ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2222

С.Б. Рубин

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ САМОСОГЛАСОВАННЫХ ПАРАМЕТРОВ ЗАМКНУТОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С БОЛЬШИМ ТОКОМ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1965

2222

С.Б. Рубин

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ САМОСОГЛАСОВАННЫХ ПАРАМЕТРОВ ЗАМКНУТОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С БОЛЬШИМ ТОКОМ

Введение

При решении самосогласованных задач об определении стационарных состояний ограниченных в пространстве систем заряженных частиц независимо от того, рассматривается ли кинетическое или гидродинамическое приближение, большую трудность представляет определение свободной границы системы. Примером задач подобного рода является определение формы сгустка заряженных частиц в фокусирующем внешнем электромагнитном поле, определение поперечного сечения замкнутого электронного пучка в накопительном кольце или толщины замкнутого самофокусирующего пучка и т.п.

Ниже на примере замкнутого пучка, состоящего из вращающихся релятивистских электронов, удерживаемых внешним магнитным полем, рассматривается один из возможных подходов к таким задачам.

Исходная система самосогласованных уравнений стационарного состояния (без учета столкновений) приводится в работе Яркового[/1/], где с помощью функции распределения, зависящей от двух, известных в этом случае интегралов движения одной частицы, получены уравнения, связывающие самосогласованное поле системы с плотностями заряда и тока. Задача заключается в определении всех параметров системы, т.е. распределения в пространстве зарядов, токов, поля. Для случая пучков с малым отношением радиуса кругового поперечного сечения к радиусу большой окружности и при ограничениях, накладываемых на величину "поперечной энергии" и на полное число частиц, задача рассмотрена в[/2/].

Способ, излагаемый ниже[x/], не требует жестких ограничений на отношение радиусов и на величину "поперечной энергии". В этом случае форма поперечного сечения уже отлична от круговой и более сильно зависит от внешней фокусировки. Несмотря на некоторую громоздкость вычислений, определение формы пучка в заданном фокусирующем магнитном поле, распределение плотностей и полей в конечном счете сводится к решению системы алгебраических уравнений. Решение этой системы, а также, возможно, весь ход

[x/] Необходимо отметить, что изложенное ниже является лишь способом построения решения, доказательством его существования может служить лишь физическая реализация системы.

предварительных вычислений, могут быть запрограммированы для выполнения на счетной машине.

Уравнения для самосогласованного поля однокомпонентной системы в цилиндрических координатах r, ϕ, z имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=-4\pi e n\,. \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 a^{(o)}_\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial a^{(o)}_\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2 a^{(o)}_\phi}{\partial z^2}-\frac{a^{(o)}_\phi}{r^2}=-\frac{4\pi}{c}j_\phi\,, \tag{2}$$

$$n=\frac{2\pi s}{c^2 r}\left(mc^2\Gamma-e\Phi\right)\sigma[\chi]\,. \tag{3}$$

$$j_\phi=\frac{2\pi s e}{cr}\left(\frac{mc\mu}{r}-\frac{e}{c}a_\phi\right)\sigma[\chi]\,. \tag{4}$$

$$\chi\equiv\left(mc^2\Gamma-e\Phi\right)^2-m^2c^4-\frac{c^2}{r^2}\left(mc\mu-\frac{e}{c}ra_\phi\right)^2. \tag{5}$$

$$\sigma[\chi]=\begin{cases}1, & \chi>0\\ 0, & \chi\le 0\end{cases}; \tag{6}$$

где Φ – электрический потенциал; $a^{(o)}_\phi$ – компонента векторного потенциала собственного магнитного поля частиц ($a^{(o)}_z=a^{(o)}_r=0$ в силу симметрии системы); a_ϕ соответствует потенциалу суммарного (собственного плюс внешнего) магнитного поля; n –плотность числа частиц; j_ϕ–плотность тока; s – нормировочный параметр, зависящий от полного числа частиц системы; $mc^2\Gamma$, $mc\mu$ – константы интегралов движения одночастичной задачи, соответствующие гамильтониану и обобщенному моменту заряженной частицы, движущейся в аксиально-симметричном электромагнитном поле; e –заряд электрона.

Внешнее электрическое поле отсутствует; в силу симметрии $\frac{\partial}{\partial\phi}\equiv 0$.
Из соотношений (3)-(6) следует /1/, что выражение

$$\left(mc^2\Gamma-e\Phi\right)^2-m^2c^4-\frac{c^2}{r^2}\left(mc\mu-\frac{e}{c}ra_\phi\right)^2=0 \tag{7}$$

является уравнением границы системы. Неравенство $\chi>0$ отделяет область Γ, в которой плотности заряда и тока отличны от нуля, от остальной области пространства,

в которой частицы отсутствуют. Область Γ, конечно, является трехмерной, однако для краткости везде в дальнейшем через Γ обозначено двухмерное сечение этой области (в координатах (r, z), $r>0$). Координата ϕ ($0\le\phi\le 2\pi$), где это необходимо, подразумевается.

В области Γ уравнения (1), (2) с учетом (3), (4), являются линейными. Вне области Γ (1), (2) – уравнения поля для свободного пространства. Главная трудность заключается в необходимости решать граничную задачу, в которой сама граница определяется соотношением (в данном случае соотношением (7)) между искомыми функциями. Ниже излагается возможный способ подхода к такой задаче.

I

Пусть система представляет замкнутый электронный пучок. На рисунке 1 представлено поперечное сечение пучка (вообще говоря, не круговое). Расстояние $00'$ от начала координат до некоторой условной центральной точки обозначим через D и примем за радиус большой окружности. Введем около $0'$ местную полярную систему координат (ρ, ψ). Тогда

$$\begin{aligned} z&=\rho\sin\psi\,,\\ r&=D+\rho\cos\psi\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнение границы Σ представится в виде

$$\rho_\Sigma=\rho(\psi)\,,\qquad 0\le\psi\le 2\pi\,.\qquad 0\le\phi\le 2\pi\,. \tag{9}$$

Внутри Σ заключена область Γ, занимаемая частицами. В области Γ потенциал внешнего магнитного поля $a^{(0)}_\phi$ удовлетворяет однородному уравнению (2), поэтому в (2) вместо $a^{(o)}_\phi$ можно подставить величину $a_\phi=a^{(o)}_\phi+a^{(0)}_\phi$.

Пусть на границе Σ функции a_ϕ, Φ принимают значения

$$[a_\phi]_\Sigma=a_\Sigma(\psi)\,,\qquad [\Phi]_\Sigma=\Phi_\Sigma(\psi)\,. \tag{10}$$

Введем функции u, v с помощью соотношений

$$\Phi(r,z)=\Phi(\rho,\psi)=u(\rho,\psi)+\frac{\rho}{\rho(\psi)}\Phi_\Sigma(\psi)\,, \tag{11}$$

$$a_\phi(r,z)=a_\phi(\rho,\psi)=v(\rho,\psi)+\frac{\rho}{\rho(\psi)}a_\Sigma(\psi)\,. \tag{12}$$

u, v – обращаются в нуль на Σ. Тогда (1), (2) внутри r и на самой границе можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}+\frac{1}{D+\rho\cos\psi}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\operatorname{Cos}\psi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\psi}\operatorname{Sin}\psi\right)-$$

$$-\frac{8\pi^2 e^2 s}{c^2}\,\frac{u}{D+\rho\cos\psi}=-\frac{8\pi^2 e s m\Gamma}{D+\rho\operatorname{Cos}\psi}-\frac{1}{\rho}\frac{\Phi_\Sigma}{\rho_\Sigma}-\frac{1}{\rho}\frac{d^2}{d\psi^2}\left(\frac{\Phi_\Sigma}{\rho_\Sigma}\right)- \tag{13}$$

$$-\frac{1}{D+\rho\operatorname{Cos}\psi}\left[\operatorname{Cos}\psi\frac{\Phi_\Sigma}{\rho_\Sigma}-\operatorname{Sin}\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{\Phi_\Sigma}{\rho_\Sigma}\right)\right]+\frac{8\pi^2 e s\,\Phi_\Sigma}{c^2\rho_\Sigma(D+\rho\operatorname{Cos}\psi)}\equiv f(\rho,\psi)\,.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2}+\frac{1}{D+\rho\operatorname{Cos}\psi}\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}\cos\psi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\psi}\operatorname{Sin}\psi\right)-\frac{v}{(D+\rho\operatorname{Cos}\psi)^2}-\frac{8\pi^2 e^2 s\,v}{c^2(D+\rho\cos\psi)}=F(\rho,\psi)\equiv$$

$$\equiv-\frac{8\pi^2 e s m\mu}{D+\rho\operatorname{Cos}\psi}-\frac{a_\Sigma}{\rho\,\rho_\Sigma}-\frac{1}{\rho}\frac{d^2}{d\psi^2}\left(\frac{a_\Sigma}{\rho_\Sigma}\right)-\frac{1}{D+\rho\operatorname{Cos}\psi}\left[\operatorname{Cos}\psi\frac{a_\Sigma}{\rho_\Sigma}-\operatorname{Sin}\psi\frac{d}{d\psi}\left(\frac{a_\Sigma}{\rho_\Sigma}\right)\right]+\frac{a_\Sigma}{\rho_\Sigma(D+\rho\operatorname{Cos}\psi)^2}+ \tag{14}$$

$$+\frac{8\pi^2 e^2 s\,a_\Sigma}{c^2\rho_\Sigma(D+\rho\operatorname{Cos}\psi)}\,,$$

Если $\Phi(\psi)$, $a(\psi)$ считать заданными, то функции u, v можно получить путем решения задачи Дирихле для неоднородных уравнений (13), (14) с однородными граничными условиями $[u]_\Sigma=[v]_\Sigma=0$. Так как, однако, уравнение границы неизвестно, то для построения u, v необходимо применить достаточно гибкий способ, позволяющий вводить в решение уравнение границы в неявном виде. Таким методом может служить прямой вариационный метод Ритца.

Умножим для удобства (13) и (14) на $D+\rho\operatorname{Cos}\psi$ (т.к. $\rho<D$ в области r, то всегда $D+\rho\operatorname{Cos}\psi>0$) и обозначим

$$f_1(\rho,\psi)=f(\rho,\psi)(D+\rho\operatorname{Cos}\psi),\quad F_1(\rho,\psi)=F(\rho,\psi)(D+\rho\operatorname{Cos}\psi)\,. \tag{15}$$

Легко показать, что (13) (после умножения на $D+\rho\operatorname{Cos}\psi$) является уравнением Эйлера для следующего функционала:

$$I[u]=\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\rho_\Sigma}\left\{(D+\rho\operatorname{Cos}\psi)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)^2\right]+q_0u^2+2u f_1\right\}\rho\,d\rho\,, \tag{16}$$

$$q_0=\frac{8\pi^2 e^2 s}{c^2}\,. \tag{17}$$

Аналогично для (14) имеет место функционал:

$$\overline{I[v]}=\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\rho_\Sigma}\left\{(D+\rho\operatorname{Cos}\psi)\left[\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)^2\right]+\left(q_0+\frac{1}{D+\rho\operatorname{Cos}\psi}\right)v^2+2vF_1\right\}\rho\,d\rho \tag{18}$$

(Можно заметить, что (16) – аналогично и (18) – можно получить прямым преобразованием переменных под знаком интеграла из соответствующего функционала в координатах (r, z):

$$I[u]=\iint_r\left\{r\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]+q_0u^2+2uf\right\}dr\,dz\,. \tag{19}$$

В области r r –всегда больше нуля и оператор является самосопряженным и положительно определенным).

Как известно, функции u, v, являющиеся решением поставленных граничных задач, одновременно дают минимум для функционалов (16), (18).

Для вычисления u, v прямым методом представим уравнение границы приближенно в виде следующей конечной комбинации:

$$\rho_\Sigma=\rho(\psi)=A_0+A_1\operatorname{Cos}\psi+\ldots+A_n\operatorname{Cos}n\psi\,, \tag{20}$$

где A_0, A_1, ... A_n – неопределенные коэффициенты. Из-за симметрии задачи относительно плоскости (x, y) в (20) нечетные функции не включены. В качестве пробных функций, удовлетворяющих граничным условиям, выберем функции вида

$$\phi_0=\rho(\psi)-\rho\,,\qquad \phi_1=[\rho(\psi)-\rho]\,\rho\operatorname{Cos}\psi\,, \tag{21}$$

$$\phi_2=[\rho(\psi)-\rho]\,\rho\operatorname{Sin}\psi\,,\quad \phi_3=[\rho(\psi)-\rho]\,\rho^2,\ldots$$

Система (21) является полной в замкнутой области r (см., например, [3]). Представляем приближенно u, v с помощью конечной комбинации пробных функций (в силу симметрии задачи нечетные функции не включаются).

$$\tilde{\tilde{u}}=[\rho(\psi])-\rho][a_0+a_1\rho\operatorname{Cos}\psi+a_2\rho^2+a_3\rho^2\operatorname{Cos}^2\psi+\ldots]\,, \tag{22}$$

$$\tilde{v} = [\rho(\psi) - \rho][\beta_0 + \beta_1 \rho \cos\psi + \beta_2 \rho^2 + \beta_3 \rho^2 \cos^2\psi + \dots] . \quad (23)$$

Везде в дальнейшем приближенные таким способом выражения для u, v и величины, построенные с помощью этих приближенных выражений, будем обозначать знаком "тильда".

Из-за f_1 и F_1 в (16), (18) входят еще граничные значения $a_\Sigma(\psi)$, $\Phi_\Sigma(\psi)$. Представим эти функции также в форме:

$$a_\Sigma = b_0 + b_1 \cos\psi + b_2 \cos 2\psi + \dots \quad (24)$$

$$\Phi_\Sigma = a_0 + a_1 \cos\psi + a_2 \cos 2\psi + \dots \quad (25)$$

с неопределенными коэффициентами. После подстановки (22)-(25) в (16), (18) с учетом (20) вычисление интегралов, несмотря на громоздкость, не представляет принципиальных трудностей.

Как обычно по методу Ритца, неопределенные коэффициенты $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ находятся из системы алгебраических линейных уравнений:

$$\frac{\partial I[u]}{\partial \alpha_j} = 0 \qquad (j = 0,1,2 \dots, n), \quad (26)$$

$$\frac{\partial I[v]}{\partial \beta_j} = 0 \qquad (j = 0,1,2 \dots, n) . \quad (27)$$

В данном случае в уравнения (26), (27) как свободные параметры входят величины $\{A_m\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Таким образом, α_j, β_j являются функциями этих параметров. (Можно отметить, что всю процедуру вычисления u, v можно было бы проводить в переменных r, z, используя выражения типа (19) и алгебраическую форму выражения для границы, однако использование тригонометрических полиномов кажется более удобным).

Функции a_Σ, Φ_Σ, ρ_Σ связаны алгебраическим выражением (7), поэтому между коэффициентами A_j, a_k, b_k имеют место соотношения. Эти соотношения можно получить путем фурье-разложения выражения (7) (см., например[3]). Наиболее просто вычисление получается в случае ультрарелятивистской энергии частиц. Тогда $mc^2\Gamma > e\Phi$ и можно записать:

$$\mu m c^2 - e(D + \rho_\Sigma \cos\psi) a_\Sigma = (D + \rho_\Sigma \cos\psi)\sqrt{(mc^2\Gamma - e\Phi)^2 - m^2c^4} \approx$$

$$\approx [mc^2(\Gamma - \frac{1}{2\Gamma}) - e\Phi_\Sigma - \frac{1}{2}(\frac{e\Phi_\Sigma}{mc^2\Gamma})^2](D + \rho_\Sigma \cos\psi) . \quad (28)$$

Квадратичный член можно также опустить, если

$$\Phi_\Sigma^2 \ll 2\frac{|e|\Gamma}{r_0} a_\Sigma , \quad (29)$$

где r_0 -классический радиус электрона. Получаются соотношения

$$Q_0 \equiv \mu mc^2 - eDb_0 - Dmc^2(\Gamma - \frac{1}{2\Gamma}) + eDa_0 = 0, \quad (30)$$

$$Q_1 \equiv -eA_0b_0 - eDb_1 - mc^2(\Gamma - \frac{1}{2\Gamma})A_0 + ea_1D + ea_0A_0 = 0 .$$

....

В общем случае имеем выражения типа

$$Q_0(a_0, b_0, A_0, a_1, b_1, A_1, \dots) = 0 , \quad Q_1(\dots\dots) = 0, \dots \quad (31)$$

где в каждое Q_j входит конечное число параметров.

II

С помощью функций $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ в области r определены величины

$$\tilde{\Phi} = \tilde{u} + \frac{\rho}{\rho_\Sigma}\Phi_\Sigma , \quad (32)$$

$$\tilde{a}_\phi = \tilde{v} + \frac{\rho}{\rho_\Sigma} a_\Sigma , \quad (33)$$

$$e\tilde{n} = \frac{2\pi s e}{c^2 r}(\Gamma m c^2 - e\tilde{\Phi}) , \quad (34)$$

$$\tilde{j}_\phi = \frac{2\pi s e}{c r}(\frac{mc\mu}{r} - \frac{e}{c}\tilde{a}_\phi) , \qquad r = D + \rho\cos\psi . \quad (35)$$

(временно можно записать в координатах (r, z)). Теперь, независимо от всего предыдущего, можно рассмотреть следующую чисто электродинамическую задачу: в области r пространства формулами (34), (35) задано распределение заряда и тока, определить соответствующие потенциалы Φ^* и a^*_ϕ.

С помощью функций Грина свободного пространства

$$G_\Phi(r, z; r', z') = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\phi + (z - z')^2}} = \frac{4K(k)}{\sqrt{(r+r')^2 + (z - z')^2}} , \quad (36)$$

$$G_a(r,z;\ r',z') = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi\, d\phi}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\phi+(z-z')^2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{(r+r')^2+(z-z')^2}}{rr'}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)K(k)-E(k)\right], \qquad (37)$$

где

$$k = \frac{2\sqrt{rr'}}{\sqrt{(r+r')^2+(z-z')^2}} \qquad (38)$$

модуль полных эллиптических интегралов $K(k)$, $E(k)$, решения записываются в виде

$$\tilde{\Phi}^*(r,z) = \frac{2\pi se}{c^2}\int_\tau G_\Phi(r,z;r,z')\,\frac{mc^2\Gamma - e\tilde{\Phi}}{r'}\,r'dr'dz', \qquad (39)$$

$$\tilde{a}^*_\phi(r,z) = \frac{2\pi se}{c}\int_\tau G_a(r,z;r',z')\,\frac{\mu m(c/r')-(e/c)\tilde{a}_\phi}{r'}\,r'dr'dz'. \qquad (40)$$

Дальнейшие вычисления удобнее вести в координатах ρ, ψ. Тогда

$$\tilde{\Phi}^*(\rho,\psi) = \frac{2\pi se}{c}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\rho_\Sigma} G_\Phi(\rho,\psi;\rho',\psi')[mc^2\Gamma - e\tilde{\Phi}]\,\rho' d\rho', \qquad (41)$$

$$\tilde{a}^*_\phi(\rho,\psi) = \frac{2\pi se}{c}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\rho_\Sigma} G_a(\rho,\psi;\rho',\psi')\left[\frac{mc\mu}{D+\rho'\cos\psi'} - \frac{e}{c}\tilde{a}_\phi\right]\rho' d\rho', \qquad (42)$$

где ρ_Σ задана формулой (20).

Вычисление интегралов (41), (42) является наиболее трудоемкой частью работы, т.к. ввиду неопределенности числовых коэффициентов A_0, A_1 ... в формуле (20) оно должно быть выполнено аналитически. Для вычисления можно воспользоваться разложением функций G_Φ, G_a по обратным степеням большого радиуса D.

$$G_\Phi = \frac{2}{D}\left\{\log\frac{8D}{\Delta} - \frac{\rho\cos\psi+\rho'\cos\psi'}{2D}\log\frac{8D}{\Delta} + \frac{\rho\cos\psi+\rho'\cos\psi'}{2D} + \dots\right\}, \qquad (43)$$

$$G_a = \frac{2}{D}\left\{-2+\log\frac{8D}{\Delta} - \frac{\rho\cos\psi+\rho'\cos\psi'}{D}\log\frac{8D}{\Delta} + 3\,\frac{\rho\cos\psi+\rho'\cos\psi'}{D} + \dots\right\},$$

где

$$\Delta = [\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\psi-\psi')]^{1/2}.$$

В результате $\tilde{\Phi}^*$ и $\tilde{a}^*_\phi$ оказываются зависящими явным образом от параметров $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{A_m\}$. Для того, чтобы эти функции были решениями самосогласованной задачи, необходимо и достаточно, чтобы внутри области τ функции $\tilde{\Phi}^*$ и $\tilde{\Phi}$ совпадали, а разность функций $\tilde{a}^*_\phi$ и $\tilde{a}_\phi$ соответствовала бы величине $\tilde{a}^{(0)}_\phi$ заданного внешнего магнитного поля (по построению (39), (40), $\tilde{\Phi}^*$, $\tilde{a}^*_\phi$ – собственные поля системы частиц; внешнего электрического поля нет.). Наличие свободных параметров $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{A_m\}$(с учетом соотношений типа (30) или (31)) дает возможность осуществить приближенное "сближение" соответствующих функций с достаточной степенью точности. Тем самым определяются и численные значения параметров, а следовательно, и значения физических величин – граничных значений потенциалов Φ_Σ, a_Σ и формы поверхности ρ_Σ. Произвести "сближение" можно несколькими способами, например, путем задания определенного числа точек, в которых значения функций предполагаются одинаковыми (метод коллокаций). Если предполагаемое сечение пучка не является достаточно малым, то большую точность можно получить методом наименьших квадратов. Положим

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\rho_\Sigma} (\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}^*)^2 \rho\, d\rho = L[a_0,\dots b_0,\dots A_0,\dots], \qquad (44)$$

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\rho_\Sigma} [\tilde{a}_\phi - \tilde{a}^{(0)}_\phi - \tilde{a}^*_\phi]^2 \rho\, d\rho = M[a_0, b_0, A_0,\dots]. \qquad (45)$$

Тогда параметры (a_0, ..., b_0, ..., A_0, ... A_n) определяются путем минимизации выражения

$$S = L + M + \sum_{p=0}^{m} \lambda_p Q_p, \qquad (46)$$

т.е. из алгебраических уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_j} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial A_k} = 0 \quad (i,j=0,1,2\dots m;\ k=0,1,2,\dots n) \qquad (47)$$

и уравнений (30) или (31); λ_p – неопределенные множители Лагранжа.

Если рассматривается задача с фиксированным полным числом частиц N, то нормирующий множитель s в формулах (3), (4) также является параметром. Поэтому необходимо присоединить еще одно уравнение

$$N = 2\pi \int\limits_{r} n\, dr = 2\pi \frac{2\pi s}{c^2} \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\rho_\Sigma} [mc^2\Gamma - e\tilde{\tilde{\Phi}}]\rho\, d\rho \; . \qquad (48)$$

Алгебраическая система уравнений для определения параметров является сложной , и для ее решения, по-видимому, необходимо использовать вычислительную машину.

Замечание. Прямой метод решения граничной задачи Дирихле для положительно определенных операторов гарантирует сходимость минимизирующей последовательности к решению и его первым производным в среднем по области. В рассматриваемом случае ввиду очевидной из физических соображений гладкости границы и сходности операторов типа (19) с оператором Лапласа возможна сходимость в среднем по любой кусочно-гладкой кривой, лежащей внутри r, или по граничной кривой Σ /4/.

Учитывая, что

$$\int\limits_r\int\limits_{r'} G^2_\Phi(r, z; r', z')\, dr\, dr', \qquad \int\limits_r\int\limits_{r'} G^2_a(r,z; r',z')\, dr\, dr' < \infty$$

и используя неравенство Коши-Буняковского, можно показать, что для построения выражений (44), (45) этого предположения достаточно.

III

В качестве частного случая задачи рассмотрим некоторые свойства пучка, граница которого является эквипотенциальной поверхностью для Φ. Таким образом,

$$[\Phi]_\Sigma = \Phi_o = \text{const} \; . \qquad (49)$$

Из (7) следует

$$[a_\Phi]_\Sigma = a_\Sigma = \frac{\mu m c^2}{e}\left[\frac{1}{r}\right]_\Sigma - \frac{(\pm mc^2)}{e}\sqrt{\left(\Gamma - \frac{e}{mc^2}\Phi_0\right)^2 - 1} \, . \qquad (50)^{x/}$$

Положим:

$$\Phi(r, z) = u(r, z) + \Phi_o \; . \qquad (51)$$

Функцию v удобно определить несколько по-другому, чем в (12):

$$a_\phi(r, z) = v(r, z) + \frac{\mu m c^2}{e}\frac{1}{r} - \frac{mc^2}{e}\sqrt{\left(\Gamma - \frac{e}{mc^2}\Phi_o\right)^2 - 1} \, . \qquad (52)$$

---

x/ Знак плюс или минус зависит от направления вращения частиц; далее везде опущен.

Как и ранее, $[v]_\Sigma = 0$, так что последние два члена в (52) в точках границы Σ дают a_Σ.

Рассмотрим, каковы поля на поверхности Σ.

$E = -\operatorname{grad}\Phi = -\operatorname{grad} u$, т.к. Σ – поверхность уровня, то $[\operatorname{grad} u]_\Sigma$ направлен по внутренней нормали к Σ, поэтому поле $[\bar{E}]_\Sigma$ направлено по внешней нормали к границе.

Полное магнитное поле имеет составляющие

$$\mathcal{H}_r = -\frac{\partial a_\phi}{\partial z} = -\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad (53)$$

$$\mathcal{H}_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_\phi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) - \frac{mc^2}{er}\sqrt{\left(\Gamma - \frac{e}{mc^2}\Phi_o\right)^2 - 1} \, . \qquad (54)$$

Отсюда полное поле на поверхности будет

$$[\mathcal{H}_r]_\Sigma = -\left[\frac{\partial v}{\partial z}\right]_\Sigma ,$$

$$[\mathcal{H}_z]_\Sigma = \left[\frac{\partial v}{\partial r}\right]_\Sigma - \frac{mc^2}{e}\left[\frac{1}{r}\right]_\Sigma\sqrt{\left(\Gamma - \frac{e}{mc^2}\Phi_o\right)^2 - 1} \; . \qquad (55)$$

Для v Σ – поверхность уровня, и вектор $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_\Sigma, \frac{\partial v}{\partial r}\Big|_\Sigma\right)$ направлен по нормали к Σ. Соответственно вектор $\left(\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_\Sigma, -\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_\Sigma\right)$ направлен по касательной к этой поверхности. Физически условие (7) означает, что на граничной поверхности пучка поперечный кинетический импульс любой частицы равен нулю, т.е. в момент выхода частицы на граничную поверхность она имеет только продольную (ϕ-ую) скорость. Т.к.

$$p_\phi = \frac{1}{r} M_\phi - \frac{e}{c} a_\phi = m\gamma r \frac{d\phi}{dt} \qquad (56)$$

– компонента по ϕ-направлению обычного кинетического импульса, то условие (50) означает, что

$$[p_\phi]_\Sigma = mc\sqrt{\left(\Gamma - \frac{e}{mc^2}\Phi_o\right)^2 - 1} = \text{Const}, \qquad (57)$$

$H - e\Phi = \Gamma mc^2 - e\Phi = \mathcal{E}$ – собственная энергия частицы. Обозначив

$$\Gamma - \frac{e}{mc^2}\Phi_o = \gamma_\Sigma = \text{Const}, \qquad (58)$$

имеем

$$[\mathcal{E}]_\Sigma = mc^2\gamma_\Sigma\,; \qquad [p_\phi]_\Sigma = mc\sqrt{\gamma_\Sigma^2 - 1}\,. \tag{59}$$

Таким образом, любая частица, приходящая в данный момент из глубины пучка на поверхность Σ, имеет в точке поверхности только касательную к поверхности ϕ-ую скорость, причем в данном случае для всех точек поверхности эта скорость одна и та же, равная:

$$\left[r\frac{d\phi}{dt} \right]_\Sigma = c\,\frac{\sqrt{\gamma_\Sigma^2-1}}{\gamma_\Sigma}\,. \tag{60}$$

В то время как Γ является заданной, γ_Σ является параметром, подлежащим определению.

Согласно (55) полное магнитное поле в точках поверхности Σ составлено из двух частей. Первая часть, представленная вектором $\left(\frac{\partial v}{\partial r}\big|_\Sigma\,,\ -\frac{\partial v}{\partial z}\big|_\Sigma \right)$, создает силу Лоренца, направленную по внутренней нормали к поверхности (учитывая, что на поверхности имеется только ϕ-ая скорость у частиц). Вторая часть поля, представленная вектором $\left(\frac{mc^2}{e}\left[\frac{1}{r}\right]_\Sigma\sqrt{\gamma_\Sigma^2-1}\,,0\right)$ создает составляющую силы Лоренца, направленную к оси и целиком компенсирующую центробежную силу. Действительно, магнитное поле, необходимое для удержания частицы, вращающейся на радиусе r и имеющей импульс p_ϕ, есть $\mathcal{H}_z = \frac{cp_\phi}{er}$, в соответствии с (59) как раз получаем

$$[\mathcal{H}_z]_\Sigma = \frac{mc^2}{e}\left[\frac{1}{r}\right]_\Sigma\sqrt{\gamma_\Sigma^2-1} = \frac{c}{e}\left[\frac{p_\phi}{r}\right]_\Sigma\,. \tag{61}$$

Таким образом, на поверхности пучка на любую частицу действует только нормальная к поверхности сила, являющаяся разностью электростатической силы расталкивания, силы, создаваемой градиентом давления с одной стороны и силы Лоренца с другой. Общая сила должна быть направлена внутрь пучка.

Для дальнейших вычислений в уравнениях (13), (14) и выражениях (16), (18) удобно перейти к безразмерному виду. Положим:

$$\zeta = \frac{\rho}{D}, \qquad x = \frac{8\pi^2 e^2 s D}{c^2}, \qquad w = \frac{r_o}{\vartheta\gamma_\Sigma x}u\,, \qquad \omega = \frac{r_o}{\vartheta\gamma_\Sigma x}v\,, \tag{62}$$

где r_o – классический радиус электрона, $\vartheta = |e|$.

В простейшем случае будем искать решение в виде пучка круглого поперечного сечения (но с неоднородной плотностью), радиуса A_o, т.е. в разложении (20) ограничимся первым членом. Свободными параметрами системы, подлежащими определению, являются A_o, γ_Σ, s (или пропорциональная s величина x). Соответственно

$$a_o = \Phi_o = \frac{mc^2}{e}(\Gamma - \gamma_\Sigma)\,,$$

$$a_\Sigma = \frac{\mu mc}{e}\left[\frac{1}{r}\right]_\Sigma \frac{mc^2}{e}\sqrt{\gamma_\Sigma^2 - 1}\,.$$

Величины Γ, μ, D, N нужно считать заданными. В соответствии с (22), ограничиваясь четырьмя членами, имеем

$$\tilde{\tilde{w}} = (\xi - \zeta)[\tau + \beta\zeta\cos\psi + \delta\zeta^2 + \sigma\zeta^2\cos^2\psi]\,, \tag{63}$$

где

$$\xi = \frac{A_o}{D}\,, \tag{64}$$

τ, β, δ, σ – безразмерные коэффициенты. После подстановки (63) в выражение (16) (приведенное к безразмерному виду), для которого с учетом (51)

$$f_1(\rho,\psi) = \frac{\vartheta\gamma_\Sigma x}{r_o D} = \text{Const}\,, \tag{65}$$

после выполнения интегрирования и минимизации по величинам τ, β, δ, σ для этих величин получаются следующие линейные алгебраические уравнения:

$$(2 + 1/3\,x\xi^2)\tau + 1/3\,\xi^2\beta + (1/3\,\xi^2 + 1/15\,x\xi^4)\delta + (1/6\,\xi^2 + 1/30\,x\xi^4)\sigma = -2/3\,\xi\,,$$

$$1/3\,\tau + (1/2 + 1/30\,x\xi^2)\beta + 1/5\,\xi^2\delta + 1/6\,\xi^2\sigma = 0\,, \tag{66}$$

$$(1/3 + 1/15\,x\xi^2)\tau + 1/5\,\xi^2\beta + (2/5\,\xi^2 + 1/48\,x\xi^4)\delta + (1/5\,\xi^2 + 1/84\,x\xi^4)\sigma = -1/5\,\xi\,,$$

$$(1/6 + 1/30\,x\xi^2)\tau + 1/6\,\xi^2\beta + (1/5\,\xi^2 + 1/84\,x\xi^4)\delta + (11/60\,\xi^2 + 1/112\,x\xi^4)\sigma = -1/10\,\xi\,.$$

Подстановкой (63) в (48) с учетом (51), (62), после интегрирования, получаем

$$N = \frac{\pi}{2}\,\frac{x\gamma_\Sigma D}{r_o}\,\xi^2 + \frac{\pi}{2}\,\frac{x^2\gamma_\Sigma D}{r_o}\,\xi^3\left[\frac{\tau}{3} + \frac{1}{10}\left(\delta + \frac{\sigma}{2}\right)\xi^2\right], \tag{67}$$

где N –полное число частиц в системе. Для вычисления функции $\tilde{\tilde{\Phi}}^*(\rho,\psi)$ с помощью (41), (43), (51), (58), (62), (63) получим

$$\tilde{\tilde{\Phi}}^*(\zeta,\psi)=-\frac{\text{э}\, x\gamma_\Sigma}{2\pi r_0}\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\xi}\{\log\frac{8}{\Delta_1}-\tfrac{1}{2}(\zeta\operatorname{Cos}\psi+\zeta'\operatorname{Cos}\psi')\log\frac{8}{\Delta_1}+ \tag{68}$$

$$+\tfrac{1}{2}(\zeta\operatorname{Cos}\psi+\zeta'\operatorname{Cos}\psi')\}(1+x\tilde{\tilde{w}})\zeta'\,d\zeta',$$

где $\Delta_1=[\zeta^2+\zeta'^2-2\zeta\zeta'\operatorname{Cos}(\psi-\psi')]^{1/2}$. Вычисление (68) достаточно громоздко, хотя в принципе не представляет трудности. Для упрощения предположим, что область r (т.е. поперечное сечение пучка) невелика. Тогда "сближение" функций $\tilde{\tilde{\Phi}}^*(\zeta,\psi)$ и $\tilde{\tilde{\Phi}}(\zeta,\psi)$, где

$$\tilde{\tilde{\Phi}}(\zeta,\psi)=-\frac{\text{э}}{r_0}(\Gamma-\gamma_\Sigma)+\frac{\text{э}}{r_0}\gamma_\Sigma x\tilde{\tilde{w}}, \tag{69}$$

можно провести следующим упрощенным способом. Потребуем 1) чтобы в точке $\zeta=0$, т.е. в центре пучка, $\tilde{\tilde{\Phi}}^*$ и $\tilde{\tilde{\Phi}}$ были равны; 2) величина

$$I(\xi,\gamma_\Sigma,x)=\Big[\frac{r_0^2}{2\pi\text{э}^2}\int_0^{2\pi}(\tilde{\tilde{\Phi}}^*-\tilde{\tilde{\Phi}})^2_{\zeta=\xi}d\psi\Big]^{1/2} \tag{70}$$

была минимальна, т.е. вдоль границы пучка была бы минимальна разность $(\tilde{\tilde{\Phi}}^*-\tilde{\tilde{\Phi}})^2$. Первое условие дает уравнение

$$\frac{x\gamma_\Sigma}{2}\{\xi^2(\tfrac{1}{2}+\log\frac{8}{\xi})+xr\xi^3(\frac{5}{18}+\frac{1}{3}\log\frac{8}{\xi})+\frac{x\phi}{40}\xi^5+$$

$$+\xi^5(-\frac{x\beta}{2}+x\delta+x\sigma)(\frac{9}{400}+\frac{1}{20}\log\frac{8}{\xi})\}-(\Gamma-\gamma_\Sigma)+\gamma_\Sigma x\xi r=0. \tag{71}$$

Из (68) при $\zeta=\xi$ имеем:

$$\tilde{\tilde{\Phi}}^*(\xi,\psi)=-\frac{\text{э}\gamma_\Sigma x}{2r_0}\{\xi^2\log\frac{8}{\xi}+x\xi^3\log\frac{8}{\xi}[\frac{r}{3}+\frac{\delta+\frac{\sigma}{2}}{10}\xi^2]+\frac{\beta x\xi^5}{40}(\tfrac{1}{2}-\log\frac{8}{\xi})+$$

$$+\operatorname{Cos}\psi\,[\frac{\xi^3}{2}(\tfrac{1}{2}-\log\frac{8}{\xi})+\frac{x\beta\xi^4}{20}-\frac{x\xi^4}{2}(\frac{r}{3}+\frac{\delta+\frac{\sigma}{2}}{10}\xi^2)\log\frac{8}{\xi}+\frac{17}{120}xr\xi^4+ \tag{72}$$

$$+\frac{x\xi^6}{5}(\frac{4}{21}\delta+\frac{7}{96}\sigma)]+\operatorname{Cos}2\psi\,[\frac{x\sigma\xi^5}{84}-\frac{13}{840}\beta x\xi^5]-\operatorname{Cos}3\psi\,\frac{25}{11736}x\sigma\,1\xi^6.$$

Второе условие с учетом (69), (72) дает:

$$[I(\xi,\gamma_\Sigma,x)]^2=[-(\Gamma-\gamma_\Sigma)+\frac{\gamma_\Sigma x\xi^2}{2}\log\frac{8}{\xi}+\frac{\gamma_\Sigma x^2\xi^3}{2}[\frac{r}{3}+\frac{\delta+\frac{\sigma}{2}}{10}\xi^2)\log\frac{8}{\xi}+$$

$$+\frac{\gamma_\Sigma\beta x^2\xi^5}{80}(\tfrac{1}{2}-\log\frac{8}{\xi})]^2+\frac{\gamma_\Sigma^2x^2}{8}\{[\frac{\xi^3}{2}(\tfrac{1}{2}-\log\frac{8}{\xi})+\frac{x\beta\xi^4}{20}-\frac{x\xi^4}{2}(\frac{r}{3}+\frac{\delta+\frac{\sigma}{2}}{10}\xi^2)\log\frac{8}{\xi} \tag{73}$$

$$+\frac{17}{120}xr\xi^4+\frac{x\xi^6}{5}(\frac{4}{21}\delta+\frac{7}{96}\sigma)]^2+[\frac{x\sigma\xi^5}{124}-\frac{13}{840}\beta x\xi^5]^2+(\frac{25}{11736})^2x^2\sigma^2\xi^{12}\}.$$

Из (73) можно с помощью (66) исключить величины r, β, δ, σ. Минимизация полученного выражения должна проводиться по переменным ξ, γ_Σ, x при условиях (67), (71). Получающаяся система алгебраических уравнений громоздка и имеет высокую степень относительно ξ и x. Для ее численного решения достаточно задать параметры Γ, N. Пригодными будут только такие решения, для которых $\xi<1$, $x>0$, $\gamma_\Sigma>1$. Далее по заданной величине D определяется малый радиус пучка $A_0=D\xi$ и величина нормирующего множителя $s=\dfrac{x}{8\pi^2 D m r_0}$ функции распределения. Таким образом, следствием предположения, что граница пучка является эквипотенциальной поверхностью $\Phi=\mathrm{Const}$, является то, что отношение "малого" и большого радиусов пучка зависит только от двух параметров: общего числа частиц N и "полной энергии" Γ. Отмеченное свойство не зависит от степени приближения формы границы, т.е. в разложении (20) можно было бы взять большее число членов, отношения A_n/D остались бы функциями тех же параметров N и Γ. Для конкретных вычислений величин ξ, x, γ_Σ из системы алгебраических уравнений целесообразно использовать счетную машину.

Приближенное выражение для потенциала внешнего магнитного поля внутри пучка будет

$$\tilde{\tilde{a}}^{(0)}_\phi(\zeta,\psi)=\tilde{\tilde{a}}_\phi(\zeta,\psi)-\tilde{\tilde{a}}^*_\phi(\zeta,\psi)=\frac{\text{э}\gamma_\Sigma x}{r_0}\tilde{\tilde{\omega}}-$$

$$-\frac{\text{э}\,\mu}{r_0(1+\zeta\operatorname{Cos}\psi)D}+\frac{\text{э}}{r_0}\sqrt{\gamma_\Sigma^2-1}- \tag{74}$$

$$-\frac{\text{э}\,x\gamma_\Sigma}{2\pi r_0}\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\xi}\{-2+\log\frac{8}{\Delta_1}-(\zeta\operatorname{Cos}\psi+\zeta'\operatorname{Cos}\psi')\log\frac{8}{\Delta_1}+$$

$$+3(\zeta\operatorname{Cos}\psi+\zeta'\operatorname{Cos}\psi')\}[\frac{\sqrt{\gamma_\Sigma^2-1}}{\gamma_\Sigma}+x\tilde{\tilde{\omega}}]\zeta'\,d\zeta'.$$

В (74) константы γ_Σ, ξ, x теперь предполагаются уже известными; функция $\tilde{\tilde{\omega}}$ определяется из уравнения (14) (с учетом (82)) и граничного условия

$$[\tilde{\tilde{\omega}}_\Sigma] \equiv \tilde{\tilde{\omega}}(\xi, \psi) = 0. \tag{75}$$

Свободный член в (14) в данном случае имеет вид:

$$F(\zeta, \psi) = \frac{\text{э}}{r_0} \left[\frac{\mu}{D^3 (1+\zeta \operatorname{Cos}\psi)^3} + \frac{\sqrt{\gamma_\Sigma^2 - 1}}{D^2 (1+\zeta \operatorname{Cos}\psi)^2} + \frac{x\sqrt{\gamma_\Sigma^2 - 1}}{D^2 (1+\zeta \operatorname{Cos}\psi)} \right]. \tag{76}$$

Так как граница уже известна, то вычисление $\tilde{\tilde{\omega}}(\zeta, \psi)$ можно выполнить любым удобным методом. В частности, можно вновь использовать метод Ритца и искать решение в виде комбинации

$$\tilde{\tilde{\omega}} = (\xi - \zeta)[\omega_0 + \omega_1 \zeta \operatorname{Cos}\psi + \omega_2 \zeta^2 + \omega_3 \zeta^2 \operatorname{Cos}^2\psi], \tag{77}$$

дающей приближенный минимум функционалу (18). После приведения последнего к безразмерному виду и при учете (15) и (76) получается:

$$\overline{I(\tilde{\tilde{\omega}})} = D\left(\frac{\text{э}\gamma_\Sigma x}{r_0}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\xi} \Big\{ (1+\zeta \operatorname{Cos}\psi)\Big[\tilde{\tilde{\omega}}^2_\zeta + \frac{1}{\zeta^2}\tilde{\tilde{\omega}}^2_\psi\Big] + \Big(x + \frac{1}{1+\zeta \operatorname{Cos}\psi}\Big)\tilde{\tilde{\omega}}^2_\psi +$$

$$+ 2\tilde{\tilde{\omega}}\Big[\frac{\mu}{D\gamma_\Sigma x}\frac{1}{(1+\zeta \operatorname{Cos}\psi)^2} + \Big(1 + \frac{1}{x(1+\zeta \operatorname{Cos}\psi)}\Big)\frac{\sqrt{\gamma_\Sigma^2-1}}{\gamma_\Sigma}\Big\}\zeta\, d\zeta. \tag{78}$$

Тогда для определения величин ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 получается система уравнений

$$\omega_0\Big(2 + \frac{1}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^2 x + \frac{1}{30}\xi^4\Big) + \omega_1\Big(\frac{1}{3}\xi^2 - \frac{1}{30}\xi^4\Big) + \omega_2\Big(\frac{1}{3}\xi^2 + \frac{1}{15}\xi^4 + \frac{1}{15}\xi^4 x\Big) + \omega_3\Big(\frac{1}{6}\xi^2 + \frac{1}{30}\xi^4 x\Big) =$$

$$= -\Big(\frac{2}{3}\xi + \frac{3}{10}\xi^3\Big)\frac{\mu}{D\gamma_\Sigma x} - \Big(\frac{2}{3}\xi + \frac{2}{3x}\xi + \frac{1}{10}\xi^3\frac{1}{x}\Big)\frac{\sqrt{\gamma_\Sigma^2 - 1}}{\gamma_\Sigma},$$

$$\omega_0\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{30}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi^4\Big) + \omega_1\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{30}\xi^2 x - \frac{13}{112}\xi^4\Big) + \omega_2\Big(\frac{1}{5}\xi^2 + \frac{9}{28}\xi^4\Big) + \omega_3\Big(\frac{1}{6}\xi^2 - \frac{211}{336}\xi^4\Big) =$$

$$= \Big(\frac{1}{5}\xi - \frac{1}{7}\xi^3\Big)\frac{\mu}{D\gamma_\Sigma x} + \Big(\frac{3}{5}\frac{\xi}{x} + \frac{1}{28}\xi^3\Big)\frac{\sqrt{\gamma_\Sigma^2 - 1}}{\gamma_\Sigma},$$

$$\omega_0\Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\xi^2 + \frac{1}{15}\xi^2 x\Big) + \omega_1\Big(\frac{\xi^2}{5} + \frac{9}{28}\xi^4\Big) + \omega_2\Big(\frac{2}{5}\xi^2 + \frac{37}{42}\xi^4 x\Big) +$$

$$+ \omega_3\Big(\frac{1}{5}\xi^2 + \frac{37}{84}\xi^4 x\Big) = -\Big(\frac{\xi}{5} + \frac{1}{7}\xi^3\Big)\frac{\mu}{D\gamma_\Sigma x} - \Big(\frac{1}{5}\xi + \frac{1}{5}\frac{\xi}{x} + \frac{1}{27}\frac{\xi^3}{x}\Big)\frac{\sqrt{\gamma_\Sigma^2 - 1}}{\gamma_\Sigma}, \tag{79}$$

$$\omega_0\Big(\frac{1}{6} + \frac{1}{30}\xi^2 x + \frac{7}{16}\xi^4\Big) + \omega_1\Big(\frac{1}{6}\xi^2 - \frac{211}{336}\xi^4\Big) + \omega_2\Big(\frac{1}{5}\xi^2 + \frac{37}{84}x\xi^4\Big) +$$

$$+ \omega_3\Big(\frac{11}{60}\xi^2 + \frac{97}{56}\xi^4 + \frac{97}{112}\xi^4 x\Big) = -\Big(\frac{\xi}{10} + \frac{3}{28}\xi^3\Big)\frac{\mu}{D\gamma_\Sigma x} - \Big(\frac{1}{10}\xi + \frac{1}{10}\frac{\xi}{x} +$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{\xi^3}{x} - \frac{3}{14}\xi^3\Big)\frac{\sqrt{\gamma_\Sigma^2 - 1}}{\gamma_\Sigma}.$$

В уравнениях (79) некоторые члены с более высокими степенями ξ отброшены. Окончательное вычисление величины $\tilde{\tilde{a}}^{(0)}_\phi(\zeta, \psi)$ в рассматриваемом случае может быть выполнено по формуле (74) аналитически или непосредственно численным способом, т.к. численные значения параметров предполагаются уже известными.

На рассмотренном примере видны основные вычислительные трудности, которые встречаются в изложенном способе. Главным образом они сводятся к необходимости вычислять длинный ряд сравнительно простых интегралов и затем в численном решении системы алгебраических уравнений. Можно отметить, что в разделе III для увеличения точности в формуле (68) необходимо было бы взять больше членов разложения функции G_a по степеням $\frac{\Lambda_0}{D}$.

В заключение автор выражает благодарность М.Г. Нехаевой за выполнение ряда вычислений.

Литература

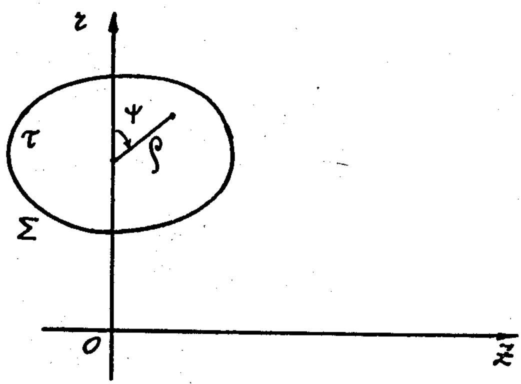
1. О.И. Ярковой. О стационарном состоянии аксиально-симметричной системы заряженных частиц. Препринт ОИЯИ, Р-883, Дубна, 1962.

2. О.И. Ярковой. Стационарное состояние пучка в накопителе с большим током. Препринт ОИЯИ, № 2182, Дубна, 1965.

3. Л.В. Канторович и В.И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, М.-Л, 1950.

4. С.Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. Гостех-теор. издат, М.-Л., 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июня 1965 г.


r
ψ
ρ
τ
Σ
O
z