

С 3450

Я. 744

3/111-15 ✓

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2182



О.И. Ярковой

СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ ПУЧКА  
В НАКОПИТЕЛЕ С БОЛЬШИМ ТОКОМ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1965

2182

О.И. Ярковой

СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ ПУЧКА  
В НАКОПИТЕЛЕ С БОЛЬШИМ ТОКОМ

3387/2 чр.



Работа выполнена в связи с существующим в настоящее время большим интересом к проблеме накопления заряженных частиц. В накопителях существенно взаимодействие частиц между собой, что и приводит к необходимости решения самосогласованных задач.

При решении самосогласованной задачи разумно стремиться получить результат в наиболее наглядной форме и вместе с тем в наиболее слабых предположениях. Поэтому ищется частное решение для кольцевого пучка в слабофокусирующем магнитном поле с формой сечения пучка, близкой к кругу. По существу единственным принятым предположением является малость характерного размера сечения кольца по сравнению с его радиусом

$$\frac{a}{r_0} \ll 1. \quad (A)$$

Существенен учет кривизны системы. Как известно, для выпрямленного пучка при его ультрарелятивистской скорости движения  $\beta$  силы кулоновского расталкивания частиц уменьшаются по сравнению с покоящимся пучком в  $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$  раз. Для пучка, свернутого в кольцо, появятся дополнительные силы расталкивания (см. текст), не имеющие фактора  $\frac{1}{\gamma^2}$  и играющие в ряде случаев существенную, а то и определяющую роль.

Результат получен вплоть до максимальных возможных токов, при которых еще не нарушается условие (A), т.е. в том числе и в области  $\frac{v}{c} \geq 1$ , где  $v$  — погонный электрон. Напомним, что при ультрарелятивистской скорости вращения  $v = 1$  отвечает току в 17000а.

В основу работы положена самосогласованная модель работы <sup>/1/</sup>.

### 1. Решение системы уравнений для самосогласованного поля

Система нелинейных уравнений (18) работы <sup>/1/</sup>, описывающая стационарное состояние аксиально-симметричной системы заряженных частиц в заданном внешнем поле, может быть приближенно решена, если область  $S$ , занимаемая частицами, близка к некоторой области  $S_0$ , имеющей наперед заданную форму (но не размеры). Тогда для решения этой системы можно применять методы решения линейных интегральных уравнений. Размеры области  $S_0$  определяются из уравнения границы.

Будем считать  $S_0$  кругом радиуса  $a$  с центром в точке  $(r_0, 0)$  и с площадью, равной площади  $S$ . Систему (18) в <sup>/1/</sup> запишем в виде (обозначения см. в <sup>/1/</sup>)

$$E = - \frac{\kappa}{4\pi} \int_{S_0} G \phi E dr' dz' - \frac{\kappa}{4\pi} \int_{(S-S_0)} G \phi E' dr' dz' + H_0 - e\phi_0, \quad (1)$$

$$P_\theta = - \frac{\kappa}{4\pi} \int_{S_0} G_A P_\theta dr' dz' - \frac{\kappa}{4\pi} \int_{(S-S_0)} G_A P_\theta dr' dz' + \frac{M_0}{r} - \frac{e}{c} A_\theta.$$

Здесь  $(S-S_0)$  означает отличие  $S$  от  $S_0$ , так что существуют точки, где  $(S-S_0)$  должно учитываться как отрицательная площадь.

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения:

$$\frac{r-r_0}{a} = x \cos \psi, \quad \frac{z}{a} = x \sin \psi,$$

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}, \quad \eta = \frac{P_\theta}{mc}, \quad \mu = \frac{M_0 - r_0 A_\theta(r_0, 0)}{mc r_0}, \quad h = \frac{H_0}{mc^2}. \quad (2)$$

$$\kappa a \frac{a}{r_0} = \lambda^2, \quad \frac{a}{r_0} = \alpha;$$

(1) можно записать в виде (см. Приложение )

$$\gamma = - \frac{\lambda^2}{2\pi S_0} \int G_0 \gamma x' dx' d\psi' + \bar{\gamma} -$$

$$- \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_{S_0} G_\alpha \gamma x' dx' d\psi' - \frac{\lambda^2}{4\pi(S-S_0)} \int G_\alpha \gamma x' dx' d\psi', \quad (1a)$$

$$\eta = - \frac{\lambda^2}{2\pi S_0} \int G_0 \eta x' dx' d\psi' - \frac{\lambda^2}{2\pi S_0} \int g \eta x' dx' d\psi' + \bar{\eta} + \omega(x, \psi) -$$

$$- \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_{S_0} G_\alpha \eta x' dx' d\psi' - \frac{\lambda^2}{4\pi(S-S_0)} \int G_A \eta x' dx' d\psi'.$$

Здесь положено

$$G_0 = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos(\psi - \psi')}}},$$

$G_\alpha$  - функция порядка  $\alpha$  по сравнению с  $G_0$ .

$$g = \alpha x \cos \psi + \alpha^2 \left\{ \frac{(x^2 + x'^2 - 2xx' \cos(\psi - \psi'))}{4} (L - 2 + G_0) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{8} x^2 \cos 2\psi + 0(\alpha^3) \right\},$$

$$L = \ln \frac{8}{\alpha},$$

$$\bar{\gamma} = h - \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_{S_0} \gamma x' dx' d\psi',$$

$$\bar{\eta} = \mu - \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_0^{\pi} [L-2 - \alpha x' \cos \psi' - \frac{3}{8} \alpha^2 x'^2 \cos 2\psi'] \eta x' dx' d\psi' ,$$

$$\omega(x, \psi) = \frac{1}{mc} \left( \frac{M}{r} - \frac{e}{c} A_{\theta_0} \right) - \mu , \quad \phi_0 = 0 .$$

Изучая тонкое кольцо (/см.(А)/

$$a \ll 1 , \quad (3)$$

видим, что к решению системы (1а) с успехом может быть применен метод последовательных приближений. Действительно, опуская члены, пропорциональные  $a$ , получим уравнение

$$\gamma_1 = - \frac{\lambda^2}{2\pi \epsilon_0} \int G_0 \gamma_1 x' dx' d\psi' + \bar{\gamma} . \quad (4)$$

Очевидно,  $\gamma_1$  может рассматриваться как решение первого из уравнений (1а) в нулевом приближении по  $a$ . Однако уравнение (4) линейно и, следовательно, может быть решено стандартными приемами.

Согласно (2)  $G_0$  может быть представлена в виде

$$G_0 = G_0(x, x') + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x, x') \cos n(\psi - \psi') ,$$

$$g_0 = \sum_i \frac{\xi_{0i} \xi'_{0i}}{\lambda_{0i}^2} = \begin{cases} -\ln x & x > x' , \\ -\ln x' & x < x' , \end{cases}$$

$$\xi_{0i} = \frac{\sqrt{2}}{J_1(\lambda_{0i})} J_0(\lambda_{0i} x) , \quad J_0(\lambda_{0i}) = 0 , \quad \xi'_{0i} = \xi_{0i}(x') , \quad (4a)$$

$$g_n = 2 \sum_i \frac{\xi_{ni} \xi'_{ni}}{\lambda_{ni}^2} = \begin{cases} \frac{1}{n} \left( \frac{x'}{x} \right)^n & x > x' , \\ \frac{1}{n} \left( \frac{x}{x'} \right)^n & x < x' , \end{cases}$$

$$\xi_{ni} = \frac{\sqrt{2}}{J_n(\lambda_{ni})} J_n(\lambda_{ni} x) , \quad \frac{d\xi_{ni}}{dx} \Big|_{x=1} + n \xi_{ni} \Big|_{x=1} = 0 , \quad \xi'_{ni} = \xi_{ni}(x') .$$

Отсюда легко следует выражение для ядра  $G_\lambda$ , взаимного с  $G_0$ :

$$G_\lambda = \sum_i \frac{\xi_{0i} \xi'_{0i}}{\lambda_{0i}^2 + \lambda^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{ni} \xi'_{ni}}{\lambda_{ni}^2 + \lambda^2} \cos n(\psi - \psi') . \quad (4б)$$

Тогда решение (4) есть

$$\gamma_1 = \bar{\gamma} - \frac{\lambda^2}{2\pi \epsilon_0} \int G_\lambda \bar{\gamma} x' dx' d\psi' = \bar{\gamma} (1 - \lambda^2 \int_0^1 \sum_i \frac{\xi_{0i} \xi'_{0i}}{\lambda_{0i}^2 + \lambda^2} \cdot x' dx') . \quad (5)$$

Легко видеть, однако, что  $\gamma_1$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\gamma_1}{dx} \right) - \lambda^2 \gamma_1 = 0 .$$

Откуда

$$\gamma_1 = \gamma_0 I_0(\lambda x) = \bar{\gamma} \frac{I_0(\lambda x)}{I_0(\lambda)} , \quad (5a)$$

где  $\gamma_0$ , видно, есть значение  $\bar{\gamma}_1$  в центре сечения.



Далее, рассматривая случай, когда все частицы имеют ультррелятивистскую скорость вращения

$$\frac{\gamma^2 - \eta^2}{\gamma^2} \ll 1, \quad (6)$$

замечаем, что в уравнение границы (см. /1/)

$$\gamma^2 - \eta^2 - 1 = 0 \quad (7)$$

два последних оператора в уравнениях системы (1а) не дают заметного вклада, поскольку с учетом  $\alpha \ll 1$  и равенства площадей  $S$  и  $S_0$  они автоматически оказываются малыми по сравнению с разностью квадратов  $\gamma$  и  $\eta$  в нулевом приближении.

Таким образом, для определения границы возможно использовать  $\gamma_1$  и решение уравнения для  $\eta$  с отброшенными двумя последними слагаемыми. Последнее, обозначаемое впредь  $\eta_1$ , должно быть получено во втором порядке малости по  $\alpha$ . Физически это означает, что, рассматривая самосогласованную задачу о кольце заряженных частиц, мы должны учесть в силу расталкивания частиц, движущихся с ультррелятивистской скоростью, как члены, соответствующие движению в прямом пучке (и следовательно, имеющие малый фактор  $1 - \frac{\eta^2}{\gamma^2}$ ), так и члены, отвечающие дополнительно расталкиванию, связанному с кривизной системы (оператор, содержащий  $g$  в (1а)). Последние играют роль при  $\alpha^2 \gg 1 - \frac{\eta^2}{\gamma^2}$  и на больших расстояниях приводят к радикальному различию между силой  $e\vec{E}_0$  и силой  $e[\frac{\vec{v}}{c}\vec{H}_0]$ . Действительно, тогда  $\vec{E}_0$  - поле заряда,  $\vec{H}_0$  - поле магнитного диполя. Эта суммарная сила расталкивания должна быть скомпенсирована градиентами внешнего магнитного поля.

Пусть внешнее магнитное поле имеет обычную бочкообразную конфигурацию. Тогда во втором порядке по  $\alpha$

$$\begin{aligned} \omega(x, \psi) &= \mu \left[ (1 - n_r, -n_z) \frac{\Delta r}{r_0} + \frac{1}{2} n_r \frac{\Delta r^2}{r_0^2} + \frac{1}{2} n_z \frac{z^2}{r_0^2} \right] = \\ &= \mu \left[ (1 - 2n_1) \alpha \cos \psi + \frac{1}{2} n_1 \alpha^2 x^2 + \frac{1}{2} n_2 \alpha^2 x^2 \cos 2\psi \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее замечаем, что для обеспечения круглой границы требуется, чтобы  $\eta_1$  не зависело от  $\psi$ . Это достигается соответствующим выбором постоянных  $n_1$  и  $n_2$  в (8). Из второго из уравнений (1а), сокращенного должным образом, следует

$$\begin{aligned} \mu (1 - 2n_1) - \lambda^2 \int_0^1 \eta_1 x' dx' &= 0, \\ \mu \frac{n_2}{2} + \frac{3}{8} \lambda^2 \int_0^1 \eta_1 x' dx' &= 0. \end{aligned} \quad (8a)$$

Окончательно сокращенное уравнение для  $\eta_1$  выглядит так:

$$\eta_1 = -\lambda^2 \int_0^1 g_0 \eta_1 x' dx' + \bar{\eta} + \mu \frac{\alpha^2}{2} x^2 - \\ - \lambda^2 \frac{\alpha^2}{4} \left\{ (L-2)x^2 \int_0^1 \eta_1 x' dx' + \int_0^1 [(x^2 + x'^2) g_0 - x x' g_1] \eta_1 x' dx' \right\}. \quad (8)$$

Удобно, используя выражения для  $\mu$  (15) и (8а), записать (8) в виде:

$$\eta_1 = -\lambda^2 \int_0^1 g_0 \eta_1 x' dx' + \bar{\eta} + \frac{\alpha^2}{4} \Phi_\lambda(x, \eta_1), \quad (8a)$$

где

$$\Phi_\lambda = (\bar{\eta} - \lambda^2 \int_0^1 \eta_1 x' dx') x^2 - \lambda^2 \int_0^1 [(x^2 + x'^2) g_0 - x x' g_1] \eta_1 x' dx' \quad (8b)$$

Далее, используя известное нам ядро  $g_{\lambda_0}$ , взаимное с  $g_0$  (первая сумма (45)), получим

$$\eta_1 = \bar{\eta} - \lambda^2 \int_0^1 g_{0\lambda} \bar{\eta} x' dx' + \frac{\alpha^2}{4} \left( \Phi_\lambda - \lambda^2 \int_0^1 g_{0\lambda} \Phi_\lambda(x', \eta_1) x' dx' \right). \quad (10)$$

Решим это уравнение методом последовательных приближений с точностью до членов порядка  $\alpha^2$ . В нулевом приближении имеем (см. (15) и (5а))

$$\eta_{10} = \bar{\eta} \frac{I_0(\lambda x)}{I_0(\lambda)}. \quad (10a)$$

Подставляя это решение в (9б), получим

$$\Phi_\lambda = \bar{\eta} I_0^{-1}(\lambda) \left\{ -\frac{1}{\lambda^2} [(\lambda^2 + 4)I_0(\lambda) - 4\lambda I_1(\lambda)] + \frac{4}{\lambda^2} I_0(\lambda x) \right\}. \quad (10b)$$

Полагая

$$\eta_1 = \eta_{10} + \Delta \eta_1,$$

приходим к краевой задаче для  $\Delta \eta_1$ :

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{d \Delta \eta_1}{dx} \right) - \lambda^2 \Delta \eta_1 = \alpha^2 \bar{\eta} I_0^{-1}(\lambda) I_0(\lambda x), \quad (10b)$$

$$\Delta \eta_1(1) = \frac{\alpha^2}{4} \Phi_\lambda(1), \quad |\Delta \eta_1| < \infty.$$

Ее решение может быть представлено в виде

$$\Delta \eta_1 = \alpha^2 \bar{\eta} I_0^{-1}(\lambda) \frac{1}{2\lambda} x I_1(\lambda x) + \alpha^2 \bar{\eta} \frac{2I_1(\lambda) - \lambda I_0'(\lambda)}{4\lambda I_0^2(\lambda)} I_0(\lambda x)$$

и окончательно во втором порядке по  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_0 [I_0(\lambda x) + \alpha^2 \frac{x}{2\lambda} I_1(\lambda x)], \\ \eta_0 &= \bar{\eta} I_0^{-1}(\lambda) \left( 1 + \alpha^2 \frac{2I_1(\lambda) - \lambda I_0'(\lambda)}{4\lambda I_0^2(\lambda)} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (5а) и (11) в уравнение границы

$$\gamma^2 - \eta^2 = 1, \quad (12)$$

выразим  $\alpha^2$  через  $\gamma_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \lambda \frac{(1 + \epsilon_0^2) I_0^2(\lambda) - 1}{\eta_0^2 I_0^2(\lambda) \cdot I_1^2(\lambda)}, \\ \epsilon_0^2 &= \gamma_0^2 - \eta_0^2 - 1 = \frac{p_0^2 + p_{\perp 0}^2}{m^2 c^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом,  $\epsilon_0$  определяет разброс поперечного импульса в центре сечения.

Как видно из (13),  $\alpha^2$  тем меньше (т.е. кольцо тем более плотно), чем меньше  $\epsilon_0^2$ . Однако  $\epsilon_0^2$  не может быть взято произвольно малым. Действительно, внутри круга ( $x \leq 1$ ), т.е. в области, занимаемой частицами, должно выполняться условие

$$\gamma^2 - \eta^2 \geq 1, \quad (14)$$

т.е. на самой границе

$$\frac{d}{dx} (\gamma^2 - \eta^2) \Big|_{x=1} \leq 0. \quad (14a)$$

В противном случае получается фиктивное состояние, в котором все частицы расположены вне области  $S_0$ . Легко видеть, что (14а) точно совпадает с тем физически совершенно ясным условием, чтобы суммарная лоренцева сила, действующая на частицу на границе, была направлена внутри кольца. Используя в (14а) выражения (15а), (11) и (13), получим

$$\epsilon_0^2 \geq \epsilon_{0 \min}^2 = \frac{I_0^2(\lambda) + I_1^2(\lambda)}{I_0^2(\lambda) [I_0^2(\lambda) - I_1^2(\lambda)]} - 1 \geq 0. \quad (15)$$

Последнее неравенство, однако, может иметь место лишь при  $\lambda \leq 0,3$ . В противном случае в (13) следует положить  $\epsilon_0 = 0$ . В результате получается состояние, в котором и на границе, и в центре сечения частицы имеют лишь  $\theta$ -ю компоненту скорости.



## 2. Краткое обсуждение

Здесь мы будем рассматривать состояния с предельно малым значением  $\epsilon_0$ . При этом всегда можно пользоваться выражением (13) при  $\epsilon_0 = 0$ . В силу ультрарелятивистского значения скорости вращения в (13) можно также заменить  $\eta_0^2$  на  $\gamma_0^2$ .

В качестве одной из величин, определяющих состояние, естественно принять максимальную величину кинетической энергии  $\gamma_{\max}$ , поскольку при существенном изменении  $\gamma$  по сечению  $\gamma_{\max}$  более верно, чем  $\gamma_0$ , характеризует как взаимодействие частиц, так и усилия, требуемые при создании такого кольца. Другой естественной характеристикой является число частиц, которое мы будем выражать величиной  $\frac{2\nu}{\gamma_{\max}}$  ( $\nu = \frac{N r_0}{2\pi r_0}$  — погонный электрон).

Согласно (15а) и выражению для плотности заряда работы  $^{1/}$  и (2) имеем

$$\frac{2\nu}{\gamma_{\max}} = \frac{2r_0}{2\pi r_0 \gamma_{\max}} \frac{\kappa}{4\pi e^2} mc^2 \int_s \frac{\gamma}{r} dV = \frac{\lambda I_1(\lambda)}{I_0(\lambda)}. \quad (16)$$

Отсюда (13) перепишется в виде

$$\frac{a^2}{r_0^2} = \alpha^2 = \frac{1}{\gamma_{\max}^2} f\left(\frac{2\nu}{\gamma_{\max}}\right) = \frac{1}{\gamma_{\max}^2} \cdot \frac{\lambda I_0(\lambda)[I_0^2(\lambda) - 1]}{I_1(\lambda)}, \quad (17)$$

где  $\lambda$  определяется как функция  $\frac{2\nu}{\gamma_{\max}}$  из (16). Из (16) определим также требуемое внешнее поле, удерживающее кольцо на заданном радиусе  $r_0$ . Заменяя опять в ультрарелятивистском случае импульс энергией, получим

$$eH_z = - mc \left[ \frac{\mu}{r_0} + \frac{\mu(1 - n_r - n_x)}{r_0} \right] = - \frac{mc \gamma_{\max}}{r_0} \left[ 1 + \frac{2\nu}{\gamma_{\max}} (L-1) \right]. \quad (18)$$

Как видно, для удержания на заданном радиусе  $r_0$  заряженного кольца требуется большее магнитное поле, чем в случае одной частицы с тем же  $\gamma$ . Последнее обстоятельство объясняется существованием постоянной по сечению силы, направленной по радиусу  $r$  и происходящей от взаимодействия зарядов и токов кольца (расталкивание) и жестко связанной с кривизной системы.

Обратимся к формуле (17). График функции  $\gamma_{\max}^2 \alpha^2$  в зависимости от  $\frac{2\nu}{\gamma_{\max}}$  представлен на рисунке 1. Прежде всего отметим, что можно произвольно увеличивать число частиц в кольце, если пропорционально ему увеличивать  $\gamma_{\max}$ . Это легко понять, если учесть, что необходимое внешнее поле (см. (18)), а следовательно, и его градиенты, компенсирующие расталкивание частиц, пропорциональны  $\gamma_{\max}$ . (При этом

член, содержащий большую величину  $L$ , компенсируется силами расталкивания, обусловленными кривизной системы). При  $\frac{2\nu}{\gamma_{\max}} \ll 1$  формула (17) упрощается до вида

$$\frac{a^2}{r_0^2} = \frac{4\nu}{\gamma_{\max}} \cdot \frac{1}{\gamma_{\max}^2} \quad (19)$$

В этом случае основной нескомпенсированной силой расталкивания является сила Лоренца в выпрямленном пучке (отсюда множитель  $\frac{1}{\gamma_{\max}^2}$ ). Дополнительный множитель  $\frac{1}{\gamma_{\max}}$  обусловлен отмеченной выше пропорциональностью удерживающих сил  $\gamma_{\max}$ . Отметим также, что в этом случае плотность можно считать постоянной по сечению.

При  $\frac{2\nu}{\gamma_{\max}} \geq 1$  наблюдается резкий рост  $\frac{a^2}{r_0^2}$  при увеличении числа частиц ( $\gamma_{\max} = \text{const}$ ). Это и понятно, поскольку здесь существенную (а при  $\frac{2\nu}{\gamma_{\max}} \gg 1$  определяющую) роль играет сила расталкивания, обусловленная кривизной системы, так как согласно рис. 1 в этой области  $\frac{1}{\gamma_{\max}^2} \leq \frac{a^2}{r_0^2}$ . В результате увеличение сечения за счет увеличения числа частиц в свою очередь ведет к возрастанию силы расталкивания. Такого рода обратным действием и объясняется ход кривой при  $\frac{2\nu}{\gamma_{\max}} > 1$ .

В заключение приведем выражение для показателя спада магнитного поля

$$n = - \frac{r_0}{H_{\text{мд}}} \frac{\partial H_{\text{м}}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 1/2 - \frac{\frac{2\nu}{\gamma_{\max}}}{1 + \frac{2\nu}{\gamma_{\max}} (L-1)} \quad (20)$$

Отличие  $n$  от  $1/2$  для кольца круглого сечения объясняется разной величиной сил расталкивания, обусловленных кривизной, в  $r$  и  $z$  направлении (см. (16)).

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Имеем для функций  $G_{\phi}$  и  $G_A$  из (1)

$$G_{\phi} = \frac{4}{\sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2}} K(k),$$

$$G_A = \frac{4}{\sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2}} \left[ \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right],$$

где  $K$  и  $E$  - полные эллиптические интегралы,

$$k^2 = \frac{4r'r'}{(r+r')^2 + (z-z')^2},$$

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{(r - r')^2 + (z - z')^2}{(r + r')^2 + (z - z')^2}.$$

Раскладывая  $G_\phi$  и  $G_A$  по  $\frac{a}{r_0}$  с точностью до второго порядка, получим

$$(r - r_0 = x_1, z = x_2)$$

$$G_\phi = \frac{2}{r_0} [L + G_0 - \frac{x_1 + x_2}{2r_0} (L + G_0 - 1) + \varepsilon_\phi],$$

$$G_A = \frac{2}{r_0} [L + G_0 - 2 - \frac{x_1 + x_2}{2r_0} (L + G_0 - 3) + \varepsilon_A],$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{a^2}{r_0^3} \Big|,$$

$$\varepsilon_A = \varepsilon_\phi + \frac{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}{4r_0^3} (L + G_0) - \frac{(x_1 + x_1')^2}{2r_0^3} - \frac{3(x_1 - x_1')^2}{8r_0^3} - \frac{(x_2 - x_2')^2}{8r_0^3},$$

где

$$L + G_0 = \ln \frac{8r_0}{\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}}.$$

### Л и т е р а т у р а

1. О.И. Ярконой. ЖТФ, XXXII, 1285 (1962).
2. У.В. Ловитт. Линейные интегральные уравнения. Гостехиздат, Москва, 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел  
19 мая 1965 г.

