ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

2197

Э.М. Барлит

# ОБ УГЛОВОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РОТАЦИОННЫХ $\gamma$-КВАНТОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

1965

3395/2 пр.

2197

Э.М. Барлит

# ОБ УГЛОВОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РОТАЦИОННЫХ $\gamma$-КВАНТОВ

Изучение $\gamma$ -излучения в реакциях между сложными ядрами является одним из основных средств исследования механизма реакции и свойств ядер. Так, например, полученные недавно [1,2] спектры $\gamma$ -квантов, испускаемых в реакциях, в которых основными конечными продуктами являются деформированные четно-четные ядра, позволили установить наличие ротационной полосы со спином 16 и сделать существенные заключения о возбужденных состояниях ядер с большим угловым моментом.

Наряду со спектрами важная информация может быть получена также из углового распределения $\gamma$ -квантов. Каскад частиц и $\gamma$ -квантов, снимающих возбуждение ядра, можно приближенно разбить на два этапа: статистический, определяемый средними характеристиками по большому числу состояний ядра, и завершающий, в котором основную роль играют индивидуальные свойства состояний. Частным случаем последнего является ротационный каскад. В процессе статистического этапа уносится некоторая часть углового момента и изменяется исходная ориентация угловых моментов в плоскости, перпендикулярной пучку налетающих частиц. Такое "разбалтывание" приводит к уменьшению анизотропии в угловом распределении $\gamma$ -квантов по сравнению со случаем, когда моменты лежат в плоскости, перпендикулярной пучку, и по этому уменьшению можно судить о статистическом этапе распада возбужденного ядра.

В настоящей работе рассматривается угловое распределение ротационных $\gamma$ -квантов, испускаемых после статистического этапа каскада. Для решения задачи применяется классическое описание, так как можно показать (см., например, [3]) , что классическое и квантово-механическое рассмотрения должны давать в подобных случаях близкие результаты. Это означает, что угловые моменты считаются классическими векторами, распределены в пространстве непрерывно и в результате испускания ротационного $\gamma$ -кванта изменяют только свою величину.

Вероятность вылета $\gamma$ -кванта в направлении $\vec{n}$ :

$$W(\vec{n}) = \int W(\vec{j}, \vec{n}) P(\vec{j}) d\vec{j}, \qquad (1)$$

где $W(\vec{j}, \vec{n})$ – вероятность испускания $\gamma$ -кванта в направлении $\vec{n}$ ядром с угловым моментом $\vec{j}$ , $P(\vec{j})$ – вероятность найти ядро в состоянии с угловым моментом $\vec{j}$ .

Функцию $W(\vec{j},\vec{n})$ в случае E2-переходов между вращательными уровнями ядра можно записать [4] в виде :

$$W(\vec{j},\vec{n}) = \frac{5}{16\pi}\,[\,1 - \cos^4(\vec{j},\vec{n})\,]\,. \qquad (2)$$

Вероятность $P(\vec{j})$ можно выразить через распределение $P(j_o)$ по величине углового момента в плоскости, перпендикулярной пучку:

$$P(\vec{j}) = \int P(j_o)\,w(\vec{j}_o,\vec{j})\,\delta(\vec{k}\cdot\vec{j}_o/j_o)\,d\vec{j}_o\;, \qquad (3)$$

где $\delta$ – дельта-функция, $\vec{k}$ –орт оси, направленной вдоль пучка, $w(\vec{j}_o,\vec{j})$ – вероятность ядру с угловым моментом $\vec{j}_o$ после статистического этапа каскада оказаться в состоянии с угловым моментом $\vec{j}$. Точный расчет $w(\vec{j}_o,\vec{j})$ сложен и громоздок, и так как для нашей задачи несущественны детали распределения, $w(\vec{j}_o,\vec{j})$можно взять в любой форме, характеризуемой двумя первыми моментами. Для определенности возьмем гауссову форму:

$$w(\vec{j}_o,\vec{j}) = \frac{1}{(2\pi s_o^2)^{3/2}}\,e^{-\frac{(\vec{j}_0-\vec{j})^2}{2s_0^2}} = \frac{1}{(2\pi s_0^2)^{3/2}}\,e^{-\frac{\vec{s}^2}{2s_0^2}}\;. \qquad (4)$$

Подставляя (2) – (4) в (1), получим:

$$W(\vec{n}) = \int P(j_o)\,j_o dj_o \int \delta(\vec{k}\cdot\vec{j}_o/j_o)\,d\Omega_{j_0} \int e^{-\frac{s^2}{2s_0^2}}\,s^2 ds \int [\,1 - \cos^4(\vec{j},\vec{n})\,]\,d\Omega_s. \qquad (5)$$

Задача сводится к вычислению непосредственно $\cos(\vec{j}\,\vec{n})$.

Выполнение соответствующих выкладок (см. приложение) дает для определенного $j$ :

$$W(\theta,\,s_o,\,j_o) = 1 - a_1\sin^2\theta - a_2\sin^4\theta = 1 - \frac{C_1}{1-C_0}\sin^2\theta - \frac{C_2}{1-C_0}\sin^4\theta\;,$$

где $\theta$ – угол между направлением пучка и вылета $\gamma$ –кванта,

$$C_0 = \frac{9}{2}x_0^4 - \frac{3}{\sqrt{2}}x_0^3(1+3x_0^2)\,\frac{J(x_0)}{\sqrt{\pi}} \qquad J(x_0) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}\,dx}{1-x^2}$$

$$C_1 = 3x_0^2 - \frac{45}{2}x_0^4 + \frac{9}{\sqrt{2}}x_0^3(1+5x_0^2)\,\frac{J(x_0)}{\sqrt{\pi}} \qquad x_0 = \frac{s_0}{j_0} \qquad (6)$$

$$C_2 = \frac{3}{8}\,[\,1 - 10x_0^2 + \frac{105}{2}x_0^4 - \frac{15}{\sqrt{2}}x_0^3(1+7x_0^2)\,\frac{J(x_0)}{\sqrt{\pi}}\,].$$

Заметим, что $J(x_0)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$J'(x_0) - \frac{1}{x_0^3}\,J(x_0) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{x_0^2}\,. \qquad (7)$$

Интересно с физической точки зрения рассмотреть два предельных случая: $x_0 \ll 1$ и $x_0 \gg 1$.

а) $x_0 = \frac{s_0}{j_0} \ll 1$ (угловые моменты мало отклонились от плоскости, перпендикулярной пучку). Из уравнения (7) $J(x_0) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, x_0$ и с точностью до членов второго порядка по $x_0$

$$W(\theta, s_0, j_0) \simeq 1 - \frac{3}{8}\sin^4\theta - 3\left(\frac{s_0}{j_0}\right)^2 [\sin^2\theta - \frac{5}{4}\sin^4\theta]. \qquad (8)$$

В частности, при $x_0 = 0$ (изотропное распределение угловых моментов в плоскости, перпендикулярной пучку) анизотропия максимальна:

$$W(\theta) = 1 - \frac{3}{8}\sin^4\theta. \qquad (9)$$

б) $x_0 = \frac{s_0}{j_0} \gg 1$ (почти изотропное распределение угловых моментов). Из (7) $J(x_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{x_0}\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{15}\,\frac{1}{x_0^4} - \frac{1}{105}\,\frac{1}{x_0^6}\right)$ и с точностью до членов второго порядка по $\frac{1}{x_0}$ имеем:

$$W(\theta, s_0, j_0) \simeq 1 - \frac{2}{21}\left(\frac{j_0}{s_0}\right)^2 \sin^2\theta. \qquad (10)$$

В частности, при $x_0 = \infty$ (изотропное распределение угловых моментов) $\gamma$-излучение изотропно:

$$W(\theta) = 1. \qquad (11)$$

На рис. 1 и 2 представлены рассчитанные на электронно-вычислительной машине зависимости коэффициентов $a_1$ и $a_2$ и угловой анизотропии от величины параметра $x_0$. Имеется возможность после измерения интенсивности $\gamma$-излучения в ротационных максимумах под разными углами найти для определенного $j_0$ параметр $s_0$. Для случаев, когда внесенный угловой момент близок по величине $j_0$, величина квадрата этого параметра дает оценку числа статистических переходов, при которых угловой момент изменяется на единицу.

Заметим, что как из классического, так и из строго квантово-механического /5/ рассмотрений следует, что различные $\gamma$-кванты ротационного каскада имеют одинаковые угловые распределения. Воспользовавшись этим, можно, вычтя из полной интенсивности $\gamma$-излучениях какого-либо перехода интенсивность, соответствующую предыдущему, выделить ту часть $\gamma$-излучения, которая обязана заселенности различных ротационных состояний после статистического этапа каскада. Именно из этой части $\gamma$-излучения и следует определять параметр $s_0$, пользуясь формулой (6) для углового распределения, усредненного по образующемуся при облучении частицами распределению по $j_0$. На рис. 1 приведены значения $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, а на рис. 2 - зависимость анизотропии для распределения $P(j_0) \sim j_0$ (вплоть до $j_{0\,max}$), определяемого лишь геометрическим фактором; $s_0$ считается одинаковым для всех $j_0$. Реальное распределение будет отличаться от записанного, и изучение угловой анизотропии даст некоторую информацию об истинном распределении.

В заключение отметим, что ротационные переходы были выбраны в силу сравнительно простой и надежной их идентификации. Подобное рассмотрение может быть проведено для любого характерного $\gamma$-перехода в завершающем этапе каскада девозбуждения.

Пользуюсь случаем искренно поблагодарить В.М.Струтинского за постановку задачи и стимулирующие обсуждения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Среднее $\cos^4(\vec{n},\vec{j})$ по телесному углу вектора $\vec{s}$

$$\overline{\{\cos^4(\vec{n},\vec{j})\}}_{\Omega_s} = \frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{n}(\vec{j}_0-\vec{s})}{|\vec{j}_0-\vec{s}|}\right]^4 d\Omega_s = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta_s\, d\theta_s}{(j_0^2-2\vec{j}_0\vec{s}+s^2)^2}\int_0^{2\pi} d\phi \sum_{m=0}^{4}(-1)^m C_4^m(\vec{n}\,\vec{j}_0)^{4-m}(\vec{n}\,\vec{s})^m. \quad (\text{П}.1)$$

Интегрируя по $\phi$, получим,:

$$\overline{\{\cos^4(\vec{n},\vec{j})\}}_{\Omega_s} = \tfrac{1}{2}\sum_{m=0}^{4}(-1)^m C_4^m x^m \sum_{n=0}^{E(\frac{m}{2})} C_m^{2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_{-1}^{1}\frac{t^{m-2n}(1-t^2)^n\,dt}{(1-2tx+x^2)^2}\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n+p}C_n^p\cos^{2(2-p)}\theta_n, \quad (\text{П}.2)$$

где $C_4^m$, $C_m^n$, $C_n^p$ – биномиальные коэффициенты, $E(\frac{m}{2})$ – целая часть числа $\frac{m}{2}$, $x=\frac{s}{j_0}$; $t=\cos\theta_s$; $\theta_s$, $\theta_n$ – углы между $\vec{j}_0$ и $\vec{s}$, $\vec{n}$ соответственно.

Среднее $\cos^{2(2-p)}\theta_n$ по изотропному распределению $\vec{j}_0$ в плоскости, перпендикулярной пучку:

$$\overline{\{\cos^{2(2-p)}\theta\}}_{n\,\Omega_{j_0}} = \frac{1}{2\pi}\int\cos^{2(2-p)}\theta_n\,\delta(\vec{k}\cdot\vec{j}_0/j_0)\,d\Omega_{j_0} = \frac{[2(2-p)-1]!!}{[2(2-p)]!!}\sin^{2(2-p)}\theta, \quad (\text{П}.3)$$

где $\theta$ – угол между направлением вылета $\gamma$-кванта и осью пучка.
Следовательно, в результате следующего интегрирования в (5) получаем:

$$\overline{\{\cos^4(\vec{n},\vec{j})\}}_{\Omega_s,\Omega_{j_0}} = \tfrac{1}{2}\sum_{m=0}^{4}(-1)^m C_4^m\sum_{n=0}^{E(\frac{m}{2})}C_m^{2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}J_m^n(x)\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n+p}C_n^p\frac{[2(2-p)-1]!!}{[2(2-p)]!!}\sin^{2(2-p)}\theta, \quad (\text{П}.4)$$

где

$$J_m^n(x) = x^m\int_{-1}^{1}\frac{t^{m-2n}(1-t^2)^n\,dt}{(1-2tx+x^2)^2}.$$

Собрав коэффициенты при различных степенях $\sin\theta$, получим:

$$\overline{\{\cos^4(\vec{j},\vec{n})\}}_{\Omega_s,\Omega_{j_0}} = \tfrac{1}{2}\sum_{p=0}^{2}(-1)^p\frac{[2(2-p)-1]!!}{[2(2-p)]!!}\sin^{2(2-p)}\theta\sum_{n=p}^{2}(-1)^n\frac{1}{2^{2n}\,p!\,n!\,(n-p)!}$$

$$\sum_{m=2n}^{4}(-1)^n\frac{4!}{(4-m)!\,(m-2n)!}\,J_m^n(x) \equiv A_0 + A_1\sin^2\theta + A_2\sin^4\theta\,. \qquad (\text{П}.5)$$

Элементарное интегрирование по $t$ и затем суммирование дает:

$$A_0 = \frac{3}{16}\left[\frac{1}{8x}\,(1-x^2-x^4+x^6)\,\ell n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x^4\right)\right]$$

$$A_1 = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{32x}(-1-3x^2+9x^4-5x^6)\,\ell n\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(-1+\frac{22}{3}x^2-5x^4\right)\right] \qquad (\text{П}.6)$$

$$A_2 = \frac{3}{16}\left[\frac{5}{64x}(-1+9x^2-15x^4+7x^6)\,\ell n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + \frac{1}{48}(81-190x^2+105x^4)\right].$$

Дальнейшее интегрирование в (5) по частям дает:

$$B = j_0^3\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}\,x^2dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,j_0^3x_0^3$$

$$B_0 = j_0^3\int_0^\infty A_0e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}\,x^2dx = j_0^3\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,x_0^3\;\frac{9}{2}x_0^4 - \frac{3}{2}x_0^6\,(1+3x_0^2)\,J(x_0)\right]$$

$$B_1 = j_0^3\int_0^\infty A_1e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}\,x^2dx = j_0^3\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,x_0^3\left(3x_0^2-\frac{45}{2}x_0^4\right)+\frac{9}{2}x_0^6(1+5x_0^2)\,J(x_0)\right] \qquad (\text{П}.7)$$

$$B_2 = j_0^3\int_0^\infty A_2e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}\,x^2dx = j_0^3\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-10x_0^2+\frac{105}{2}x_0^4\right)-\frac{15}{2}x_0^6(1+7x_0^2)\,J(x_0)\right].$$

Нормируя так, чтобы член без синусов равнялся единице, получаем формулу (6) текста.

## Литература


1. H.Morinaga and P.C.Gugelot. Nucl. Phys., 46, 210 (1963).
2. F.S.Stephens, N.L.Lark and R.M.Diamond. Nucl. Phys., 63, 82-96 (1965).
3. В.М.Струтинский. Ядерная физика, 4 (1965).
4. Дж. Блатт, В. Вайскопф. Теоретическая ядерная физика, ИИЛ, 1954, гл. XII.
5. Гамма-лучи. Изд-во АН СССР, 1961, стр. 549 .



Рукопись поступила в издательский отдел
29 мая 1965 г.

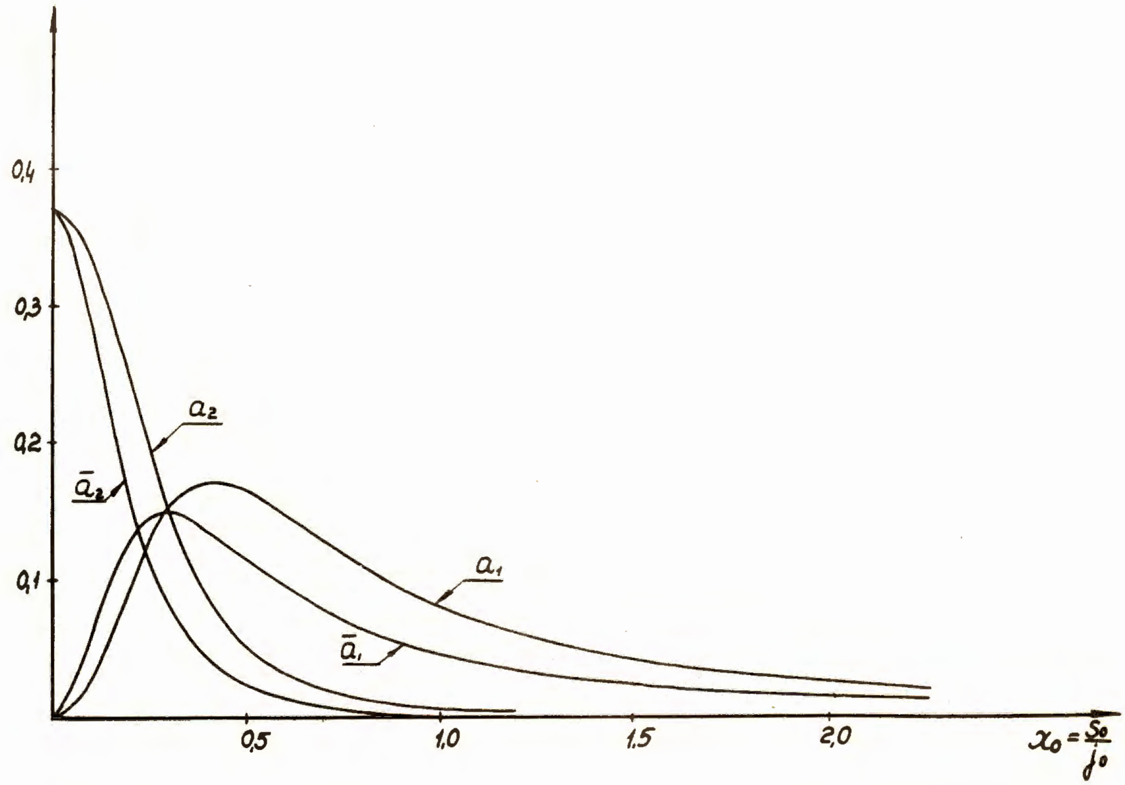
0,4
0,3
0,2
0,1
$a_2$
$\bar{a}_2$
$a_1$
$\bar{a}_1$
0,5
1,0
1,5
2,0
$x_0 = \frac{S_0}{j_0}$

Рис. 1.

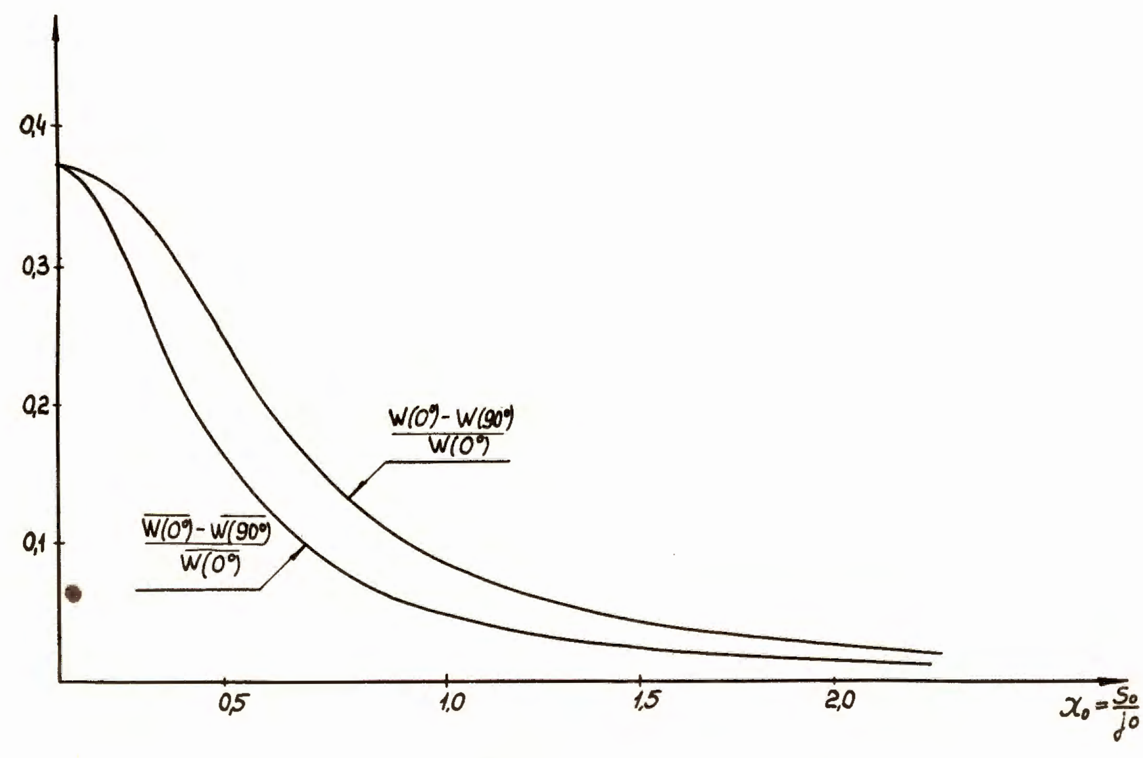
0,4
0,3
0,2
0,1
$\frac{W(0^\circ) - W(90^\circ)}{W(0^\circ)}$
$\frac{\overline{W}(0^\circ) - \overline{W}(90^\circ)}{\overline{W}(0^\circ)}$
0,5
1,0
1,5
2,0
$x_0 = \frac{S_0}{j_0}$

Рис. 2.