Nucl. Instr. & Meth., 1967, v. 48, N1, p. 147-150

V

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2326

И.Б. Иссинский, В.И. Котов, Е.М. Кулакова,
К.П. Мызников, Л.А. Смирнова

УСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ В ОТКЛОНЯЮЩИХ МАГНИТАХ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1965

2326

И.Б. Иссинский, В.И. Котов, Е.М. Кулакова,
К.П. Мызников, Л.А. Смирнова

УСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ В ОТКЛОНЯЮЩИХ МАГНИТАХ

В ряде случаев при транспортировке пучков заряженных частиц возникает необходимость сочетать поворот и фокусировку в одном элементе. Однако при рассмотрении движения частиц, например, через отклоняющий магнит с постоянным по радиусу показателем поля n, уже нельзя ограничиться линейным приближением, а необходимо также учитывать нелинейные члены. Ниже будет рассмотрено движение частиц с учетом величин второго порядка. Следуя /1/, выразим компоненты поля в точке с координатами ($R_0 + \rho$, z) через величину поля H_0 на равновесной орбите с радиусом R_0 и величины

$$n = -\frac{R_0}{H_0}\left(\frac{\partial H_z}{\partial R}\right)\Big|_{\substack{R=R_0\\ z=0}} \quad \text{и} \quad n_1 = \frac{R_0^2}{H_0}\left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial R^2}\right)\Big|_{\substack{R=R_0\\ z=0}} .$$

В результате
$$H_z = H_0\,[\,1 - n x + \tfrac{1}{2}(n_1 x^2 + n\, y^2 - n_1 y^2)\,] ,$$
$$H_R = H_0\,[\,-ny + n_1 x y\,] , \tag{1}$$

где $x = \dfrac{\rho}{R_0} \ll 1$ – отклонение от равновесной орбиты в горизонтальной плоскости,

$y = \dfrac{z}{R_0} \ll 1$ – отклонение от медианной плоскости по вертикали,

H_z – вертикальная составляющая магнитного поля,

H_R – радиальная составляющая магнитного поля.

Уравнения движения частиц в секторном магните с точностью до членов второго порядка имеют вид:

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + (1-n)\,x = \left(2n - 1 - \frac{n_1}{2}\right)x^2 + \tfrac{1}{2}(n_1 - n)\,y^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 ,$$
$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + ny = (n_1 - 2n)\,xy + \frac{dx}{d\theta}\,\frac{dy}{d\theta} , \tag{2}$$

где θ – азимутальный угол.

Решая уравнение (2) методом последовательных приближений, найдем следующие выражения для отклонений x, y и углов наклона траектории к равновесной орбите α и β в горизонтальной и вертикальной плоскостях на выходе из магнита через соответствующие входные значения (x_1, y_1, α_1, β_1):

$$
\begin{aligned}
x = {} & [\, x_1 \cos\kappa_\rho\theta + \frac{\alpha_1}{\kappa_\rho}\sin\kappa_\rho\theta \,] + \\
& + \frac{1}{12(1-n)}[\, 3(3n-1-n_1) - 2(2n-n_1)\cos\kappa_\rho\theta - (5n-3-n_1)\cos 2\kappa_\rho\theta \,]\, x_1^2 + \\
& + \frac{1}{12(1-n)^2}[\, 3(3n-1-n_1) - 2(7n-3-n_1)\cos\kappa_\rho\theta + (5n-3-n_1)\cos 2\kappa_\rho\theta \,]\, \alpha_1^2 + \\
& + \frac{1}{6(1-n)\kappa_\rho}[\, 2(2n-n_1)\sin\kappa_\rho\theta - (5n-3-n_1)\sin 2\kappa_\rho\theta \,]\, x_1\alpha_1 + \\
& + \frac{1}{4(1-n)(1-5n)}[\, (1-5n)(n_1-2n) - 2n_1(1-3n)\cos\kappa_\rho\theta + 2n(1-5n)\cos\kappa_\rho\theta + n_1(1-n)\cos 2\kappa_z\theta \,]\, y_1^2 + \\
& + \frac{1}{2(1-n)}[\, \frac{n_1-2n}{2n} - \frac{5n-1-2n_1}{1-5n}\cos\kappa_\rho\theta - \frac{n_1(1-n)}{2(1-5n)n}\cos 2\kappa_z\theta \,]\, \beta_1^2 + \\
& + \frac{n_1}{2(1-5n)}[\, \frac{\sin 2\kappa_z\theta}{\kappa_z} - \frac{2\sin\kappa_\rho\theta}{\kappa_\rho} \,]\, y_1\beta_1 .
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
y = {} & [\, y_1\cos\kappa_z\theta + \frac{\beta_1}{\kappa_z}\sin\kappa_z\theta \,] + \\
& + \frac{1}{1-5n}[\, n_1(1-\cos\kappa_\rho\theta)\cos\kappa_z\theta - (2n_1+1-5n)\frac{\kappa_z}{\kappa_\rho}\sin\kappa_\rho\theta\,\sin\kappa_z\theta \,]\, x_1 y_1 + \\
& + \frac{1}{(1-n)(1-5n)}[\, (2n_1+1-5n)(1-\cos\kappa_\rho\theta)\cos\kappa_z\theta - \frac{n_1(1-n)}{\kappa_\rho\kappa_z}\sin\kappa_\rho\theta\,\sin\kappa_z\theta \,]\, \alpha_1\beta_1 + \\
& + \frac{1}{1-5n}[\, -n_1(1+\cos\kappa_\rho\theta)\frac{\sin\kappa_z\theta}{\kappa_z} + \frac{2n_1+1-5n}{\kappa_\rho}\sin\kappa_\rho\theta\,\cos\kappa_z\theta \,]\, x_1\beta_1 + \\
& + \frac{1}{(1-n)(1-5n)}[\, (\frac{n_1(1-3n)-n(1-5n)}{\kappa_z} + \frac{2n_1+1-5n}{\kappa_z}\, n\cos\kappa_\rho\theta)\sin\kappa_z\theta - \\
& - n_1(1-n)\frac{\sin\kappa_\rho\theta\,\cos\kappa_z\theta}{\kappa_\rho} \,]\, \alpha_1 y_1 .
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha = & [-x_1' \kappa_\rho \sin \kappa_\rho \theta + \alpha_1 \cos \kappa_\rho \theta] + \\
& + \frac{2n - n_1}{6\kappa_\rho} \sin \kappa_\rho \theta \, [1 + 2 \cos \kappa_\rho \theta] \, x_1^2 + \\
& + \frac{\sin \kappa_\rho \theta}{6 \kappa_\rho^3} [(7n - 2n_1 - 3) - 2(2n - n_1) \cos \kappa_\rho \theta] \, \alpha_1^2 + \\
& + \frac{2n - n_1}{3 \kappa_\rho^2} [\cos \kappa_\rho \theta - \cos 2\kappa_\rho \theta] \, x_1 \alpha_1 + \\
& + \frac{1}{2(1-5n)} \left[\frac{n_1(1-3n) - n(1-5n)}{\kappa_\rho} \sin \kappa_\rho \theta - n_1 \kappa_z \sin 2\kappa_z \theta \right] y_1^2 + \\
& + \frac{1}{2(1-5n)} \left[\frac{5n - 2n_1 - 1}{\kappa_\rho} \sin \kappa_\rho \theta + \frac{n_1 \kappa_z}{n} \sin 2\kappa_z \theta \right] \beta_1^2 + \\
& + \frac{n_1}{1 - 5n} [\cos 2\kappa_z \theta - \cos \kappa_\rho \theta] \, y_1 \beta_1 \, .
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta = & [\beta_1 \cos \kappa_z \theta - y_1 \kappa_z \sin \kappa_z \theta] + \\
& + \frac{1}{(1-n)(1-5n)} \{ n_1 [(1-3n) \kappa_\rho \sin \kappa_\rho \theta \cos \kappa_z \theta - (1-n)(1 + \cos \kappa_\rho \theta) \kappa_z \sin \kappa_z \theta] + \\
& + n(5n-1) \kappa_\rho \sin \kappa_\rho \theta \cos \kappa_z \theta \} \, x_1 y_1 + \\
& + \frac{1}{(1-n)(1-5n)} \{ n_1 \left[\frac{\sin \kappa_z \theta}{\kappa_z} (3n \cos \kappa_\rho \theta - \cos \kappa_\rho \theta - 2n) + \kappa_\rho \sin \kappa_\rho \theta \cos \kappa_z \theta \right] + \\
& + \kappa_z (5n-1)(1 - \cos \kappa_\rho \theta) \sin \kappa_z \theta \} \, \alpha_1 \beta_1 + \\
& + \frac{1}{(1-n)(1-5n)} \{ n_1 \left[(1 - n(\cos \kappa_\rho \theta - 1) \cos \kappa_z \theta + (1-3n) \kappa_\rho \sin \kappa_\rho \theta \frac{\sin \kappa_z \theta}{\kappa_z} \right] + \\
& + n(5n-1) \kappa_\rho \sin \kappa_\rho \theta \frac{\sin \kappa_z \theta}{\kappa_z} \} \, x_1 \beta_1 + \\
& + \frac{1}{(1-n)(1-5n)} \{ n_1 [(1-3n)(1 - \cos \kappa_\rho \theta) \cos \kappa_z \theta - \kappa_\rho \kappa_z \sin \kappa_\rho \theta \sin \kappa_z \theta] + \\
& \qquad + n(5n-1)(1 - \cos \kappa_\rho \theta) \cos \kappa_z \theta \} \, \alpha_1 y_1 \, .
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Здесь $\kappa_\rho^2 = 1-n$ и $\kappa_z^2 = n$. Полученные выражения справедливы для любых значений n. В частности, если $n > 1$, то в приведенных формулах необходимо произвести замену $\kappa_\rho = i\sqrt{n-1}$, а при $n < 0$ $\kappa_z = i\sqrt{/n/}$.

По формулам (3)-(6) были произведены численные расчеты для ряда начальных условий, углов поворота $1^\circ \div 5^\circ$ и величин $n = (-100)\div(-300)$. Те же случаи были просчитаны на электронно-счетной машине методом численного интегрирования уравнений движения частиц. Закон изменения магнитного поля по радиусу вводился в машину: а) в линейном приближении, б) с точностью до величин второго порядка в соответствии с (1). Разница в результатах, полученная для случаев а) и б) давала возможность оценить поправки к углам и отклонениям за счет нелинейных эффектов. Эти величины сравнивались с поправками второго порядка, полученными по формулам (3)-(6). Для поля с $n(R) = \text{const}$ (или $n_1 = n^2 + n$)[x/] величины поправок для углов выхода a и β совпали с точностью $\approx 1\%$. Следовательно, для оценки нелинейных эффектов можно с хорошим приближением использовать формулы (3)-(6). Отметим, что нелинейные эффекты вносят заметные поправки в углы отклонения a и β на выходе магнита. При больших n они могут составлять более десяти процентов от величины, определенной в линейном приближении. В то же время для отклонений x и y эти поправки менее существенны и не превышают нескольких десятых процента от линейных величин.

Как следует из (1), конфигурация магнитного поля зависит от значений n и n_1. При выбранном значении n можно варьировать магнитное поле, задавая разные величины n_1, и тем самым менять вклад нелинейных членов в углы a и β. Для примера на рис 1 и 2 приведены результаты расчета эффектов, связанных с нелинейными членами, в магните, фокусирующем по радиусу и дефокусирующем по вертикали в случае, когда $n = -300$ и $\theta = 43'$. На рис. 1 показано, как зависит от n_1 величина каждого из коэффициентов, стоящих при нелинейных членах в формуле (5) для горизонтального угла выхода из магнита. По оси абсцисс отложена величина n_1 в единицах n. По оси ординат даны соответствующие величины коэффициентов, причем индекс каждого из коэффициентов совпадает с обозначением нелинейного члена, при котором он стоит. Например, K'_{xa} обозначает коэффициент, стоящий при члене $(x_i\, a_i)$. В верхней части рисунка в большом масштабе показан участок пересечения прямых с осью абсцисс. На рис. 2 показаны подобные зависимости для вертикального угла выхода β. Коэффициенты K_{a^2}, K_{β^2}, $K_{a\beta}$ малы и при выбранных масштабах не могут быть изображены на рисунках.

Как следует из рисунков, для поля с постоянным в направлении радиуса показателем n ($n_1 = n^2 + n$) величины поправок к углам выхода из-за нелинейных эффектов достигают существенной величины. В то же время, независимо от начальных условий траекторий, нелинейные поправки и к горизонтальному, и к вертикальному углу близки

[x/] Легко показать, что $n_1 = n^2 + n - R\frac{dn}{dR}$.

к нулю при $n_1 \approx n$. Таким образом, для того, чтобы свести к минимуму влияние нелинейных эффектов в отклоняющем магните, магнитное поле в его средней плоскости, на основании (1), должно изменяться по закону:

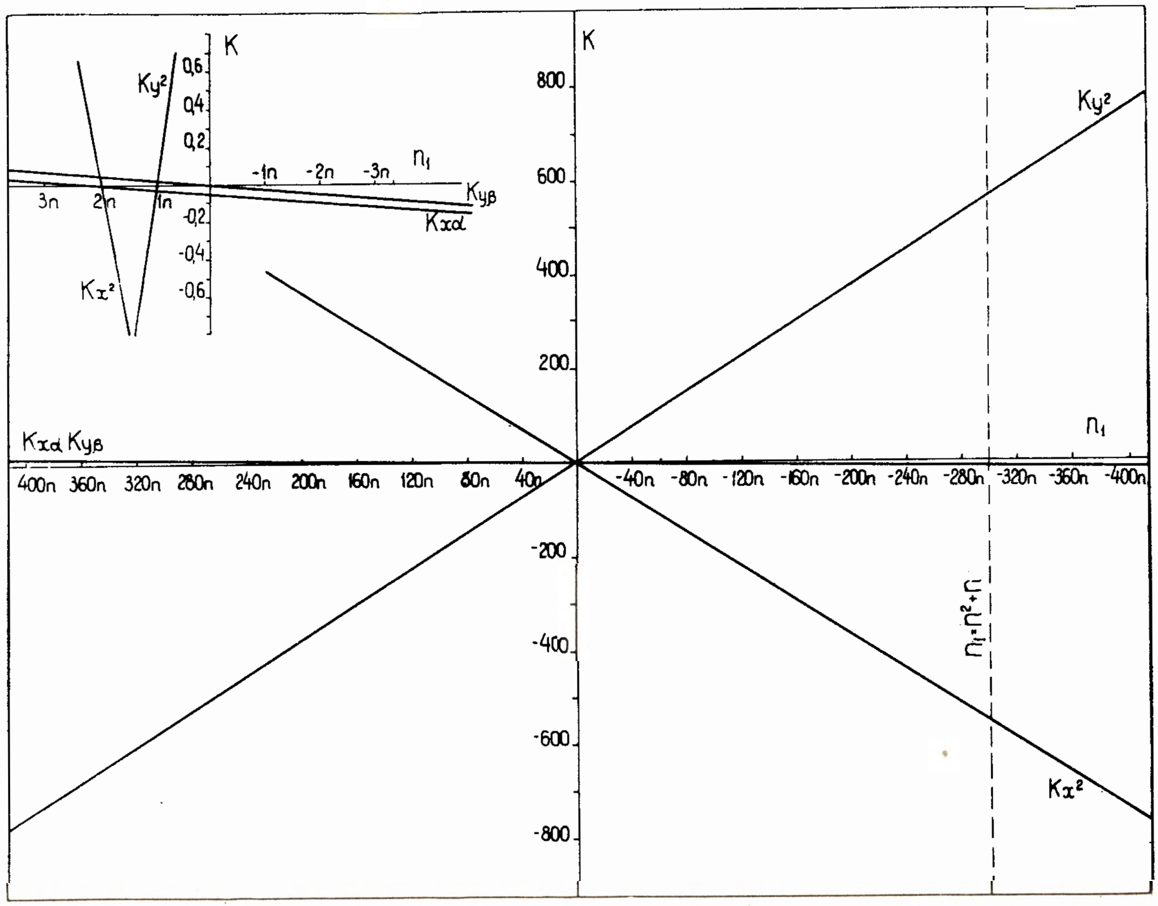
$$H_z = H_0 \left(1 - nx + \frac{n x^2}{2} \right). \tag{7}$$

Для проверки этого вывода были проведены расчеты на электронно-счетной машине для различных значений n ((в пределах $(-100) \div (-300)$) и углов поворота (в пределах $1^\circ \div 5^\circ$). Величина n_1 задавалась равной kn, где k варьировалось в широких пределах. Расчеты показали, что во всех случаях и для всех взятых траекторий при $n_1 = (1 \div 2)\, n$ нелинейные эффекты практически сводятся к нулю.

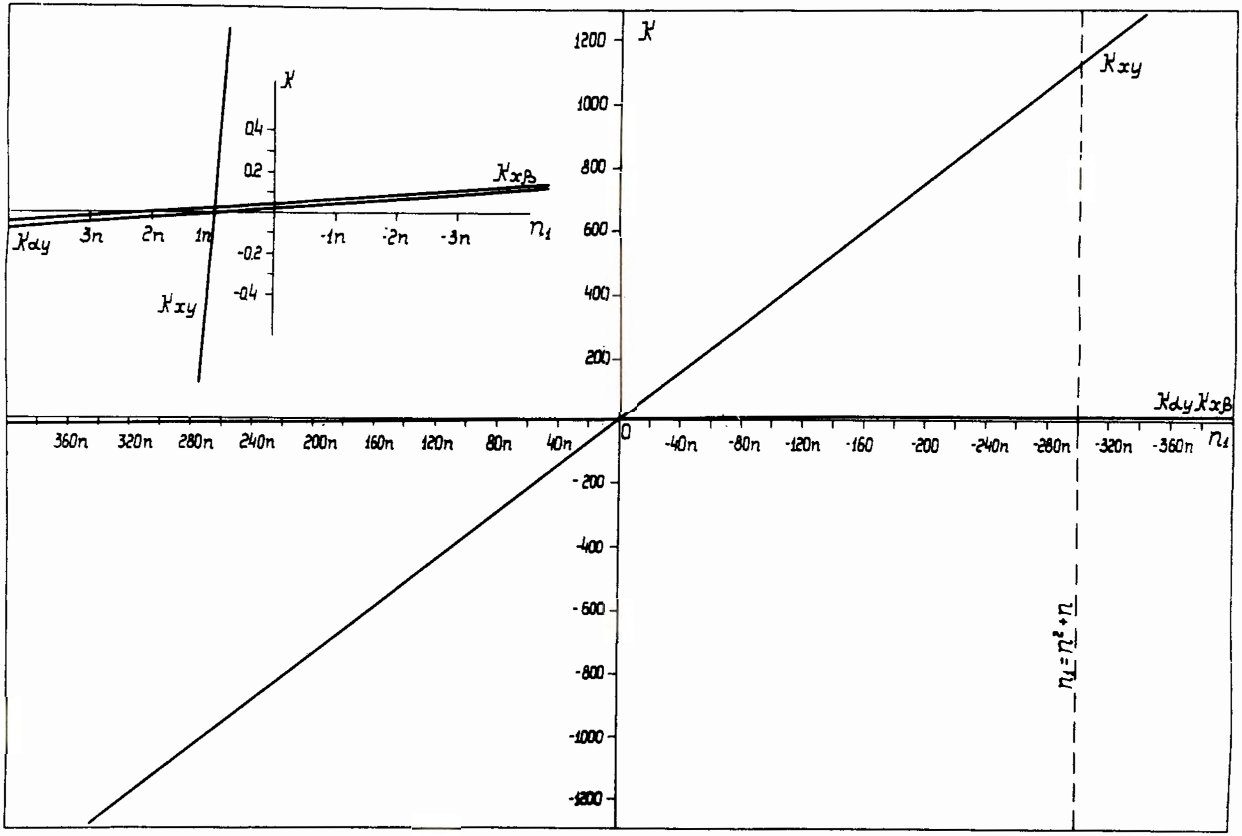
Литература

1. А.А. Коломенский. Труды ФИАН СССР, т. 13, 3, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 августа 1965 г.


K
800
600
400
200
-200
-400
-600
-800
Ky^2
n_1
Kx^2
$Kx\alpha$ $Ky\beta$
400n 360n 320n 280n 240n 200n 160n 120n 80n 40n
-40n -80n -120n -160n -200n -240n -280n -320n -360n -400n
$n_1 = n^2 + n$
0,6
0,4
0,2
-0,2
-0,4
-0,6
3n 2n 1n
-1n -2n -3n
$Ky\beta$
$Kx\alpha$

Р и с. 1.



K
0.4
0.2
-0.2
-0.4
Kxβ
Kαy
3n
2n
1n
-1n
-2n
-3n
n_1
Kxy
K
1200
1000
800
600
400
200
Kxy
KαyKxβ
360n
320n
280n
240n
200n
160n
120n
80n
40n
0
-40n
-80n
-120n
-160
-200
-240n
-280n
-320n
-360n
n_1
-200
-400
-600
-800
-1000
-1200
$n_1 = n^2 + n$

Р и с. 2.