2183



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2183

О.И. Ярковой

# НЕСТАЦИОНАРНАЯ САМОСОГЛАСОВАННАЯ МОДЕЛЬ АЗИМУТАЛЬНО ОДНОРОДНОГО КОЛЬЦА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1965

2183

$\boxed{\text{О.И. Ярковой}}$

# НЕСТАЦИОНАРНАЯ САМОСОГЛАСОВАННАЯ МОДЕЛЬ АЗИМУТАЛЬНО ОДНОРОДНОГО КОЛЬЦА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Работа выполнена в связи с существующим в настоящее время большим интересом к проблеме накопления заряженных частиц. В таких установках существенно взаимодействие частиц между собой, что и приводит к необходимости решения самосогласованных задач.

При построении самосогласованных стационарных моделей[x)] различных систем заряженных частиц часто выбирают функцию распределения в виде некоторой функции от интегралов движения (при этом кинетическое уравнение удовлетворяется автоматически). Обычно эти интегралы являются следствиями однородности задачи по соответствующей координате. Так, в частности, для не зависящей от времени системы использование сохраняющегося в этом случае гамильтониана частицы позволяет строить решения, интегрируемые в пространстве импульсов, т.е. удовлетворяющие тому необходимому требованию, чтобы плотность частиц в координатном пространстве была конечной. В качестве одного из многих примеров такого рода можно привести работу [/1/]. Попытка использовать этот прием в нестационарном случае ведет к необходимости отыскания нетривиального интеграла движения (аналога гамильтониана), нетривиального в том смысле, что этот интеграл не является следствием однородности системы.

Задача может быть решена в используемом нами $X$ -линейном приближении для поперечного движения - таком, где разность сил, действующих на некоторую центральную частицу и любую другую, прямо пропорциональна отклонению этой частицы от центральной[xx)].

Отметим следующие моменты:

1. Для введения $X$ -линейного приближения для собственного поля кольца существенно задание определенной зависящей от нескольких произвольных функций

x) Под моделью здесь понимается любое частное решение кинетического уравнения с самосогласованным полем (без столкновений).

xx) $X$ - линейное приближение представляется для ряда задач физически различным и удобным.

времени конфигурации 4-тока. Выбор последней затем подтверждается решением кинетического уравнения. Для внешнего поля требуется лишь определенная плавность изменения его по сечению кольца при произвольной зависимости от времени.

2. X – линейное приближение никак не связано с линеаризацией кинетического уравнения, так что самосогласованная задача остается строго нелинейной.

3. Принципиальное решение задачи, т.е. отыскание нетривиального интеграла движения в рамках X -линейного приближения, достигается построением билинейной формы от $\dot{X}_i$, $X_i$ ( $X_i$ – поперечные координаты) из известных в теории линейных уравнений с произвольно зависящими от времени коэффициентами линейных инвариантов. Показано, что эта форма всегда может быть взята определенной и в этом случае функция распределения интегрируема в пространстве импульсов и соответствует состоянию, ограниченному в пространстве координат.

4. Построение искомого интеграла движения не накладывает никаких условий на зависимость системы от времени (не требуется медленности и т.п.).

5. Рассмотрение является кинетическим в том смысле, что в одной и той же точке одновременно находятся частицы с непрерывно распределенным направлением импульса, что не может быть сведено к абсолютно холодной многожидкостной гидродинамике с конечным числом компонент. Лишь па границе пучок-вакуум тензор давления обращается в нуль, благодаря чему и существует резкая движущаяся граница.

## § 1. Уравнения движения. X – линейное приближение. Кинетическое уравнение

Рассматривая пучок, свернутый в азимутально однородное кольцо, естественно использовать цилиндрическую систему координат ( $r$, $\theta$ , $z$ ), где уравнения движения частицы имеют вид

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) = \frac{\gamma \beta_\theta^2}{r} + \frac{1}{m} F_c^r + \frac{1}{m} F_e^r$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{z}) = \frac{1}{m} F_c^z + \frac{1}{m} F_e^z \qquad (1)$$

$$m\gamma \beta_\theta r + er(A_{\theta c} + A_{\theta e}) = M = \text{const}$$

Здесь принято: скорость света $c=1$.



$F^{r,z}_{e,c}(\vec{\beta}, r, z, t)$, $A_{\theta e,c}(r, z, t)$ – соответственно компоненты силы Лоренца и $\theta$ -я компонента вектор-потенциала. Знаком "c" помечаются величины, относящиеся к взаимодействию с собственным полем сгустка, значком "e" – с внешним полем. Остальные обозначения понятны.

Удобно отсчитывать координаты от некоторого центра сечения сгустка $r_o(t)$, $z_o(t)$. Обозначим

$$x_1 = r - r_o(t)$$
$$x_2 = z - z_o(t). \qquad (2)$$

Примем далее конкретный вид для 4-тока $(\rho, \vec{j})$ сгустка из работы /2/ x), а именно:

$$\rho(x_i, t) = \frac{eN}{2\pi^2 r}|G|^{1/2}\sigma(1 - x_i G_{ik}(t) x_k), \qquad j_\theta(x_i, t) = \beta_0(t)\rho,$$

$$j_r(x_i, t) = [\dot{r}_0(t) + \Omega_{1k}(t) x_k]\rho,$$

$$j_z(x_i, t) = (\dot{z}_0(t) + \Omega_{2k} x_k)\rho, \qquad i = 1,2 \qquad (3)$$

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \geq 0 \\ 0 & \xi < 0, \end{cases}$$

где N – полное число частиц в сгустке,

$\beta_o(t)$, $\dot{r}_o(t)$, $\dot{z}_o(t)$ – скорость движения центра сгустка (центральной частицы).

$G_{ik}(t)$, $\Omega_{ik}(t)$ – произвольно зависящие от времени матрицы, G – симметрична и имеет положительные собственные значения. Здесь и везде далее предполагается суммирование по всем индексам, встречающимся дважды.

Тогда (см. /2/ ) движение центральной частицы описывается уравнениями

---

x) Что касается соответствия 4-тока такого вида решению кинетического уравнения (поскольку речь идет о самосогласованной задаче), то как это показывается ниже (§ 3), такое соответствие может быть достигнуто .

$$\frac{d}{dt}\left[\{\gamma_o+\nu\,(1+\beta_o^2)\,L\;\}\,\dot{r}_\bullet\right]=\frac{\beta_o(M+er_\bullet A_{\theta_\bullet})}{m\,r_o^2}+\frac{1}{m}F^r_\bullet$$

$$\frac{d}{dt}\left[\{\gamma_o+\nu\,(1+\beta_o^2)\,L\,\dot{z}_\bullet\right]=\frac{1}{m}F^z_\bullet$$

$$m\,\gamma_o\beta_o r_\bullet+2m\,\nu\,r_o\beta_o L+e\,r_o A_{\theta_\bullet}=M\,, \tag{4}$$

где $\nu=\dfrac{e^2N}{2\pi r_o m}$ – "погонный" электрон,

$$L=\ln\frac{16\,r_o}{Sp\,G^{-1/2}}.$$

Перейдем к относительному движению частиц. Нас особенно интересует случай, когда первые два уравнения (1) могут быть линеаризованы по $x_i$. В частности, с этой целью для пучка принят 4-ток (3). Такое приближение назовем X-линейным. Оно играет крайне существенную роль при построении решения кинетического уравнения.

Согласно работе /2/ имеем

$$\frac{d}{dt}(\gamma_o(t)\,\dot{x}_i)+a_{ik}(t)\,x_k+\left[\omega_{ik}(t)-\frac{4\nu}{\gamma_o^2 Sp\,G^{-1/2}}\,G^{1/2}_{ik}(t)-\frac{\nu\,\beta_o^2 L}{r_o^2}\,\delta_{ik}\right]x_k=0\,,$$

где

$$\gamma_o=[\,1-\beta_o^2(t)\,]^{-1/2}$$

$$(a_{ik})=\gamma_o a(t)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$\omega_{ik}=\frac{\partial \overset{\approx}{F}_i}{\partial x_k}$$



$$\overset{\approx}{F}_1=\frac{M-er\,A_{\theta_\bullet}}{mr^2}+\frac{1}{m}F^r_\bullet$$

$$\overset{\approx}{F}_2=\frac{1}{m}F^z_\bullet$$

$$G^{1/2}\,G^{1/2}=G=(G_{ij})$$

$$G^{-1/2}\,G^{1/2}=1$$

(здесь и далее часто используются матричные обозначения), а также

$$\gamma_o a(t)=\frac{\partial \overset{\approx}{F}_1}{\partial \dot{x}_2}=-\frac{\partial \overset{\approx}{F}_2}{\partial \dot{x}_1}$$

$$\frac{\partial \overset{\approx}{F}_1}{\partial x_2}=\frac{\partial \overset{\approx}{F}_2}{\partial x_1}+\frac{d}{dt}[\gamma_o a)]. \tag{5б}$$

Производные от $\overset{\approx}{F}_i$ берутся в точке $r_o(t)$, $z_o(t)$, $\beta_o(t)$, $\dot{r}_o(t)$, $\dot{z}_o(t)$. Таким образом, величины $\gamma_o a(t)$, $\omega_{ik}(t)$, описывающие взаимодействие с внешним полем, являются функциями только времени, а для применимости X-линейного приближения в отношении внешних полей требуется лишь достаточная плавность изменения их по сечению кольца независимо от конкретного характера внешних полей.

Соотношения (5б) суть следствия уравнений Максвелла (см. /2/).

Что касается справедливости X-линейного приближения для собственной силы (к ней относится все, кроме $a,\omega_{ik}$), то здесь кроме вида 4-тока (3) должны быть выполнены следующие условия (см. /2/):

1) $\dfrac{a^2}{r_o^2}\ll\dfrac{1}{\gamma_o^2}$ ( a – характерный размер сечения пучка),

$$2)\quad \dot{x}_i^2 \ll \frac{1}{\gamma_0^2},\quad \dot{r}_0^2 \ll \frac{1}{\gamma_0^2},\quad \dot{z}_0^2 \ll \frac{1}{\gamma_0^2},\quad |\Omega_{ik}|\, a << \frac{1}{\gamma_0^2} \qquad (3a)$$

$$3)\quad \frac{2\nu}{\gamma_0} << 1,$$

$$4)\quad (\ddot{r}_0 r_0)^2 << \frac{1}{\gamma_0^2},\qquad (\ddot{z}_0 r_0)^2 << \frac{1}{\gamma_0^2}.$$

Как видно из (5), полученные выражения для сил взаимодействия частиц в сгустке по своему смыслу очень просты. Так, выражения $-\frac{4\nu}{\gamma_0^2\, Sp\, G^{-1/2}}\, G_{ik}^{1/2}\, x_k$ есть сила Лоренца, вычисленная для поля выпрямленного пучка равномерной плотности эллиптического сечения. Дополнительные силы расталкивания, происходящие от различия конфигурации электрического и магнитного полей в искривленном пучке учитываются членом $\frac{\nu \beta_0^2 L}{r_0^2}\, x_1$.

Время в собственную силу входит лишь как параметр (см. по этому поводу замечание в /2/).

В связи с этим условие 1) из (3а) есть условие определенной тонкости кольца. Условия 2) и 3) соответствуют нерелятивистскому движению частиц в системе координат, сопутствующей центральной частице, - малость кинетической энергии и глубины потенциальной ямы по сравнению с массой покоя. При условии 4) влияние излучения на относительное движение частиц мало.

Эффекты, связанные с излучением, в нашем приближении проявляются лишь в движении кольца как целого (см. (4) - добавка к массе).

Для дальнейшего удобно систему (5) использовать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= - a_{ik}(t)\, v_k - b_{ik}(t)\, x_k . \end{aligned} \qquad (6)$$

Смысл $a_{ik}$ и $b_{ik}$ виден из сравнения с (5).

В качестве переменных в кинетическом уравнении возьмем

$$t,\ x_i,\ v_i,\ \theta,\ M .$$

В результате в X -линейном приближении кинетическое уравнение примет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + [ - a_{ik}(t)\, v_k - b_{ik}(t)\, x_k ]\, \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0 . \qquad (7)$$

Для элемента объема в пространстве импульсов имеем

$$dP = \frac{1}{r}\, dM\, dp_r\, dp_z = \frac{\gamma_0^2}{r}\, dM\, d^2 v . \qquad (7a)$$

Выражение для $dP$ в дозволенных рамках выбрано так, чтобы уравнение непрерывности выполнялось точно, в чем легко убедиться.



Уравнение (7) и определение (7а) и составляет формулировку кинетического уравнения в X -линейном приближении

Задача будет самосогласованной, если мы получим такое решение (7), которое действительно дает предположенную конфигурацию 4-тока (3). Результат достигается в § 3. Хочется сразу подчеркнуть также, что X -линейное приближение никак не связано с линеаризацией кинетического уравнения. Действительно, как видно из (5) и (7), в коэффициент $b_{ik}(t)$ входят величины $G_{ik}^{1/2}(t)$, выражающиеся через функционалы от функции распределения $f$. Таким образом, самосогласованная задача остается строго нелинейной.

Для того, чтобы функция распределения $f$ как решение кинетического уравнения описывала физически осмысленную систему, требуется сходимость интеграла от $f$ при интегрировании по всему пространству импульсов (здесь, кстати, мы требуем больше - существования интеграла по всему фазовому пространству, т.е. чтобы система частиц в каком-то смысле была локализована в пространстве координат). Результата можно достичь, если функция распределения зависит от интеграла движения, являющегося билинейной формой скоростей $v_i$ (ср. распределение Максвелла, /1/ и пр.). Вместе с тем принципиальное отличие нестационарной задачи от стационарной состоит в том, что здесь искомый интеграл движения не является следствием симметрии задачи (как это имеет место для гамильтониана в стационарном случае). Этим вопросом мы сейчас и займемся.

Далее число функций $x_i$ не предполагается равным двум, поскольку для ряда результатов это несущественно.

## § 2. Билинейные инварианты системы линейных уравнений

Для линейной системы уравнений известен линейный по ее решению инвариант (см. /3/). В частности, для системы в виде (6) получаем

$$\xi_{\alpha i}(t)\, v_i + \mu_{\alpha i}(t)\, x_i = c_\alpha = \text{const}, \qquad (8)$$

где $\xi_{\alpha i}$, $\mu_{\alpha i}$ - любое частное решение системы, сопряженной с исходной (6),

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_i &= b_{ki}\, \xi_k \\ \dot{\xi}_i &= -\mu_i + a_{ki}\, \xi_k . \end{aligned} \qquad (8a)$$

Система (8а) имеет $2n$ линейно-независимых решений. Тогда, воспользовавшись (8), можно построить билинейный инвариант системы (6) общего вида. Умножим (8) на такое же равенство с другим значением $\alpha$, равным некоторому $\beta$, и на $d_{\alpha\beta}$ -матричный элемент произвольной постоянной симметричной $[2n \times 2n]$ матрицы и просуммируем по всем греческим индексам от 1 до $2n$. В результате получим

$$S_{ij}(t)\, v_i v_j + 2P_{ij}(t)\, v_i x_j + Q_{ij}(t)\, x_i x_j = C = C_\alpha d_{\alpha\beta} C_\beta, \tag{9}$$

где

$$S_{ij}(t) = d_{\alpha\beta}\, \xi_{\alpha i}\, \xi_{\beta j}$$

$$P_{ij}(t) = d_{\alpha\beta}\, \xi_{\alpha i}\, \mu_{\beta j}. \tag{9а}$$

$$Q_{ij}(t) = d_{\alpha\beta}\, \mu_{\alpha i}\, \mu_{\beta j}.$$

Величины $(\mu_{\alpha i}, \xi_{\alpha i})$ образуют некоторую систему решений (6), которая может быть записана в виде $[2n \times 2n]$ матрицы

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{2n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{1n} & \cdots & \mu_{2n,n} \\ \xi_{11} & \cdots & \xi_{2n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{1n} & \cdots & \xi_{2n,n} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Матрицу $d_{\alpha\beta}$ без нарушения общности можно считать единичной. Действительно, полагая,

$$d_{\alpha\beta} = d^{1/2}_{\sigma\alpha}\, d^{1/2}_{\sigma\beta},$$

что возможно для любой симметричной матрицы, и вводя величины

$$\mu'_{\alpha i} = d^{1/2}_{\alpha\sigma}\, \mu_{\sigma i}$$

$$\xi'_{\alpha i} = d^{1/2}_{\alpha\sigma}\, \xi_{\sigma i},$$

приведем (9а) к виду

$$S_{ij} = \xi'_{\alpha i}\, \xi'_{\alpha j}$$

$$P_{ij} = \xi'_{\alpha i}\, \mu'_{\alpha j} \tag{9б}$$

$$Q_{ij} = \mu'_{\alpha i}\, \mu'_{\alpha j}.$$

При этом штрихованные величины подчиняются тем же уравнениям, что и нештрихованные, и если вторые составляли линейно-независимую систему решений и определитель матрицы $d$ отличен от нуля, то и преобразованные решения будут линейно-независимы, т.е. образуют некую фундаментальную систему. Поскольку исходная система никак не фиксирована, убеждаемся, что $d$ действительно можно взять единичной. Если, однако, при таком переходе от действительных $\xi_{\alpha i}$, $\mu_{\alpha i}$ мы хотим перейти к действительным же $\xi'_{\alpha i}$, $\mu'_{\alpha i}$ то, вообще говоря, матрица $d$ не может быть положена единичной, а должна быть взята диагональной, где каждый диагональный элемент может быть взят равным +1 или −1, независимо от остальных в соответствии с сигнатурой матрицы $d$. В следующем разделе мы, однако, убедимся, что для наших целей годится только единичная матрица (или единичная с обратным знаком, что не играет роли), так чтобы форма, стоящая в (9) слева, была бы определенной. Для определенности будем считать ее положительно определенной.



Легко видеть, что (далее значком * помечается транспонированная матрица, или эрмитово-сопряженная с исходной, поскольку все матрицы считаются действительными, значком −1 обратная)

$$\Sigma\, \Sigma^* = \begin{pmatrix} Q & P^* \\ P & S \end{pmatrix}. \tag{10а}$$

Здесь $S$, $P$, $Q$ – матрицы с элементами, определенными в (9). Далее элементы $[n \times n]$ матриц обозначаются знаком матрицы с соответствующими индексами. Вычислим определитель $\Sigma\Sigma^*$. Согласно /4/

$$|\Sigma\Sigma| = |S|\,|G|, \tag{10б}$$

где $G = Q - P^* S^{-1} P$

(считается, что $S$ неособенная). Матрица $G$ играет при дальнейших построениях важную роль. С другой стороны, известно, что

$$|\Sigma| = \mathrm{const}\; e^{\int \mathrm{Sp}\, a(t)\, dt}, \tag{10в}$$

или окончательно

$$\frac{1}{|S|} = \mathrm{const}\, |G|\; e^{-2\int \mathrm{Sp}\, a\, dt}, \quad \mathrm{const} > 0. \tag{10г}$$

Теперь установим уравнения, которым подчиняются матрицы $S, P, Q$. Это можно сделать, просто воспользовавшись определением (9а) и уравнениями (8а). В результате имеем

$$\dot S = -P^* - P + a^* S + S a$$

$$\dot P = -Q + a^* P + S b \tag{11}$$

$$\dot Q = b^* P + P^* b.$$

Легко убедиться, что верно и обратное предложение, т.е. если матрицы $S, P, Q$ подчиняются уравнениям (11), а $v_i, x_i$ – (6), то левая часть (9) есть интеграл движения системы (6). Таким образом, для того, чтобы найти интеграл движения, достаточно было бы предположить, что он имеет вид левой части (9), и установить непосредственным дифференцированием, что тогда $S, P, Q$ должна подчиняться уравнениям (11). Однако выявление связи $S, P, Q$ с фундаментальной системой решений сопряженной системы (11) представляется не лишенным смысла и используется в § 3.

## § 3. Уравнения в коллективных переменных. Уравнение непрерывности. Самосогласованная модель

Рассмотрим решение кинетического уравнения (7) довольно общего вида

$$f = A\,\delta(M - M_0)\,\Phi'(I). \tag{12}$$

Штрихом обозначена производная произвольной функции $\Phi(I)$ по ее аргументу (предполагается $\Phi'(I) > 0$).

В матричных обозначениях

$$I = v^* S v + 2 v^* P x + x^* Q x, \tag{12a}$$

$A$ – нормировочная константа.

Для простоты положим также

$$\Phi(\infty) = 0 .$$

Функция (12) действительно удовлетворяет кинетическому уравнению, поскольку является функцией интегралов движения.

В этом разделе только лишь для простоты будем считать $n=2$. Все результаты, не связанные с самосогласованностью задачи, легко переносятся на общий случай.

Вычислим 4-ток (для относительного движения). Согласно (7а) и (12) имеем

$$\left.\begin{aligned} \rho &= e \int f\, \frac{\gamma_0^2}{r}\, dM\, d^2 v = \frac{e A \gamma_0^2}{r} \int \Phi'(I)\, dv_1\, dv_2 \\ j_\theta &= \beta_0(t)\,\rho \\ j_{1,2} &= \frac{e A \gamma_0^2}{r} \int v_{1,2}\, \Phi'(I)\, dv_1\, dv_2 . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Все интегралы берутся от $-\infty$ до $+\infty$.



Замечая, что $S$ (равно как и $Q$ и $G$) – симметричная матрица, положим

$$S_{ij} = L_{si} L_{sj},$$

что дает возможность записать $I$ в следующем виде

$$I = y_s^2 + x_i G_{ij} x_j = T + x^* G x, \tag{14}$$

где

$$y_s = L_{si} v_i + P_{ij} L^{-1}_{is} x_j, \tag{14a}$$

Здесь используется также то свойство $L$, что

$$S^{-1}_{pq} = L^{-1}_{pk} L^{-1}_{qk}.$$

Тогда имеет смысл в (13) перейти к интегрированию по $y_s$. Учитывая

$$\left| \frac{\partial(y_1 \ldots y_n)}{\partial(v_1 \ldots v_n)} \right| = |L_{sl}| = |S|^{1/2},$$

имеем

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{e A \gamma_0^2}{r |S|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(I)\, d^2 y = \frac{\pi e A \gamma_0^2}{r |S|^{1/2}} \int_0^{\infty} \Phi'(T + x^* G x)\, dT = \\ &= \frac{\pi e A \gamma_0^2}{r |S|^{1/2}}\, \Phi(x^* G x) = -\frac{\pi e A C_0}{r} |G|^{1/2}\, \Phi(x^* G x). \end{aligned} \tag{15}$$

Последнее равенство в силу (10г) и учтено, что для нашего случая

$$e^{\int Sp\, a\, dt} = \mathrm{const}\, \gamma_0^2(t).$$

Здесь уместно сделать следующее замечание. В (14) и далее предположено, что форма $T$ представляется в виде суммы квадратов действительных величин $y_s$. Для этого достаточно, чтобы форма $I$ была положительно определена (т.е. чтобы $\mu'_{\alpha}$, $\xi'_{\alpha}$ были действительными величинами, что всегда возможно). Действительно, канонический вид формы не зависит от способа ее приведения, а в (14) такое приведение и выполнено частично. Таким образом, независимо от коэффициентов уравнений $a_{ik}(t)$ и $b_{ik}(t)$, т.е. независимо от внешних полей, модель, в которой $I$ есть определенная форма, описывает состояние, интегрируемое по импульсам и, как будет показано далее, локализованное в пространстве координат. В Приложении показано, что если $I$ есть форма неопределенная, то этим требованиям удовлетворить нельзя.

Для вычисления двух других интегралов в (13), умножая (14а) на $L_{rs}$ и суммируя по $s$, имеем

$$v_r = L^{-1}_{rs} y_s + \Omega_{rk} x_k,$$

где
$$\Omega_{rk} = -P_{jk}\, S^{-1}_{jr} \tag{16}$$

или
$$\Omega = -S^{-1} P \; .$$

Отсюда, учитывая, что интеграл в симметричных пределах от нечетной функции равен нулю, получим
$$j_i = \bar{v}_i\,(x_i, t)\,\rho = \Omega_{ik} x_k\, \rho \; . \tag{15a}$$

Хочется еще отметить, что последнее выражение для $\rho$ в (15) справедливо всегда, если только потребовать выполнения уравнения непрерывности. Действительно, как показывает простейший анализ уравнения (7), для выполнения уравнения непрерывности элемент объема в $v_i$ обязан содержать множитель
$$e^{\int Sp\, a\, dt} \; .$$

Как видно из (15a), матрица $\Omega$ имеет четкий физический смысл в силу ее жесткой связи с вектором средней скорости. Антиэрмитовская часть $\Omega$ описывает завихрения в системе. Действительно, вычисляя ротор скорости, имеем
$$[\,\mathrm{rot}\; \vec{\bar{v}}\;(x_i, t)\,]_\theta = \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} = \Omega_{12} - \Omega_{21} . \tag{17}$$

Поскольку 4 – ток определяется через $G$ и $\Omega$, естественно основные уравнения (11) привести к виду, где $G$ и $\Omega$ фигурируют явным образом. В результате получим
$$\dot{S} = (\Omega + a\,)\,S + S\,(\Omega^* + \;a^*)$$
$$\dot{G} = -\Omega\, G - G\,\Omega^* \tag{18}$$
$$\dot{\Omega} = S^{-1} G + (\Omega + a\,)\,\Omega + b \; .$$

Система (18) в коллективных переменных $S$, $G$, $\Omega$ полностью описывает задачу. Отметим еще следствия двух первых уравнений (18). Умножая каждое из них соответственно на $S^{-1}, G^{-1}$ и взяв шпур, имеем
$$\frac{d}{dt}\,|\,S\,| = |\,S\,|\; Sp\,(S^{-1}\dot{S}\,) = 2\, Sp\,(\,\Omega + a\,)\,|\,S\,| \; . \tag{18a}$$
$$\frac{d}{dt}\,|\,G\,| = |\,G\,|\; Sp\,(G^{-1}\dot{G}\,) = -2\, Sp\; \Omega\; |\,G\,| \; .$$
Отсюда, кстати, легко следует равенство (10г), но здесь не видно, что константа в (10г) положительна (что, однако, необходимо в (15)).



Рассмотрим уравнение непрерывности. Используя (13), с учетом (15) и (15a) имеем
$$\left(\frac{d\,|\,G\,|^{1/2}}{dt} + |\,G\,|^{1/2}\; Sp\;\Omega\,\right)\Phi\,(\,x^* G x\,) +$$
$$+\,|\,G\,|^{1/2}\; x^*\,(\,\dot{G} + G\,\Omega + \Omega^*\,G\,)\,x\;\Phi'\,(\,x^* G x\,) = 0 \, . \tag{19}$$

Отсюда легко видеть, что второе из уравнений (18) с его следствием выражает по существу закон сохранения заряда.

Возвращаясь к задаче о построении самосогласованной модели, понимаемой как частное решение системы, состоящей из кинетического уравнения и уравнений Максвелла, видим, что осталось выбрать в (15) $\Phi(I)$ таким образом, чтобы выражение для $\rho$ приняло тот вид (3), для которого вычислена сила Лоренца (5). Полагая
$$-\,\Phi\,(\,x^* G x\,) = \sigma\,(\;1 - x^* G x\,)\, , \tag{20}$$

имеем
$$\rho \;=\; \frac{e\,N}{2\pi\, \varkappa\, r}\;|\,G\,|^{1/2}\;\sigma\,(1 - x^* G\, x\,)$$
$$j_\theta = \beta_0\,\rho \qquad\qquad j_i = \Omega_{ik}\, x_k\; \rho \; ,$$

что, если учесть движение центра сечения пучка, приведет к (3). Это и требуется согласно (3).

Здесь нормировочная константа определена из равенства
$$eN = \int r\,\rho\; d\vartheta\;\; d^2 x = 2\,\pi\,\varkappa\;\; AC_0$$
или
$$AC_0 = \frac{N}{2\,\pi^{\;3}} .$$
Функция распределения (12) может быть получена из (20) простым дифференцированием. Отсюда
$$f \;=\; \frac{N}{2\pi^{\,3} C_0}\;\delta\,(\,M - M_0)\;\delta\,(\,I - 1\,)\; . \tag{12a}$$

Итак, наша модель отвечает такой системе, где все частицы имеют два равных интеграла движения $M$ и $I$. При таком положении вещей допускается некий разброс скоростей $v_1$ и $v_2$. Однако, как это видно из (9), задание одной из них ( и координат $x_i$ ) двузначно определяет вторую. Что касается распределения частиц в пространстве, то плотность отлична от нуля лишь внутри эллипса $x^* Gx = I$. Это понятно, поскольку, как видно из (14), задание интеграла $I$ ведет к равенству
$$T + x^* G\, x = \mathrm{const}, \qquad\quad T > 0\, ,$$
т.е. допустимые значения координат $x_i$ при движении частицы никогда не выходят

за пределы эллипса, определяемого матрицей $G$ и величиной интеграла $I$.

В развитии системы во времени модель предусматривает изменение формы сечения кольца, выражающееся в изменении величин полуосей эллипса и их ориентации. При этом и в стационарном случае $\theta$ -я компонента ротора скорости (см. (17)) может быть отлична от нуля.

## § 4. Два других уравнения моментов

Получим из кинетического уравнения систему уравнений моментов. Знание функции распределения (или какие-либо предположения относительно нее) позволяет с этой точки зрения лишь замкнуть эту систему. Вычисления проводятся для функции (12а), хотя несложно провести выкладки для произвольной функции $\Phi(I)$.

Обозначим

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \int f\, \gamma_0^2\, d M\, d^2 v = \frac{r}{e}\,\rho \\
f_i &= r \int v_i f\, dP = \bar{v}_i f_0 \\
f_{ij} &= r \int v_i v_j f\, dP \\
f_{ijk} &= r \int v_i v_j v_k f\, dP .
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Уравнение непрерывности мы уже видели. Далее, умножая (7) сначала на $v_i$, а затем на $v_i v_j$ и выполняя интегрирование, имеем

$$
\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} f_{ik} + a_{ik} f_k + b_{ik} x_k f_0 = 0
\tag{21а}
$$

$$
\frac{\partial f_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} f_{ijk} + a_{jk} f_{ki} + a_{ik} f_{kj} + b_{jk} x_k f_i + b_{ik} x_k f_j = 0 .
$$

Введем матрицу

$$
f_0\, T_{ij} = \int (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)\, f\, \gamma_0^2\, d M\, d^2 v .
\tag{22}
$$

Таким образом, $T_{ik}$ тривиально связана с тензором давления. Тогда легко видеть, что

$$
\begin{aligned}
f_{ij} &= (\bar{v}_i \bar{v}_j + T_{ij})\, f_0 \\
f_{ijk} &= (v_i T_{jk} + v_j T_{ik} + v_k T_{ij})\, f_0
\end{aligned}
\tag{21б}
$$

и

$$
T_{ik} = \tfrac{1}{2}\, S^{-1}_{ik}\, (1 - x^* G x) .
\tag{22а}
$$



Как видно, на границе $T_{ik}$ обращается в нуль.

Этого результата и надо было ожидать. Действительно, равенство (9) с помощью (14) и (15а) можно переписать в виде

$$
(v^* - \bar{v}^*)\, S\, (v - \bar{v}) = 1 - x^* G x .
$$

Отсюда следует, что если только $S$, как это и предполагается, такова, что форма слева положительно определена, то на границе скорости точно равны своим средним значениям. Внутри же эллипса, как уже указывалось, существует разброс скоростей.

В результате несложных вычислений получим из (21б) уравнения для $\bar{v}_i$ и $T_{ik}$ (не интересуясь непосредственно границей):

$$
\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - a_{ik} \bar{v}_k - b_{ik} x_k
\tag{21в}
$$

$$
\frac{\partial T_{ij}}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} + T_{ik} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + T_{jk} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + a_{ik} T_{kj} + a_{jk} T_{ki} = 0 .
$$

Если записать выражения для $\bar{v}_i$ и $T_{ik}$ в явном виде, то легко видеть, что уравнение Эйлера есть умноженное на $x$ третье из уравнений (18). Что касается второго из уравнений (21в), то замечая, что в силу уравнения непрерывности (18) (второе) множитель $(1 - x^* G x)$ в $T_{ik}$ может быть вынесен за знаки производных, получаем точно уравнение для $S^{-1}$, которое эквивалентно первому из системы (18). Легко проверить, что граничные условия также содержатся в системе (18).

## § 5. Другие коллективные переменные. Некоторые частные случаи

Уравнения (18) имеет смысл представить в другом виде, удобном для некоторых приложений. Положим

$$
S = L^* L , \qquad G = \Lambda^* \Lambda .
\tag{23}
$$

Тогда, например, для $G$

$$
\dot{G} = \dot{\Lambda}^* \Lambda + \Lambda^* \dot{\Lambda} = - \Lambda^* \Lambda \Omega - \Omega^* \Lambda^* \Lambda
\tag{23а}
$$

(последнее согласно (18)).

Поскольку $\Lambda$ уравнениями (23) определяется лишь с точностью до умножения слева на унитарную матрицу, возможно положить

$$
\begin{aligned}
\dot{\Lambda} &= - \Lambda \Omega & \qquad (\dot{\Lambda}^* &= - \Omega^* \Lambda) \\
\dot{L} &= L(\Omega + a) & \qquad (\dot{L}^* &= (\Omega^* + a^*) L^*) .
\end{aligned}
\tag{23б}
$$

Далее из (23б)

$$\Omega = -\Lambda^{-1}\dot{\Lambda} = L^{-1}\dot{L} - a = \dot{\Lambda}^{-1}\Lambda = -\dot{L}^{-1}L - a. \tag{23в}$$

Или, дифференцируя (23в) и подставляя в уравнение для $\Omega$ из системы (18), имеем

$$\begin{aligned} &\ddot{\Lambda}^{-1} - L^{-1}L^{-1*}\Lambda^* + a\,\dot{\Lambda}^{-1} b\,\Lambda^{-1} = 0 \\ &\dot{\Lambda}^{-1}\Lambda + \dot{L}^{-1} L + a = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Такой вид уравнений представляет известные возможности в некоторых частных случаях.

1. Пусть

$$a = 0 \qquad b = b^*. \tag{25}$$

Тогда возможно искать частное решение (24), удовлетворяющее условию

$$\dot{L}^{-1} L = L^* L^{-1*} \qquad (\Omega^* = \Omega).$$

Однако при этом $G$ и $\Omega$ должны быть коммутативны

$$G\Omega - \Omega G = 0.$$

Тогда второе из равенств (24) может быть записано в виде

$$\dot{\Lambda}^{-1}\Lambda + L^* L^{-1*} = 0,$$

или

$$L^{-1*}\Lambda^{-1} = C_1 \qquad (L^{-1*} = C_1\Lambda), \tag{26}$$

где $C_1$ – произвольная постоянная матрица.

Условие коммутативности может быть тривиально выполнено, если $C_1$ отличается от единичной матрицы лишь произвольным постоянным множителем ($C_1 = c\,1$).

С точки зрения теории системы линейных уравнений равенство (26) означает, что при условиях (25) для системы (8а) существует такая фундаментальная система решений (10), что между ее компонентами существует $n$ алгебраических соотношений $L^{-1*} = c\Lambda$.

Теперь, когда найден интеграл системы (24), она сводится к одному уравнению второго порядка, содержащему произвольную постоянную

$$\ddot{\Lambda}^{-1} - c^2\Lambda^*\Lambda\,\Lambda^* + b\,\Lambda^{-1} = 0. \tag{27}$$

2. $b$ – диагональная матрица (для краткости опять $a = 0$). В этом случае существует частное решение (24), в котором все матрицы диагональны и, следовательно, коммутативны. Имеем

$$L^{-1}*\Lambda^{-1} = C_2,$$

где $C_2$ – произвольная постоянная диагональная матрица. Обозначая $a_i$ диагональные элементы $\Lambda^{-1}$, $c_i$ – диагональные элементы $C_2$, запишем уравнение (24) для $\Lambda^{-1}$ в виде



$$\ddot{a}_i - \frac{c_i^2}{a_i^3} + b_i a_i = 0 \qquad (\text{по } i \text{ не суммировать}). \tag{27а}$$

Исходная система уравнений (8а) при этом эквивалентна $n$ независимым уравнениям второго порядка. Левая часть (8) обращается просто во вронксиан соответствующего уравнения.

Если $b_i(t)$ периодическая функция, то частным решением (27а) является огибающая решения уравнения Хилла

$$\ddot{x} + b(t)\,x = 0.$$

Отсюда можно усмотреть некоторую аналогию между (27а) и (27).

## § 6. Стационарные состояния и адиабатические процессы

В стационарном случае уравнения в коллективных переменных обращаются в алгебраические. При этом удобно пользоваться системой (11)

$$\begin{aligned} &P^* + P = a^* S + Sa \\ &Q = a^* P + Sb \\ &bP + P^* b = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Поскольку в этом случае $b$ есть матрица эрмитовская, можно совершить такое унитарное преобразование, что в новом представлении матрица $b$ будет диагональной. Это соответствует повороту системы координат $x_1, x_2$. Итак, имеем

$$b_0 = U^* b\, U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Система (28) инвариантна относительно унитарного преобразования, причем матрица

$$a = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

не меняется при этом преобразовании. Из третьего уравнения системы (28) имеем (далее значком 0 помечаются матрицы в новом представлении)

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & p\lambda_2 \\ -p\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{29а}$$

где $p$ – произвольная константа.

Подставляя этот результат в первое уравнение системы (28) легко обнаружить, что эрмитовская матрица $S_0$ обязана быть диагональной, т.е.

$$S_0 = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \qquad (29б)$$

и

$$p(\lambda_2 - \lambda_1) = a(s_1 - s_2). \qquad (29в)$$

Итак, при $\lambda_1 = \lambda_2$ состояние определяется однозначно двумя постоянными $s_1$ и $s_2$. При $\lambda_1 = \lambda_2$ и $a \neq 0$ необходимо $S_1 = S_2$ и состояние определяется двумя постоянными $p$ и $s_1$.

В случае же $\lambda_1 = \lambda_2$ и $a = 0$ возможно задание трех постоянных $p$, $s_1$ и $s_2$.

Этот результат вполне понятен. Действительно, вне рамок самосогласованной задачи интеграл движения (9) аддитивен и, следовательно, может быть получен как линейная комбинация независимых билинейных интегралов движения. Всегда, когда равенства $\lambda_1 = \lambda_2$ и $a = 0$ не выполняются одновременно, независимых интегралов движения вида (9) два, в последнем случае – три (гамильтонианы движения по главным осям и момент относительно оси $\theta\ v_1 x_2 - v_2 x_1$). В самосогласованной задаче наш интеграл движений не будет аддитивным, но по-прежнему содержит две (или три) произвольных постоянных. Таким образом, в рамках $X$-линейного приближения общий интеграл движения вида (9) описывает более широкий класс стационарных состояний, чем в /1/. Результаты последней получаются, если положить $\mathcal{S}_1 = S_2$, $p = 0$.

Из второго уравнения системы (28) имеем

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 s_1 + a p \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 s_2 + p \lambda_2 \end{pmatrix}. \qquad (29г)$$

Далее имеем для матрицы $G$

$$G = \begin{pmatrix} \lambda_1 s_1 + a p \lambda_1 - p^2 \dfrac{\lambda_1^2}{s_2} & 0 \\ 0 & \lambda_2 s_2 + a p \lambda_2 - p^2 \dfrac{\lambda_2^2}{s_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_1^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_2^2} \end{pmatrix}. \qquad (29б)$$

Отсюда следует, что матрицы $S$, $Q$ и $G$ приводятся к диагональному виду одним и тем же унитарным преобразованием. Из вида матрицы $b$, выраженной через внешнее и самосогласованное поле



$$b_{ik} = \frac{1}{\gamma_0}\left(\omega_{ik} - \frac{4\nu}{\gamma_0^2\, \mathrm{Sp}\, G^{-1/2}} G_{ik}^{1/2} - \frac{\nu \beta_0^2 L}{r_0^2} \delta_{ik}\right),$$

находим, что это же преобразование приводит к главным осям силу внешнего поля. Таким образом, полуоси эллипса сечения в стационарном состоянии ориентируются по главным направлениям лоренцовой силы внешнего поля.

В качестве независимых постоянных удобно принять полуоси эллипса сечения $a_{1,2} > 0$. При этом $a_1$ и $a_2$ должны быть такими, чтобы собственные значения матрицы $S$ $s_1$ и $s_2$ были положительны. Здесь уместно сделать следующее замечание. Хотя ранее было показано, что уравнения в коллективных переменных всегда имеют решение с положительными собственными значениями матриц $S$ и $G$, тем не менее ниоткуда не следует, что при произвольных постоянных коэффициентах уравнений такое решение будет также не зависящим от времени.

С общей точки зрения построение адиабатических инвариантов (см. /5/) сводится к отысканию переменных действия. Последнее требует разделения переменных при фиксированных значениях медленно меняющихся параметров.

В стационарном состоянии имеем уравнения движения частицы после приведения к главным осям

$$\ddot{x}_1 + a\,\dot{x}_2 + \lambda_1 x_1 = 0$$
$$\ddot{x}_2 - a\,\dot{x}_1 + \lambda_2 x_2 = 0. \qquad (30)$$

Общее решение этой системы может быть записано как

$$x_1 = \sqrt{\left|\frac{\omega_1^2 - \lambda_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right|} \times z_1 - \frac{\lambda_2 - \omega_2^2}{a\,\omega_2^2}\sqrt{\left|\frac{\omega_2^2 - \lambda_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right|}\ \dot{z}_2 \qquad (30а)$$

$$x_2 = \frac{\lambda_1 - \omega_1^2}{a\,\omega_1^2}\sqrt{\left|\frac{\omega_1^2 - \lambda_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right|}\ \dot{z}_1 + \sqrt{\left|\frac{\omega_2^2 - \lambda_1}{\omega_1^2 - \lambda\omega_2^2}\right|}\ z_2,$$

где

$$\ddot{z}_i = -\omega_i^2 z_i$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + a^2)^2}{4} - \lambda_1 \lambda_2} > 0$$

$$\lim_{a \to 0} (\lambda_1 - \omega_1^2) = 0.$$

Можно легко убедиться, что при $a=0$ преобразование от $x_i$ к $z_i$ является тождественным.

В новых канонических переменных $z_i$, $\gamma_0 \dot z_i$ исходный гамильтониан поперечного движения примет вид

$$H = \sum_{i}^{2} \left[ \tfrac{1}{2} \gamma_0 \dot z_i^2 + \tfrac{1}{2} \gamma_0 \omega_i^2 z_i^2 \right] . \qquad (31)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию переменной действия для гармонического осциллятора. Итак, имеем

$$I_i = \frac{\gamma_0}{2\omega} \left( \dot z_i^2 + \omega_i^2 z_i^2 \right). \qquad (31a)$$

Поскольку преобразование от $x_i$, $\dot x_i$ к $z_i$, $\dot z_i$ линейно, а адиабатические инварианты $I_i$ суть билинейные формы от $v_i$, $x_i$, нужный нам интеграл движения вида (9) должен быть взят в виде линейной комбинации $I_i$ с постоянными коэффициентами

$$I = C_1 I_1 + C_2 I_2 . \qquad (31б)$$

Выразим из (30а) $\dot z_i$, $z_i$ через $\dot x_i$, $x_i$

$$z_1 = \frac{\omega_2^2 - \lambda_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \sqrt{\left| \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 - \lambda_2} \right|} \left\{ x_1 + \frac{\lambda_2 - \omega_2^2}{a\,\omega_2^2} \dot x_2 \right\}$$

$$z_2 = \frac{\omega_1^2 - \lambda_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \sqrt{\left| \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_2^2 - \lambda_1} \right|} \left\{ x_2 - \frac{\lambda_1 - \omega_1^2}{a\,\omega_1^2} \dot x_1 \right\}$$

$$\dot z_1 = \frac{\omega_2^2 - \lambda_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \sqrt{\left| \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 - \lambda_2} \right|} \frac{\lambda_2}{\omega_2^2} \left\{ \dot x_1 - \frac{\lambda_2 - \omega_2^2}{a} x_2 \right\}$$

$$\dot z_2 = \frac{\omega_1^2 - \lambda_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \sqrt{\left| \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_2^2 - \lambda_1} \right|} \frac{\lambda_1}{\omega_1^2} \left\{ \dot x_2 + \frac{\lambda_1 - \omega_1^2}{a} x_1 \right\} .$$

Подставляя последнее в (31б), получим выражение для матриц $S_0$, $P_0$, $Q_0$.



$$S_0 = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = c_1 \frac{\gamma_0}{\omega_1} \left| \frac{\omega_1^2 - \lambda_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right| \frac{\lambda_2^2}{\omega_2^4} + c_2 \frac{\gamma_0}{\omega_2} \left| \frac{\lambda_2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right| \frac{\lambda_1^2}{\omega_1^4} . \qquad (32)$$

$$s_2 = c_2 \frac{\gamma_0}{\omega_2} \left| \frac{\omega_2^2 - \lambda_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right| \frac{\lambda_1^2}{\omega_1^4} + c_1 \frac{\gamma_0}{\omega_2} \left| \frac{\lambda_1 - \omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right| \frac{\lambda_2^2}{\omega_2^4} .$$

Легко убедиться, что связь между матрицами $S$, $P$, $Q$ остается такой же, как и в стационарном случае. Существенное отличие адиабатического движения от стационарного состоит в том, что ни одна из матриц $S$, $P$, $Q$ не может быть взята постоянной. Заметим также, что матрицы адиабатического решения $S$, $P$, $Q$ по-прежнему приводятся к диагональному виду одним и тем же унитарным преобразованием, т.е. поворот эллипса сечения меняет величину своих полуосей и в то же время поворачивается в соответствии с главными осями внешней силы.

В простейшем случае $a=0$ имеем для матрицы $G$

$$G_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\sqrt{\lambda_1}\,\gamma_0 & 0 \\ 0 & c_2\sqrt{\lambda_2}\,\gamma_0 \end{pmatrix} . \qquad (32а)$$

## § 7. Резюме

Итак, в предлагаемой модели решение самосогласованной задачи сведено к решению системы обыкновенных уравнений

$$\dot S = S\,(\Omega + a) + (\Omega^* + a^*)\,S$$

$$\dot G = -G\,\Omega - \Omega^* G$$

$$\dot\Omega = S^{-1} G - (\Omega + a)\,\Omega - b$$

(или эквивалентным ей системам (11) и (24)), где по (8)

$$a = \frac{\dot\gamma_0}{\gamma_0}\, 1 + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \frac{1}{\gamma_0}\left(\omega(t) - \frac{4\nu}{\gamma_0^2 \mathrm{Sp}\, G^{-1/2}} G^{1/2}(t) - \frac{\nu \beta_0^2 L}{r_0^2} 1\right).$$

$G^{1/2}$ – симметричная матрица с положительными собственными значениями, определенная равенством

$$G^{1/2} G^{1/2} = G$$

$$G^{-1/2} G^{1/2} = 1$$

Самосогласованность задачи выражается в зависимости коэффициентов $b$ от $G$, т.е. в конечном счете от функции распределения. Физический смысл искомых величин был выяснен выше. В частности, вектор 4 – тока здесь равен

$$\rho = \frac{eN}{2\pi^2 r} |G|^{1/2} \sigma (1 - x^* G x)$$

$$j_\theta = \beta_0 \rho$$

$$j_i = \Omega_{ik} x_k \rho .$$

Автор благодарен В.И.Векслеру, Я.Б.Файнбергу и товарищам по работе, в особенности Э.А.Перельштейну, за интерес к работе и обсуждения.



## П Р И Л О Ж Е Н И Е

Покажем, что если форма $I$ неопределенна, то это ведет либо к расходимости интеграла (13), что физически бессмысленно, либо к тому, что плотность $\rho$ оказывается конечной на бесконечности, что также нам не подходит.

Действительно, пусть $I$ неопределенна. Тогда есть три возможности.

1. Форма $T$ неопределенна независимо от того, какова форма $x^*Gx$. Тогда $T = y_1^2 - y_2^2 + T_2$, где $T_2$ не содержит $y_1$ и $y_2$. Рассмотрим ту область пространства, где для определенности $y_1 > y_2$, $y_1 \geq 0$. Полагая

$$y_1 = \sqrt{T_1}\, \mathrm{ch}\, s$$

$$y_2 = \sqrt{T_1}\, \mathrm{sh}\, s ,$$

имеем

$$0 < T_1 < \infty \qquad -\infty < s < \infty$$

$$\left|\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(T_1, s)}\right| = 1/2 , \qquad y_1^2 - y_2^2 = T_1$$

и, следовательно,

$$\int \Phi'(I)\, dy_1\, dy_2 = 1/2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi'(T_1 + T_2 + x^* G x)\, dT_1\, ds .$$

Как видно, этот интеграл расходится, так как подинтегральное выражение не зависит от $s$.

2. Если $T$ определенна, но неопределенна форма $x^* G x$, то в пространстве $x_i$ существуют такие области, где при $x_i \to \infty$ плотность остается конечной.

3. Остается последняя возможность для неопределенной $I$. $T$ и $x^* G x$ определены обе, но имеют разный знак. Для определенности $T > 0$, $x^* G x < 0$, тогда имеем из (15)

$$\rho \sim \Phi(x^* G x).$$

Состояние может считаться локализованным в пространстве только тогда, когда $\Phi(x^* G x) \to 0$ при $x \to \infty$. С учетом $x^* G x < 0$ это тождественно с $\Phi(-\infty) = 0$. Но по определению $\Phi(\infty) = 0$. Таким образом, $\Phi'(I)$ меняет знак и, следовательно, не может быть функцией распределения.

## Л и т е р а т у р а

1. О.И.Ярковой. ЖТФ XXXII, VII , 1285 (1962).
2. Э.А.Перельштейн, О.И.Ярковой. Электромагнитное поле заряженного пучка, свернутого в азимутально однородное кольцо. Препринт ОИЯИ, 2351,1965.
3. Дж. Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1 ИЛ Москва (1954).
4. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. ГИТТЛ, Москва
5. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика , Физматгиз, Москва (1958).

Рукопись поступила в издательский отдел
19 мая 1965 г.