ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2250

А.А. Корнейчук, А.С. Марков, Н.Ю. Ширикова

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ И ГАММА-ФУНКЦИИ НА МАШИНЕ М-20

1965

2250

А.А. Корнейчук, А.С. Марков, Н.Ю. Ширикова

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ И ГАММА-ФУНКЦИИ НА МАШИНЕ М-20

С 1962 года в Вычислительном центре ОИЯИ проводится работа по усовершенствованию стандартных программ (СП), вычисляющих элементарные функции на машине М-20. Исходные программы приведены в книге [1]. В этих программах при вычислении функций e^x, $\ln x$, x^y, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ аргумент приводится к некоторому интервалу, и на этом интервале для функции используется полиномиальное приближение. Оказывается, однако, что во многих случаях более эффективны дробно-рациональные приближения. Они использованы в усовершенствованных вариантах СП e^x, $\ln x$, x^y $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$. В СП $\sin x$ и $\arcsin x$ нами использованы полиномиальные приближения. В СП $\sin x$ коэффициенты аппроксимирующего полинома изменены по сравнению с коэффициентами полинома, взятого в [1]; это позволило несколько улучшить точность и сократить программу на один код. В СП $\arcsin x$ по сравнению с [1], изменена схема вычислений, что позволило улучшить точность и выиграть время. Однако программа удлинилась на три кода.

При усовершенствовании стандартных программ вычисления элементарных функций была поставлена цель, чтобы эти программы давали 33 верных двоичных знака функции (у чисел в машине М-20 36-разрядная мантисса). Исходные программы, описанные в [1], исключая $\operatorname{arctg} x$, не удовлетворяли последнему требованию. Новые СП дают 33 верных двоичных знака функции везде, где это возможно (например, не имеет смысла требовать, чтобы СП $\sin x$ давала 33 верных двоичных знака вблизи $x = \pi$).

Из приводимых ниже СП программы для e^x, $\ln x$ и $\operatorname{arctg} x$ постоянно эксплуатируются в ВЦ ОИЯИ с начала 1963 года. Остальные программы составлены в последнее время и прошли лишь опытную проверку.

А.А. Корнейчук и А.С. Марков составили СП для функций e^x, $\ln x$, x^y $\operatorname{arctg} x$, Н.Ю. Ширикова – для функций $\sin x$, $\arcsin x$, $\operatorname{tg} x$. В составлении одного из предварительных вариантов СП x^y участвовала В.М. Ривина из Вычислительного центра Сибирского отделения АН СССР. СП $\Gamma(1 + x)$ составлена А.С. Марковым.

§ 1. Характеристики программ

Все приводимые здесь программы оформлены как стандартные в системе ИС-2. Для обращения задаются две подряд идущие команды:

$\kappa - 1$	0 0 0	16	κ	7501	7610	
κ	$\pi_1 0 \pi_3$	00	$\langle x \rangle$	$N_{СП}$	$\langle y \rangle$	;

где

$\langle x \rangle + \pi_1$ [PA] – адрес аргумента x ;

$\langle y \rangle + \pi_3$ [PA] – адрес результата $y = f(x)$ ($f(x)$ находится также в яч. 0001);

κ – адрес второй строки обращения;

$N_{СП}$ – номер программы.

Обращение к СП x^y имеет особенность: $\langle y \rangle + \pi_3$ [PA] является адресом второго аргумента y , а результат получается только в ячейке 0001. Рабочие ячейки всех программ – 0001-0003.

Программы имеют следующие технические характеристики:

	e^x	$\ln x$	x^y	$\sin x$	$\arcsin x$	$\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{arc\,tg}\, x$	$\Gamma(1+x)$
Номер программы	0003	0004	000I	0005	0006	00II	00I2	
Длина программы ($n-1$)	27	34	67	23	27	25	003I	0037
Время работы счетной части программы в среднем, мксек. . .	970	I352	2232	970	3590	I200	I300	3400
Общее время работы программы в среднем, мксек	I406	I788	2976	I326	4045	I656	I756	3856

§ 2. Вычисление e^x

Описание алгоритма

e^x представляется в следующем виде:

$$e^x = 2^z = 2^{[z]} (e^u)^2, \qquad (2.1)$$

где $z = \frac{x}{\ln 2}$, $[z]$ – ближайшее к z целое число, $\{z\} = z - [z]$ – дробная часть $(|\{z\}| \leq ½$, $u = \{z\}\frac{\ln 2}{2}$, $|u| < 0{,}1733$).

Для вычисления e^u используется дробно-рациональное приближение

$$e^u \approx \frac{120 + 12u^2 + u(60 + u^2)}{120 + 12u^2 - u(60 + u^2)} \qquad (2.2)$$

(см./2/, стр 423). Разложение по степеням u правой части (2) совпадает с разложением e^u до u^6 включительно. Ошибка дробно-рационального приближения (2) – порядка $1{,}1 \times 10^{-5} u^7$ /7/ и при $|u| < 0{,}1733$ не превосходит 2^{-34}.

Особенности программы

Программа дает 33 верных двоичных знака e^x .

Если ближайшее целое к числу $\frac{x}{\ln 2}$ меньше – 64, в качестве результата выдается нуль; если больше 64 – наступает авост (по 26-й операции).

По сравнению с аналогичной программой В.И. Собельмана (см./1/, стр. 22), где использовано полиномиальное приближение для e^x , данная программа работает быстрее (на 25%), дает более точный результат (33двоичных знака против 30), но длиннее программы В.И. Собельмана на три кода.

СП – 0003

2000	0I6	2006	7602	7554	БЗА$_I$
200I	344	0000	0000	0I00	–64
2002	I0I	56I2	5073	I226	$b_1 = \frac{1}{\ln 2}$
2003	II4	5502	5266	I370	b_2
2004	I06	4247	7654	276I	b_3
2005	III	7634	I647	55I0	b_4
2006	005	000I	2002	7625	$\frac{x}{\ln 2} = z$
2007	042	200I	7625	0002	$-64 - [z]$ ненормализованное
20I0	I7I	0000	2025	0000	уход при $[z] \leq -64$
20II	002	200I	0002	0003	$[z]$
20I2	026	20I0	0003	0000	переполнение при $[z] \geq 64$
20I3	002	7625	0003	7625	$\{z\}$

20I4	074	7752	0002	760I	сдвиг $[z]$ в порядок
20I5	005	7625	7625	0003	$\{z\}^2$
20I6	005	2004	0003	000I	$b_3\{z\}^2$
20I7	00I	2003	000I	000I	$b_2 + b_3\{z\}^2$
2020	00I	2005	0003	0003	$b_4 + \{z\}^2$
202I	005	0003	7625	0003	$b_4\{z\} + \{z\}^3$
2022	00I	000I	0003	7625	числитель (2)
2023	002	000I	0003	000I	знаменатель (2)
2024	004	7625	000I	7554	$2^{\frac{1}{2}\{z\}}$
2025	005	7554	7554	000I	$2^{\{z\}}$
2026	026	760I	000I	000I	e^x
2027	0I6	7606	7600	760I	уход на БЗР
	506	4I25	665I	I676	контрольная сумма

§ 3. Вычисление $\ln x$

Описание алгоритма

Пусть $x = q \cdot 2^p$, где $½ \le q < 1$. Тогда

$$\ln x = \begin{cases} p \ln 2 + \ln q & \text{при } \frac{3}{4} \le q \le 1 , \\ (p-1)\ln 2 + \ln 2q & \text{при } ½ < q < 3/4 . \end{cases} \qquad (3.1)$$

Для вычисления $\ln r$ ($r = q$ или $2q$) используется следующее дробно-рациональное приближение:

$$\ln r \approx z \left(c_0 + \frac{c_1}{d_1 + z^2} + \frac{c_2}{d_1 + z^2} \right), \qquad (3.2)$$

где $z = \dfrac{1-r}{1+r}$ $(|z| < 1/5)$. Приближение (3.2) получено интегрированием производной логарифма по квадратурной формуле Гаусса с пятью узлами:

$$\ln r = \ln \frac{1-z}{1+z} = \int_{-z}^{z} \frac{d\xi}{\xi - 1} = z \int_{-1}^{1} \frac{dx}{zx - 1} \approx \qquad (3.3)$$

$$= z \sum_{i=-2}^{2} \lambda_i \frac{1}{x_i z - 1} = z\left(\lambda_0 + \frac{2\lambda_1}{x_1^2 z^2 - 1} + \frac{2\lambda_2}{x_2^2 z^2 - 1}\right).$$

Таким образом,

$$c_0 = \lambda_0 ; \quad c_i = \frac{2\lambda_i}{x_i^2} ; \quad d_i = -\frac{1}{x_i^2} ; \quad i = 1,2 . \qquad (3.4)$$

Коэффициенты λ_i и узлы x_i формулы Гаусса взяты из /3/.

Разложения по степеням z левой и правой частей (3.2) совпадают до z^9 включительно. Абсолютная погрешность формулы (3.2) при $|z| < \frac{1}{5}$ не превосходит 3×2^{-36}.

Особенности программы

Программа дает 33 верных двоичных знака $\ln x$. Вблизи $x = 1$ относительная точность не понижается. При $x \le 0$ происходит останов в ячейке 7701 по команде

7 77 7777 7777 0000.

По сравнению с аналогичной программой В.В. Ковды (см. /1/, стр. 25), где использовано полиномиальное приближение для $\ln x$, данная программа работает немного быстрее (на 10%), дает более точный результат (33 двоичных знака против 30 и меньше, которые дает программа В.В. Ковды); однако данная программа длиннее программы В.В. Ковды на два кода.

СП - 0004

2000	0I6	200I	7602	7554	БЗА$_I$
200I	002	77I4	000I	000I	$-x$
2002	076	2027	770I	7554	$C_0 \to \Sigma$; ПУ на останов при $x \le c$
2003	0I3	77II	000I	0002	q
2004	074	7630	000I	0003	000 0000 0000 700+p
2005	053	0003	2034	0003	I44 0000 0000 700+p
2006	055	000I	77I6	0000	$\omega = c$, если $q \geqslant \frac{3}{4}$
2007	076	2034	20I2	7544	ПУ в 20I2 при $\omega = 0$
20I0	026	776I	0002	0002	$2q$
20II	0I3	2034	772I	7544	

20I2	022	0003	7544	0003	получается p или p-I
20I3	002	776I	0002	000I	$I - \tau$
20I4	00I	776I	0002	0002	$I + \tau$
20I5	004	000I	0002	000I	z
20I6	005	000I	000I	0002	z^2
20I7	005	0003	7755	0003	$p \ln 2$ или $(\bar{\bar{p}}-1)\ln 2$
2020	40I	2032	0002	7544	$z\left(c_0+\frac{c_1}{d_1+z^2}+\frac{c_2}{d_2+z^2}\right)$
202I	404	2030	7544	7544	
2022	00I	7554	7544	7554	
2023	II2	000I	2020	000I	
2024	005	7554	000I	000I	
2025	00I	0003	000I	000I	$\ln x$
2026	0I6	7606	7600	760I	БЗР
2027	300	4432	I263	6II5	Co
2030	I00	4473	4673	I735	C_I
203I	I02	6464	5466	732I	C_2
2032	30I	4676	0I56	5327	d_1
2033	302	67I3	5I63	2477	d_2
2034	I44	0000	0000	0700	const
	377	64I5	5520	6II5	контрольная сумма

§ 4. Вычисление x^y

Описание алгоритма

$$x^y = 2^{y \log_2 x} , \qquad (4.1)$$

вычисляется $\log_2 x$ и затем $2^{y \log_2 x}$. Для вычисления $\log_2 x$ и 2^z применены алгоритмы, основанные на дробно-рациональных приближениях.

Программа позволяет возводить положительное число в любую степень, нуль – в положительную степень.

Особенности программы

Если $x = 0$, $y > 0$, в качестве результата пограмма выдает нуль. Если $x < 0$ или $x = 0$, $y \leq 0$, происходит останов в ячейке 7701 по команде

777 7777 7777 0000.

Если $y \log_2 x \leq -64$, в качестве результата выдается нуль; если $y \log_2 x \geq 64$, происходит авост (по 26-й операции).

По сравнению с программой В.И. Собельмана для x^y (см./1/, стр. 29), где использованы полиномиальные приближения для логарифма и экспоненты, данная программа работает примерно на 25% быстрее и имеет большую точность. В данной программе нуль правильно возводится в степень (в программе В.И. Собельмана при возведении нуля в любую степень, в том числе и отрицательную, в качестве результата выдается нуль). Данная программа длиннее программы В.И. Собельмана на четыре кода.

СП – 0001

2000	0I6	20I4	7602	7554	$БЗА_I$
200I	000	0000	00I2	0000	
2002	300	644I	562I	6434	a_0
2003	I00	652I	7564	07I6	a_1
2004	I03	4606	5220	2026	a_2
2005	30I	4676	0I56	5327	d_1
2006	302	67I3	5I63	2477	d_2
2007	I44	0000	0000	0700	
20I0	344	0000	0000	0I00	–64
20II	II4	5502	5266	I370	b_2
20I2	I06	4247	7654	276I	b_3
20I3	III	7634	I647	55I0	b_4
20I4	0I6	20I5	76II	7554	$БЗА_2$
20I5	002	77I4	0002	0002	$-x$; $\omega = 1$, если $x > 0$
20I6	036	2002	2024	7554	$a_0 \to \Sigma$; ПУ в 2024 при $x > 0$
20I7	002	0000	0002	0002	x ; $\omega = 1$, если $x < 0$

2020	036	0000	770I	0000	ПУ в яч.770I на останов при $x<0$
202I	002	0000	000I	0000	$\omega=0$, если $y\le 0$
2022	076	0000	770I	760I	ПУ в яч.770I при $y\le 0$
2023	056	0000	2065	7554	ПУ на засылку $x^y=0$ при $y\le 0$
2024	0I3	77II	0002	0003	$q=\tau$ (мантисса с порядком I00)
2025	074	7630	0002	7607	700+р в 3 адр.(р–порядок x)
2026	053	7607	2007	7607	I44 0000 0000 700+р
2027	055	0002	77I6	0000	$\omega=0$, если $q\geq\frac{3}{4}$
2030	076	2007	2033	7544	ПУ в яч.2033 при $q\geq\frac{3}{4}$
203I	026	776I	0003	0003	$2q=\tau$
2032	0I3	2007	772I	7544	I44 0000 0000 70I
2033	022	7607	7544	7607	получается р или р–I
2034	002	776I	0003	0002	$1-\tau$
2035	00I	776I	0003	0003	$1+\tau$
2036	004	0002	0003	0002	z
2037	005	0002	0002	0003	z^2
2040	40I	2005	0003	7544	
204I	404	2003	7544	7544	
2042	00I	7554	7544	7554	$z\left(c_0+\frac{c_1}{d_1+z^2}+\frac{c_2}{d_2+z^2}\right)$
2043	II2	000I	2040	000I	
2044	005	7554	0002	0002	
2045	00I	7607	0002	0002	$\log_2 x$
2046	005	000I	0002	7625	$y\log_2 x=\xi$
2047	042	20I0	7625	0003	$-64-[\xi]$ ненормализованное
2050	I7I	0000	2065	0000	уход в 2065 при $[\xi]\le -64$
205I	002	20I0	0003	7607	$[\xi]$
2052	026	2050	7607	0000	переполнение при $[\xi]\geq 64$
2053	002	7625	7607	7625	$\{\xi\}$
2054	074	7752	0003	760I	сдвиг $[\xi]$ в порядок

2055	005	7625	7625	7607	$\{\xi\}^2$
2056	005	20I2	7607	000I	$b_3\{\xi\}^2$
2057	00I	20II	000I	000I	$b_2 + b_3\{\xi\}^2$
2060	00I	20I3	7607	7607	$b_4 + \{\xi\}^2$
206I	005	7607	7625	7607	$b_4\{\xi\} + \{\xi\}^3$
2062	00I	000I	7607	7625	
2063	002	000I	7607	000I	$2^{\frac{1}{2}\{\xi\}}$
2064	004	7625	000I	7554	
2065	005	7554	7554	000I	$2^{\{\xi\}}$
2066	026	760I	000I	000I	x^y
2067	0I6	76I0	7600	760I	уход в ИС-2, оттуда - в основную программу
	I4I	6302	7270	66I6	контрольная сумма

Для того, чтобы программа могла возводить отрицательные числа в целую степень, в нее необходимо внести следующие изменения:

2020	036	0000	207I	2067	ПУ в 207I при $x < 0$.
202I	002	0000	000I	000I	
2067	000	0000	0000	0000	место для команды смены знака y x^y
2070	0I6	76I0	7600	760I	уход в ИС-2, оттуда - в основную программу
207I	06I	000I	2007	760I	получение целой части y
2072	002	760I	2007	7607	
2073	0I5	7607	000I	0000	$\omega = 1$, если y - целое
2074	076	0000	770I	0000	уход на останов при нецелом y
2075	055	760I	772I	0000	$\omega = 1$, если y - четное
2076	036	0000	2024	0000	
2077	056	202I	2024	2067	посылка команды смены знака
	530	7540	I374	24I0	контрольная сумма

§ 5. Вычисление $\sin x$

Описание алгоритма

Для вычисления $\sin x$ сводим аргумент к отрезку

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ , } \sin x = (-1)^N \sin(x - N\pi) = (-1)^N \sin\pi(\frac{x}{\pi} - N) = (-1)^N \sin \pi z \text{ ,} \qquad (5.1)$$

где $N = [\frac{x}{\pi}]$ – ближайшее к $\frac{x}{\pi}$ целое число;

$$z = \frac{x}{\pi} - N \text{ , т.е. } |z| \le ½ .$$

Для вычисления $\sin \pi z$ использован полином одиннадцатой степени, дающий 33 верных двоичных знака $\sin x$:

$$\sin \pi z = a \; z + a_3 z^3 + \dots + a_{11} z^{11} = Q(z) . \qquad (5.2)$$

Коэффициенты полинома

$$a_1 = \pi = + 3,14159265358,$$
$$a_3 = - 5,167712768889,$$
$$a_5 = 2,550163418985,$$
$$a_7 = - 0,599253112653,$$
$$a_9 = 0,082054060945,$$
$$a_{11} = - 0,0070337087737.$$

Полином $Q(z) = zP(z^2) - \frac{6}{22} T^*_{11}(z)$,

где $zP(z^2)$ – полином , который использовал В.В. Ковда (см./1/, стр. 31) для вычисления $\sin x$. Коэффициент при z в полиноме $zP(z^2)$ отличался от π на 6×2^{-34}.

$T^*_{11}(z)$ – полином Чебышева, наименее уклоняющийся от 0, приведенный к отрезку $[-½ ; + ½]$.

Особенности программы

По сравнению с аналогичной программой В.В. Ковды данная программа короче на один код и имеет несколько лучшую точность вычисления $\sin x$.

СП – 0005

2000	0I6	2007	7602	7554	БЗА$_I$
200I	27I	7I47	5406	447I	a_{11}
2002	075	5200	5765	5042	a_9
2003	300	4626	4246	72I6	a_7

2004	I02	5063	2740	5020	a_5
2005	303	5I25	6747	I263	a_3
2006	I02	6220	7732	5042	a_1
2007	004	000I	2006	000I	$\frac{2}{\pi}$
20I0	04I	000I	7752	0003	выделение ближайшего целого
20II	002	0003	7752	0002	
20I2	002	000I	0002	0002	получение $z = \frac{x}{\pi} - N$
20I3	055	0003	772I	0000	$\omega = 1$, четное N
20I4	036	200I	20I6	0003	$\omega = c$, нечетное N
20I5	0I5	77I2	0002	0002	меняется знак у z
20I6	005	0002	0002	000I	z^2
20I7	005	000I	0003	0003	подсчет полинома $\frac{Q(z)}{z}$
2020	20I	0003	2002	0003	
202I	II2	0004	20I7	000I	
2022	005	0003	0002	000I	$\sin x$
2023	0I6	7606	7600	760I	БЗР
	I66	54I5	I036	3727	контрольная сумма

§ 6. Вычисление arcsin x

Описание алгоритма

Арксинус вычисляется по формуле

$$\arcsin x = \operatorname{sign} x \, 2^n \arcsin |x_n| , \qquad (6.1)$$

где

$$x_n^2 = \frac{x_{n-1}^2}{2(1 + \sqrt{1 - x_{n-1}^2})} ; \quad x_0^2 = x^2 . \qquad (6.2)$$

Итерации по формуле (6.2) заканчиваются, когда $x_n^2 \leq 2^{-12}$. Для вычисления $\arcsin|x_n|$ использованы три первых члена ряда Тейлора:

$$\arcsin x \approx x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 = \tfrac{1}{2}x\left(2 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{20}x^4\right). \qquad (6.3)$$

Таким образом,

$$\arcsin x \approx \operatorname{sign} x\, 2^{n-1}\,|x_n|\left(2 + \frac{1}{3}x_n^2 + \frac{3}{20}x_n^4\right). \qquad (6.4)$$

Программа дает 33 верных двоичных цифры $\arcsin x$. Описанный выше алгоритм изменен по сравнению с приведенным в /1/ с целью сокращения времени счета. Отличие состоит в том, что мы вычисляем x_n^2 по x_{n-1}^2, а в /1/ – x_n по x_{n-1}, что требует на каждой итерации дополнительного умножения и извлечения корня. Кроме того, чтобы избежать потери точности, когда $|x|$ близок к 1 $(1-|x| \approx 2^{-12}-2^{-24})$, $1-x^2$ на первой итерации вычисляется, как $(1-x)(1+x)$.

Особенности программы

По сравнению с аналогичной программой В.И. Собельмана (см. /1/, стр. 35) данная программа работает быстрее примерно на 25%, дает большую точность (33 двоичных знака вместо 30 в /1/); однако данная программа длиннее на три кода.

СП – 0006

2000	0I6	2002	7602	7554	БЗА$_I$
200I	076	463I	463I	4632	$\frac{3}{20}$
2002	055	000I	77I2	0003	sign x
2003	00I	776I	000I	7544	$1+x$
2004	002	776I	000I	7554	$1-x$
2005	005	000I	000I	0002	x^2
2006	005	7544	7554	000I	$1-x^2$
2007	056	0000	20I5	0000	
20I0	044	000I	0000	000I	$\sqrt{1-x^2}$
20II	00I	776I	000I	000I	$2(1+\sqrt{1-x^2})$
20I2	026	776I	000I	000I	

2013	004	0002	0001	0002	x_n^2
2014	002	7761	0002	0001	$1-x_n^2$
2015	026	7750	0002	0000	$\omega=1$, если $x_n^2>2^{-12}$
2016	531	0000	2010	0001	
2017	005	2001	0002	0001	$2+\frac{1}{3}x_n^2+\frac{3}{20}x_n^4=P(x_n)$
2020	001	0001	7765	0001	
2021	005	0001	0002	0001	
2022	001	7762	0001	0001	
2023	044	0002	0000	0002	$\lvert x_n\rvert$
2024	005	0001	0002	0001	
2025	406	0076	0001	0001	
2026	075	0001	0003	0001	присвоение знака
2027	016	7606	7600	7601	БЗР
	753	0143	7764	3567	контрольная сумма

§ 7. Вычисление tg x

Описание алгоритма

Для вычисления $\operatorname{tg} x$ аргумент сводится к отрезку

$$[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}], \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x - N\frac{\pi}{2}) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(\frac{2x}{\pi} - N),$$

где $N = [\frac{2x}{\pi}]$ –ближайшее к $\frac{2x}{\pi}$ целое число. Обозначим $z = \frac{2x}{\pi} - N$, $|z| \le ½$, тогда

$$\operatorname{tg} x = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z, & \text{если } N = 2k, \\ -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z}, & \text{если } N = 2k+1 . \end{cases} \qquad (7.1)$$

Для вычисления $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z$ используется разложение в цепную дробь (см. /4/, стр.120):

$$\operatorname{tg} x \approx \frac{x}{1} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{7} - \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{11}, \qquad (7.2)$$

дающее 33 верных двоичных знака $\operatorname{tg} x\ (|x| < \frac{\pi}{4})$. Разложение (7,2) приведено к виду:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z = z\left(\frac{c_1}{z^2+d_1} + \frac{c_2}{z^2+d_2} + \frac{c_3}{z^2+d_3}\right), \qquad (7.3)$$

где:

$c_1 = -\ 10{,}6617555028$, $\qquad d_1 = -\ 74{,}866722903$;

$c_2 = -\ 1{,}2732416632$, $\qquad d_2 = -\ 1{,}0000002640$;

$c_3 = -\ 1{,}4340180536$, $\qquad d_3 = -\ 9{,}2430710924$.

Особенности программы

По сравнению с аналогичной программой В.И. Собельмана /2/, основанной на полиномиальном приближении и дающей 30 верных двоичных цифр $\operatorname{tg} x$, данная программа вычисляет $\operatorname{tg} x$ с 33 верными двоичными цифрами. Длина программы и время счетной части такие же, как у программы В.И. Собельмана.

СП - 0011

2000	0I6	20I0	7602	7554	БЗА$_I$
200I	304	525I	32I4	7403	c_1
2002	30I	5057	4625	I472	c_2
2003	30I	5570	6747	242I	c_3
2004	307	4533	5703	0653	d_1
2005	30I	4000	0002	I560	d_2
2006	304	4476	I636	407I	d_3
2007	30I	4000	0000	0000	-1
20I0	004	000I	7756	000I	$\frac{2x}{\pi}$
20II	04I	000I	7752	0002	
20I2	002	0002	7752	0003	
20I3	002	000I	0003	000I	z
20I4	005	000I	000I	0003	z^2
20I5	20I	0003	2004	7625	
20I6	404	200I	7625	7625	$\sum_{i=1}^{3}\frac{c_i}{z^2+d_i}$
20I7	00I	760I	7625	760I	
2020	II2	0002	20I5	000I	

202I	005	760I	000I	000I	$tg \frac{\pi}{2} z$
2022	055	0002	772I	0000	
2023	036	0000	2025	0000	
2024	004	2007	000I	000I	
2025	0I6	7606	7600	760I	БЗР
	704	663I	3535	III6	контрольная сумма

§ 8. Вычисление $\operatorname{arctg} x$

Описание алгоритма

Прежде всего аргумент делается положительным:

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{sign} x \operatorname{arctg} |x| \ . \tag{8.1}$$

После этого многократным применением преобразования

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \tfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\left(2 - \frac{5}{x+2}\right) \tag{8.2}$$

аргумент приводится к интервалу $|x| < 0{,}28$, и для вычисления арктангенса используется дробно-рациональное приближение

$$\operatorname{arctg} x \approx x\left(c_0 + \frac{c_1}{d_1 + x^2} + \frac{c_2}{d_2 + x^2}\right), \tag{8.3}$$

дающее 33 верных двоичных знака $\operatorname{arctg} x$.

Для приведения аргумента к интервалу $|x| < 0{,}28$ требуется не более трех преобразований (8.2).

Дробно-рациональное приближение (8.3) получено следующим образом. Сначала производная арктангенса интегрировалась по квадратурной формуле Гаусса с 5-ю узлами:

$$\operatorname{arctg} x = \tfrac{1}{2} \int_{-x}^{x} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{z}{2} \int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{1+z^2\xi^2} \approx \frac{z}{2} \sum_{i=-2}^{2} \lambda_i \frac{1}{1+z^2 x_i^2} =$$

$$= z\left(\frac{\lambda_0}{2} + \frac{\lambda_1}{1+z^2x_1^2} + \frac{\lambda_2}{1+z^2x_2^2}\right) = z\left(c'_0 + \frac{c'_1}{d'_1+z^2} + \frac{c'_2}{d'_2+z^2}\right), \tag{8.4}$$

затем коэффициенты c'_i, d'_i варьировались так, чтобы уменьшить максимум погрешности, который достигался при самых больших значениях аргумента ($|z| \approx 0{,}28$). Из-за этого формула (8.4) давала только 29 верных двоичных знаков; после подбора коэффициентов точность формулы (8.3) составила 33 двоичных знака.

Коэффициенты λ_i и узлы x_i квадратурной формулы Гаусса взяты из /3/.

Особенности программы

Программа дает 33 верных двоичных знака $\mathrm{arctg}\,x$.

По сравнению с аналогичной программой В.И. Собельмана (см. /1/, стр. 37), где использован другой алгоритм приведения аргумента к малому интервалу и полиномиальное приближение для $\mathrm{arctg}\,x$ в этом малом интервале, данная программа работает в три раза быстрее, но она длиннее программы В.И. Собельмана на три кода.

СП - 0012

2000	0I6	200I	7602	7554	БЗА$_I$
200I	003	000I	0000	0002	$\lvert x\rvert \to z$
2002	056	0000	2007	7544	$0 \to S$
2003	00I	0002	7762	7625	$z+2$
2004	004	2023	7625	7625	$\frac{5}{z+2}$
2005	002	7762	7625	0002	$z' = 2 - \frac{5}{z+2}$
2006	00I	7544	203I	7544	$S + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} \to S$
2007	003	0002	2024	0000	$\omega = 1$, если $\lvert z'\rvert < 0{,}28$
20I0	076	2024	2003	0003	$c_0 \to \Sigma$
20II	005	0002	0002	7554	z^2
20I2	40I	2025	7554	7625	$d_i + z^2$
20I3	404	2027	7625	7625	$\frac{c_i}{d_i+z^2}$
20I4	00I	7625	0003	0003	$\Sigma + \frac{c_i}{d_i+z^2} \to \Sigma$
20I5	II2	000I	20I2	000I	
20I6	005	0003	0002	0003	$z\Sigma$
20I7	00I	0003	7544	0003	$z\Sigma + S = \mathrm{arctg}\,\lvert x\rvert$
2020	055	000I	77I2	0002	присвоение знака
202I	075	0003	0002	000I	

2022	0I6	7606	7600	760I	БЗР
2023	I03	5000	0000	0000	5
2024	077	4365	I563	6I53	c_0
2025	I0I	47I4	3557	5655	d_1
2026	I02	7035	0II4	2075	d_2
2027	077	460I	I056	I652	c_1
2030	I0I	6572	7566	7I64	c_2
203I	077	7326	I470	I26I	$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$
	44I	I622	0254	6267	контрольная сумма

§ 9. Вычисление $\Gamma(1+x)$

Описание алгоритма

Если $|x| \leq \frac{1}{2}$, то используется дробно-рациональное приближение

$$\Gamma(1+x) \approx \frac{\sum_{k=0}^{6} p_k x^k}{\sum_{k=0}^{6} q_k x^k}, \tag{9.1}$$

дающее не менее 33 верных двоичных знаков $\Gamma(1+x)$.

При $x > \frac{1}{2}$ используется соотношение

$$\Gamma(1+x) = x(x-1)\dots(1+x-n)\Gamma(1+x-n), \tag{9.2}$$

где n –ближайшее целое к x ; $|x-n| \leq \frac{1}{2}$. Для вычисления $\Gamma(1+x-n)$ применяется формула (9.1).

Если $x < -\frac{1}{2}$, то используется соотношение

$$\Gamma(1+x) = \frac{\Gamma(1+x+n)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}, \tag{9.3}$$

где n – ближайшее целое к $-x$; $|x+n| \leq \frac{1}{2}$.

Для вычисления $\Gamma(1+x+n)$ применяется формула (9.1). Приближение (9.1) получено следующим образом. Отрезок ряда для $\Gamma(1+x)$ (см. /1/, стр. 949) был преобразован в цепную дробь по методу Висковатова (см. /4/, стр. 31). Затем была взята

13-я подходящая дробь и тождественными преобразованиями приведена к виду (9.1).

Особенности программы

Если $x > 20,4$, происходит авост на операции 0,5.

Если x – отрицательное целое число, произойдет авост на операции 04. Если $x < -21,88$, в качестве результата программа выдает нуль.

По сравнению с программой В.Л. Каткова (см. /6/), где использовано полиномиальное приближение для $\Gamma(x)$, данная программа работает несколько быстрее, дает гораздо большую точность (33 двоичных знака против 22), короче последней на 13 кодов и не дает ненужных авостов, когда x – большое отрицательное число.

СП – $\Gamma(1+x)$

2000	0I6	200I	7602	7554	$БЗА_I$
200I	056	776I	2004	0002	$1 \to a$
2002	005	0002	000I	0002	$ax \to a$
2003	002	000I	776I	000I	$x-1 \to x$
2004	002	7764	000I	0000	$\omega=0$ при $x \le \frac{1}{2}$
2005	036	2023	2002	7544	$p_c \to P$
2006	056	0000	20II	0000	
2007	00I	000I	776I	000I	$x+1 \to x$
20I0	004	0002	000I	0002	$\frac{a}{x+1} \to a$
20II	00I	000I	7764	0000	$\omega=0$ при $x+\frac{1}{2} \ge 0$
20I2	036	776I	2007	7554	$q_c=1 \to Q$
20I3	005	7544	000I	7544	xP
20I4	40I	2024	7544	7544	$p_i + xP \to P$
20I5	005	7554	000I	7554	xQ
20I6	40I	2032	7554	7554	$q_i + xQ \to Q$
20I7	II2	0005	20I3	000I	
2020	004	7544	7554	000I	$\frac{P}{Q}$
202I	005	0002	000I	000I	$a\frac{P}{Q} = \Gamma(1+x)$
2022	0I6	7606	7600	760I	БЗР
2023	276	5457	I547	3II5	p_c

2024	30I	5620	7305	2436	p_5
2025	304	5035	6II6	6330	p_4
2026	306	5370	0254	I54I	p_3
2027	3I0	4707	4I74	2357	p_2
2030	3II	5262	I262	5243	p_1
203I	3I2	4I33	43II	7I72	p_0
2032	303	6273	3423	I264	q_5
2033	303	74II	7503	5026	q_4
2034	I07	7030	30I3	3257	q_3
2035	302	6333	III7	5I54	q_2
2036	3I2	5054	04I5	0076	q_1
2037	3I2	4I33	43II	7I72	q_0
	257	7724	6354	0705	контрольная сумма.

Литература

1. Библиотека стандартных программ. Под редакцией М.Р. Шура-Бура. ЦБТИ, М., 1961.
2. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1961.
3. В.И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. Физматгиз, М., 1959.
4. А.Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. ГИТТЛ, М., 1956.
5. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.
6. В.Л. Катков. Стандартная программа вычисления $\Gamma(x)$. Новосибирск, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1965 г.