}[\ddot{r}_0(x_1 - x_1') + \ddot{z}_0(x_2 - x_2')] G_A + \frac{1}{2} \ddot{r}_0 (r_0 + x_1)(G_\phi - G_A) -$$

$$- \frac{1}{2} \ddot{r}_0 (r_0 + x_1) G_B \} d^2x' \qquad (\Pi.1)$$

$$A_r = \int (\dot{r}_0 + \Omega_{1k} x_k') \rho r' G_A d^2x'$$

$$A_z = \int (\dot{z}_0 + \Omega_{2k} x_k') \rho r' G_\phi d^2x' ,$$

где функции G_ϕ, G_A и G_B могут быть выражены через полные эллиптические интегралы $E(k)$ и $K(k)$ (см. [4])

$$G_\phi = \frac{4}{s} K(k)$$

$$G_A = \frac{4}{s} [(1 + \frac{2k'^2}{k^2}) K(k) - \frac{2}{k^2} E(k)] \qquad (\Pi.1a)$$

$$G_B = \frac{16}{3sk^4} [(4k^2 - 2) E(k) - (k'^2 - 3k'^4) K(k)] .$$

Здесь

$$s^2 = (2r_0 + x_1 + x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2$$

$$k^2 = \frac{4(r_0 + x_1)(r_0 + x_1')}{s^2}$$

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}{s^2} \approx \frac{a^2}{r_0^2} \ll 1 .$$

Воспользовавшись (см.[4]) разложением $K(k)$ и $E(k)$, при малых значениях k имеем в первом порядке по a/r,

$$G_{\phi} = \frac{2}{r_o}\left[G_o - \frac{x_1 + x'_1}{2r_o}(G_o - 1)\right]$$

$$G_A = G_{\phi} - \frac{4}{r_o}\left(1 - \frac{x_1 + x'_1}{4r_o}\right) \qquad (\text{П.1б})$$

$$G_B = \frac{4}{3}(G_{\phi} - G_A),$$

где

$$G_o = \ln \frac{8 r_o}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}}.$$

Подставляя (П.4б) в (П.1), видим, что дело сводится к вычислению интегралов (12а). Вычислим первый из них (с точностью до коэффициента)

$$\psi = \frac{1}{\pi}\int_{\sigma} G_0\, d^2x', \qquad (\text{П.2})$$

σ – площадка, ограниченная эллипсом,

$$G_{ik}(t)\, x'_i x'_k = 1. \qquad (\text{П.3})$$

Выберем вместо (x_1, x_2) систему координат (y_1, y_2) (соответственно (y'_1, y'_2)) где матрица G_{ik} диагональна, т.е. имеет вид $\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2^2} \end{pmatrix}$. Как известно, это достигается поворотом осей координат. (П.3) записывается теперь в виде

$$\frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} = 1. \qquad (\text{П.3а})$$

Замечая, что $2G_0$ есть функция Грина двухмерного уравнения Пуассона, будем искать ψ как решение граничной задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y_2^2} = -2 \quad \text{внутри эллипса (П.3а)} \qquad (\text{П.4а})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y_2^2} = 0 \quad \text{вне эллипса (П.3а)}. \qquad (\text{П.4б})$$

Согласно (П.2) на эллипсе (П.3а) должна быть непрерывна и ее нормальная производная, и асимптотика ψ на бесконечности есть

$$\psi \sim |G|^{-1/2} \ln \frac{8 r_0}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \qquad (\text{П.5})$$

$$y_1^2 + y_2^2 \to \infty$$

Будем искать решение (П.4а) в виде

$$\psi = B + B_1 y_1^2 + B_2 y_2^2. \qquad (\text{П.6})$$

Если удастся получить решение (П.4б), удовлетворяющее асимптотике (П.5) и подобрать коэффициенты B, B_1, B_2 так, чтобы выполнялись граничные условия на эллипсе (П.3а), то в силу единственности решения граничной задачи (П.6) и будет правильным значением интеграла (П.2) внутри эллипса (П.4а). Подставляя (П.6) в (П.4а), получим

$$B_1 + B_2 = -1. \qquad (\text{П.7})$$

Переходя к эллиптическим координатам μ, θ (см.[5])

$$y_1 = d\, \mathrm{ch}\, \mu \cos\theta \qquad d\, \mathrm{ch}\, \mu_0 = a_1$$

$$y_2 = d\, \mathrm{sh}\, \mu \sin\theta \qquad d\, \mathrm{sh}\, \mu_0 = a_2$$

($\mu = \mu_0 = \mathrm{const}$ – уравнение эллипса (П.3а), для определенности $a_1 > a_2$), перепишем (П.6) в виде

$$\psi = \frac{d^2}{4}\{(B_1 - B_2)(1 + \mathrm{ch}\, 2\mu \cos 2\theta) - 2[\mathrm{ch}\, 2\mu + \cos 2\theta] + B\}. \qquad (\text{П.6а})$$

Уравнение (П.4б) в эллиптических координатах записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0.$$

Возьмем частное решение его, растущее на бесконечности не быстрее $\ln(y_1^2 + y_2^2)$

$$\psi = \frac{d^2}{4}[C + C_1 \mu + C_2 e^{-2\mu} \cos 2\theta].$$

Сравнивая асимптотику $(\mu \to \infty)$ (П.8) с (П.5), найдем

$$C = 2\, \mathrm{sh}\, 2\mu_0 \ln \frac{16 r_0}{d} \qquad (\text{П.9})$$

$$C_1 = -2\, \mathrm{sh}\, 2\mu_0 \qquad (2d^2 \mathrm{sh}\, 2\mu_0 = a_1 a_2 = |G|^{-1/2}).$$

Удовлетворяя далее граничным условиям на эллипсе (П.3а), определим таким образом константы в (П.6). В результате получим

$$\psi = a_1 a_2 \left[\ln \frac{16 r_0}{a_1 + a_2} + \frac{1}{2} - \frac{y_1^2}{(a_1 + a_2) a_1} - \frac{y_2^2}{(a_1 + a_2) a_2}\right]. \qquad (\text{П.10})$$

Записывая (П.10) в ковариантном относительно поворота осей виде, получим (13). Вычисляя точно также ψ_1, получим

$$\psi_1 = \frac{1}{8}\left\{(a_1+a_2)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{(a_1-a_2)^3}{a_1+a_2} + (a_1^2-a_2^2)\left[1+\frac{(a_1-a_2)(3a_1+a_2)}{4(a_1+a_2)^2}\right]\right\} y_1$$

$$-\frac{1}{4}\left[1+\frac{(a_1-a_2)(3a_1+a_2)}{(a_1+a_2)^2}\right] y_1 y_2^2 - \frac{1}{4}\left[1-\frac{(a_1-a_2)(23a_1+a_2)}{(a_1+a_2)^2}\right] y_1^3. \qquad (\text{П.11})$$

Дадим в заключение оценку Φ_{ik}.

$$\Phi_{ii} \lesssim a_i^2 (L + \tfrac{1}{2} - \Phi_0)$$

$$\Phi_{ik} \lesssim a_i \Phi_k \qquad (i \neq k).$$

Литература

1. О.И.Ярковой. Препринт ОИЯИ 2183, Дубна, 1965.
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. Физматгиз. Москва, 1960.
3. О.И.Ярковой. Препринт ОИЯИ 2182, Дубна, 1965.
4. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов и пр. Физматгиз, Москва, 1962.
5. Ф.М.Морс, Г.Фешбах. Методы теоретической физики ИЛ, Москва, 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 сентября 1965 г.

(3-16) 19