3/VIII-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2180

О.И. Ярковой

ДВЕ ОСОБЕННОСТИ ПЛОСКИХ ДВУХМЕРНЫХ САМОФОКУСИРУЮЩИХСЯ ПУЧКОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1965

2180

О.И. Ярковой

ДВЕ ОСОБЕННОСТИ ПЛОСКИХ ДВУХМЕРНЫХ САМОФОКУСИРУЮЩИХСЯ ПУЧКОВ

В реальных установках самофокусирующийся пучок[1, 2] обычно планируется использовать в виде замкнутого кольца, однородного по азимуту, так что его равновесная конфигурация является двухмерной, т.е. зависящей лишь от двух пространственных координат. Если пучок достаточно тонок, то влиянием кривизны на его собственное поле, определяющее равновесную конфигурацию, можно пренебречь (см.[1,2]). В этом случае пучок будем называть плоским двухмерным.

В §1 настоящей работы показано для общего случая, что при одной и той же линейной плотности[x] (по оси однородности z) равновесное распределение частиц в поперечной к оси z плоскости может быть произвольно растянуто (или сжато), причем без изменения функциональной зависимости функции распределения от импульса. Таким образом, в общем случае самофокусирующийся пучок может иметь произвольное сечение при заданных линейной плотности и разбросе поперечного импульса.

В § 2 решается самосогласованная задача для случая разных радиусов электронного и ионного пучков. Из решения, в частности, следует, что равновесие для заданных линейных плотностей и скоростей направленного движения возможно не при произвольных разбросах поперечного импульса электронов и ионов, а лишь при определенной связи между ними. Этот факт прямо связан с теоремой § 1, и его физическая трактовка проста: разброс поперечного импульса должен быть равен глубине потенциальной ямы, а последняя не зависит от величины сечения пучка. В простейшем частном случае пучка равномерной плотности и круглого сечения потенциал на границе, как известно, пропорционален линейной плотности частиц и не зависит от радиуса пучка.

Обе отмеченные особенности являются следствием двухмерности задачи и, в частности, того обстоятельства, что физической характеристикой заряда системы является в этом случае линейная плотность.

§1. Теорема о произвольном подобном преобразовании

В частном решении для самофокусирующейся системы (при совпадающих радиусах электронного и ионного пучков), полученном Беннетом[2], радиус пучка есть (обозначения работы[1])

---

[x] Предполагается также, что столкновения частиц не играют роли и можно пренебречь влиянием внешнего поля. Последнее справедливо для достаточно тонкого и плотного пучка[2].

$$r^{*2} = \frac{2c^2}{\pi e^2 \gamma_0 \beta_0^2 n_1^0}(T_1' + \gamma_0 T_2) = \frac{2c^2}{\pi e^2 \gamma_0^2 \beta_0^2 n_2^0}(T_1' + \frac{T_2}{\gamma_0}), \quad (1)$$

где

$n_1^0, n_2^0, \gamma_0 T_1', T_2$ –плотность на оси и температура соответственно электронов и ионов, $\gamma_0 = (1-\beta_0^2)^{-1/2}$, β_0 – направленная скорость электронов. Однако попытка выразить r^* через более определенные величины ν_1 и ν_2 (погонный электрон из /2/) не приводит к успеху, ибо тогда (1) дает лишь два требования, которым должны удовлетворять параметры системы, чтобы электронный и ионный пучки имели одинаковый радиус, – требования соответствия разброса поперечного импульса глубине потенциальной ямы:

$$\frac{2T_2}{m_e} = \nu_1 - \nu_2, \qquad \frac{2T'}{m_e\gamma_0} = \nu_2 - \frac{\nu_1}{\gamma_0^2}, \quad (1a)$$

где

m_e – масса электрона.

Так как в этом случае глубина потенциальной ямы не зависит от радиуса, последний может быть произвольным.

Легко показать, что это справедливо не только для частного решения Беннета, а аналогичный результат имеет место в самом общем случае, о чем говорит следующая

Теорема о произвольном подобном преобразовании.

Пусть $f_i(\vec{x},\vec{p})$ ($\vec{x} = (x_1, x_2)$ – плоская координата, $i = 1, \dots, n$ –сорт частиц) суть решения плоской двухмерной самосогласованной стационарной задачи с самофокусировкой в безграничном пространстве

$$\vec{v}\frac{\partial f_i}{\partial \vec{x}} + \{\vec{F}_i^{(e)}(\vec{x},\vec{v}) + e_i \vec{E} + e_i [\frac{\vec{v}}{c}\vec{H}]\}\frac{\partial f_i}{\partial \vec{p}} = 0, \quad (2)$$

$$E = -\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}}, \quad \vec{H} = [\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\vec{A}],$$

$$\phi(\vec{x}) = \sum \phi_i(\vec{x}) = -2\sum_i \int \ln|\vec{x}-\vec{\xi}|\rho_i(\vec{\xi})d^2\xi,$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \sum \vec{A}_i(\vec{x}) = -2\sum_i \int \ln|\vec{x}-\vec{\xi}|\vec{j}_i(\xi)d^2\xi,$$

$$\rho_i(\vec{x}) = e_i \int f_i(\vec{x},\vec{p})d^3p,$$

$$\vec{j}_i(\vec{x}) = e_i \int \vec{v} f_i(\vec{x},\vec{p})d^3p.$$

$\vec{F}_i^{(e)}(\vec{x},\vec{p})$ – сила, действующая на частицу со стороны внешнего поля. Тогда система

$$f_{\lambda i}(\vec{x},\vec{p}) = \frac{1}{\lambda^2} f_i(\frac{\vec{x}}{\lambda}, \vec{p}), \quad (3)$$

отвечающая той же линейной плотности частиц

$$q_\lambda = \int f_{\lambda i}(\vec{x},\vec{p})d^3p d^2x = \int f_i(\frac{\vec{x}}{\lambda},\vec{p})\frac{d^3p d^2x}{\lambda^2} = \int f_i(\vec{x},\vec{p})d^3p d^2x, \quad (3a)$$

а) в отсутствие внешних сил ($\vec{F}_i^{(e)} = 0$) также является решением уравнений (2),

б) при $\vec{F}_i^{(e)} \neq 0$ удовлетворяет системе (2) с уменьшенным в λ раз внешним полем.

Доказательство:

Вычислим собственное поле $\vec{E}_\lambda$ и $\vec{H}_\lambda$ для функции (3). Имеем

$$\rho_{\lambda i}(\vec{x}) = e_i \int f_{\lambda i}(\vec{x},\vec{p})d^3p = \frac{e_i}{\lambda^2}\int f_i(\frac{\vec{x}}{\lambda},\vec{p})d^3p = \frac{1}{\lambda^2}\rho_i(\frac{\vec{x}}{\lambda}), \quad (4)$$

$$\vec{j}_{\lambda i}(\vec{x}) = \frac{1}{\lambda^2}\vec{j}_i(\frac{\vec{x}}{\lambda}).$$

Далее

$$\phi_{\lambda i}(\vec{x}) = -2\int \ln|\vec{x}-\vec{\xi}|\rho_{\lambda i}(\vec{\xi})d^2\xi =$$

$$= -2\int \ln(\lambda|\frac{\vec{x}}{\lambda}-\frac{\vec{\xi}}{\lambda}|)\rho_i(\frac{\vec{\xi}}{\lambda})\frac{d^2\xi}{\lambda^2} =$$

$$= -2\int\{\ln|\frac{\vec{x}}{x}-\vec{\xi}'| + \ln\lambda\}\rho(\xi')d\vec{\xi}' = \phi_i(\frac{\vec{x}}{\lambda}) + \text{const},$$

$$\vec{A}_{\lambda i} = \vec{A}_i(\frac{\vec{x}}{\lambda}) + \text{const},$$

т.е.

$$\phi_\lambda(\vec{x}) = \phi(\frac{\vec{x}}{\lambda}) + \text{const},$$

$$\vec{A}_\lambda(\vec{x}) = \vec{A}(\frac{\vec{x}}{\lambda}) + \text{const}.$$

Обозначая далее дифференцирование функции по аргументу, содержащему $\vec{x}$, знаком $\vec{\nabla}$, имеем

$$\vec{E}_\lambda(\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\phi_\lambda(\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\phi\left(\frac{\vec{x}}{\lambda}\right) = -\frac{1}{\lambda}\vec{\nabla}\phi\left(\frac{\vec{x}}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\vec{E}\left(\frac{\vec{x}}{\lambda}\right), \qquad (4б)$$
$$\vec{H}_\lambda(\vec{x}) = \frac{1}{\lambda}\vec{H}\left(\frac{\vec{x}}{\lambda}\right).$$

С учетом (4) и пр. подставим $f_{\lambda i}$ из (3) в (2) ($\vec{F}_i^{(e)} = 0$):

$$\vec{v}\frac{\partial}{\partial\vec{x}} f_{\lambda i}(\vec{x},\vec{p}) + \left\{e_i\vec{E}_\lambda(\vec{x}) + e_i\left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{H}_\lambda(x)\right]\right\}\frac{\partial f_{\lambda i}(\vec{x},\vec{p})}{\partial\vec{p}} =$$
$$= \frac{1}{\lambda}(\vec{v}\vec{\nabla})\frac{f_i(\frac{\vec{x}}{\lambda},\vec{p})}{\lambda^2} + \left\{e_i\frac{1}{\lambda}\vec{E}\left(\frac{\vec{x}}{\lambda}\right) + e_i\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\vec{v}}{c}\vec{H}\left(\frac{\vec{x}}{\lambda}\right)\right]\right\}\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\frac{f_i(\frac{\vec{x}}{\lambda},\vec{p})}{\lambda^2} = 0.$$

Равенство нулю последнего выражения есть прямое следствие (2), чем и доказывается пункт а). С учетом вышесказанного доказательство пункта б) становится очевидным.

Из теоремы вытекают два следствия. (Сравнивая решения $f_i(\vec{x},\vec{p})$ и $f_{\lambda i}(\vec{x},\vec{p}) = \frac{1}{\lambda^2}f_i(\frac{\vec{x}}{\lambda},\vec{p})$, условимся точки x в первом случае (f_i) и $\frac{\vec{x}}{\lambda}$ во втором ($f_{\lambda i}$) называть соответствующими).

1. Так как все рассмотренные функции, описывающие состояние во втором случае, получаются с точностью до постоянного множителя из решения в первом случае лишь заменой аргумента $\vec{x}$ на $\frac{\vec{x}}{\lambda}$, то вся картина представляется растянутой (при $\lambda > 1$) или сжатой (при $\lambda < 1$) по сравнению с исходной. При этом

а) плотность заряда и тока в соответствующих точках лишь уменьшается в постоянное число λ^2 раз;

б) эквипотенциали подобно преобразуются, а относительное значение потенциала на них остается тем же самым;

в) напряженности поля в соответствующих точках лишь уменьшаются в постоянное число λ раз.

2. Распределение по импульсам в соответствующих точках одинаково. Следовательно, обе картины с разными размерами отвечают одному и тому же разбросу поперечного импульса $p_\perp^2$.

Для полноты приведем обобщение теоремы на случай зависимости от времени и координаты z ($\vec{z} \perp \vec{x}$). Тогда из решения $f_i(\vec{x},z,t,\vec{p})$ $q_i(z,t)$ следует существование решения $f_{\lambda i} = f_i(\frac{\vec{x}}{\lambda},\frac{z}{\lambda},\frac{t}{\lambda},\vec{p})$ $q_{\lambda i} = q_i(\frac{z}{\lambda},\frac{t}{\lambda})$. Доказательство столь же просто.

§2. Самофокусирующийся пучок с разным распределением ионов и электронов. Условие существования равновесия

В решении Беннета [1] ионы и электроны распределены одинаковым образом и, следовательно, имеют общий эффективный радиус. Других решений для модели Беннета, насколько это известно, получено не было[x/] в связи с трудностями, возникающими при решении дифференциальных уравнений для самосогласованного поля. Однако это легко может быть сделано в другой модели. Возьмем функции распределения по аналогии с [4] (e –электронная компонента, i –ионная)

$$f_e = \frac{\kappa_e^2 c^2}{8\pi^2 e^2}\delta(P-P_e)\delta(H-H_e),$$
$$f_i = \frac{\kappa_i^2 c^2}{8\pi^2 e^2}\delta(P-P_i)\delta(H-H_i), \qquad (5)$$

где для каждой компоненты

$P = p_z \pm \frac{e}{c}A$ – обобщенный импульс вдоль оси однородности z, $H = c\sqrt{m^2c^2+p_z^2+p_\perp^2} \pm e\phi$ – гамильтониан, $+e$ – заряд электрона, $-e$ – заряд иона. Вычисляя плотность заряда и тока, получим

$$\rho_{e,i} = \pm\frac{\kappa_{e,i}^2}{4\pi e}E_{e,i}\,\sigma_{e,i},$$
$$j_{e,i} = \pm c^2\frac{\kappa_{e,i}^2}{4\pi e}p_{e,i}\,\sigma_{e,i}, \qquad (5а)$$

где

$E_e = H_e - e\phi$ – кинетическая энергия электронов,

$E_i = H_e + e\phi$ – кинетическая энергия ионов,

$p_e = P_i - \frac{e}{c}A$ – импульс электронов вдоль оси однородности,

$p_i = P_i + \frac{e}{c}A$ – импульс ионов вдоль оси однородности.

Знак (+) относится к электронам, знак (–) – к ионам

---

x/ Кроме работы [3], где, однако, решение получено только для случая, когда температура электронов (или ионов) равна нулю. Для наших целей следует освободиться от этого необязательного по физике задачи условия.

$$\sigma_{e,i} = \begin{cases} 1 \text{ при } E^2_{e,i} - c^2 p^2_{e,i} > m^2_{e,i} c^4, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \qquad (5б)$$

Уравнения для самосогласованного поля суть

$$\Delta\phi = -4\pi(\rho_e + \rho_i),$$
$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c}(j_e + j_i). \qquad (5в)$$

Из множества всевозможных решений самосогласованной задачи ограничимся следующим классом:

1) Рассматривается круглая система – все величины зависят лишь от радиуса r в плоскости $\vec{x}$.

2) При $r = 0$ плотность обоих компонент отлична от нуля. Для определенности будем считать также, что $r_e \le r_i$, где r_e и r_i – соответственно граница электронного и ионного пучков.

Вне r_i частиц нет. Границы r_e и r_i согласно (5б) определяются уравнениями

$$E_e^2(r_e) - c^2 p_e^2(r_e) = m_e^2 c^4,$$
$$E_i^2(r_i) - c^2 p_i^2(r_i) = m_i^2 c^4. \qquad (6)$$

Тогда имеем уравнения для самосогласованного поля.

1. При $r \le r_e$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE}{dr}\right) - \kappa^2 E = 0,$$
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right) - \kappa^2 p = 0, \qquad (6а)$$

где

$$\kappa^2 = \kappa_e^2 + \kappa_i^2,$$
$$E = H_0 - e\phi, \quad H_0 = \frac{1}{\kappa^2}(\kappa_e^2 H_e - \kappa_i^2 H_i),$$
$$p = P_0 - \frac{e}{c}A, \quad P_0 = \frac{1}{\kappa^2}(\kappa_e^2 P_e - \kappa_i^2 P_i)$$

и, следовательно,

$$E_e = \frac{\kappa_i^2}{\kappa^2} h + E, \quad E_i = \frac{\kappa_e^2}{\kappa^2} h - E \quad (h = H_e + H_i),$$

$$p_e = \frac{\kappa_i}{\kappa^2} q + p, \quad p = \frac{\kappa_e^2}{\kappa^2} q - p \quad (q = P_e + P_i).$$

2. При $r_e < r \le r_i$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_i}{dr}\right) - \kappa_i^2 E_i = 0,$$
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp_i}{dr}\right) - \kappa_i^2 p_i = 0. \qquad (6б)$$

Условия непрерывности потенциалов ϕ и A и их нормальных производных на границе выглядят так:

$$E\big|_{r_e} = \frac{\kappa_e^2}{\kappa^2} h - E_i\big|_{r_e}, \quad p\big|_{r_e} = \frac{\kappa_e^2}{\kappa^2} q - p_i\big|_{r_e},$$
$$\frac{dE}{dr}\Big|_{r_e} = -\frac{dE_i}{dr}\Big|_{r_e}, \quad \frac{dp}{dr}\Big|_{r_e} = -\frac{dp_i}{\partial r}\Big|_{r_e}. \qquad (6в)$$

Как видно, формальная сторона решения задачи не встречает затруднений, ибо решения уравнений (6а) и (6б) соответственно суть

$$C I_0(\kappa r) \quad \text{и} \quad C_1 I_0(\kappa_i r) + C_2 K_0(\kappa_i r) \qquad (6д)$$

и решение уравнений (6) относительно r_e и r_i при заданных κ_i^2 и κ_e^2 и прочих параметрах (и при соблюдении некоего дополнительного условия, о котором речь пойдет ниже) может вызвать лишь чисто вычислительные затруднения.

Определить же r_e и r_i, задавая полное число частиц на единицу длины ν_e и ν_i, не удается ($\nu_{e,i}$ – погонный электрон из /2/). Действительно, легко видеть, что

$$\nu_e = \frac{1}{2 m_e c^2}\int_0^{r_e} \kappa_e^2 E_e\, r\,dr = \psi_e\left(\kappa_e r_e, \kappa_i r_i, \frac{r_e}{r_i}\right),$$
$$\nu_i = \frac{1}{2 m_e c^2}\int_0^{r_i} \kappa_i^2 E_i\, r\,dr = \psi_i\left(\kappa_e r_e, \kappa_i r_i, \frac{r_e}{r_i}\right). \qquad (7)$$

Далее, подставляя из (7) $\kappa_e r_e$ и $\kappa_i r_i$ в (6) с целью определить r_e и r_i через ν_e, ν_i и прочие параметры (энергию, импульс и пр.), обнаруживаем, что в систему (6) r_e и r_i входят лишь в виде комбинации $\frac{r_e}{r_i}$. Таким образом:

1) Решение может иметь произвольный размер в полном соответсвии с теоремой предыдущего параграфа и частным решением Беннета.

2) Поскольку (6) представляет собой систему двух уравнений для одного неизвестного $\frac{r_e}{r_i}$, ее решение возможно лишь тогда, когда выполнено условие совместности, т.е. параметры системы должны удовлетворять дополнительному уравнению. (У Беннета таких уравнений два (1а), т.к. в его решении имеется необязательное для такого рода задач требование $r_e = r_i$).

В качестве иллюстрации рассмотрим подробнее случай, когда глубина потенциальной ямы мала по сравнению с энергией частицы для обеих компонент. Кроме того, будем считать ионы нерелятивистскими, а электроны имеющими ультрарелятивистскую скорость направленного движения.

Обозначим на оси

для электронов $E_{e0} = m_e c^2 \gamma_0$, $p_{e0} = m_e c \eta_0^2$,

$$\theta_e = \gamma_0^2 - \eta_0^2 - 1 \text{ – разброс поперечного импульса,}$$

для ионов $E_{i0} = m_i c^2 (1 + \frac{\theta_i}{2})$, $p_{i0} = 0$,

а также

$$\mu = \frac{m_i}{m_e}.$$

Очевидно, требуется также

$$\kappa_e^2 r_e^2 \ll 1 \quad , \quad \kappa_i^2 r_i^2 \ll 1 . \tag{9}$$

Тогда по допущению плотность частиц равномерна внутри соответствующего радиуса и

$$\nu_e = \frac{1}{2 m_e c^2} \int_0^{r_e} \kappa_e^2 E_e r\, dr = \tfrac{1}{4} \gamma_0 \kappa_e^2 r_e^2 ,$$

т.е.

$$\frac{\kappa_e^2 r_e^2}{4} = \frac{\nu_e}{\gamma_0} . \tag{10}$$

Аналогично

$$\frac{\kappa_e^2 r_e^2}{4} = \frac{\nu_e}{\mu} .$$

Далее для (6д) имеем

$$C = \frac{m_e c^2}{\kappa^2} \cdot [\kappa_e^2 \gamma_0 - \kappa_i^2 \mu (1 + \frac{\theta_i}{2})] ,$$

$$C_1 = r_e \{\kappa C I_1(\kappa r_e)\, I_0 (\kappa_i r_e) + \kappa_i [\frac{\kappa_e^2}{\kappa^2} h - C I_0(\kappa r_e)] I_1 (\kappa_i r_e)\} , \tag{11}$$

$$C_2 = r_e \{\kappa_i [\frac{\kappa_e^2}{\kappa^2} h - C I_0 (\kappa r_e)] K_1(\kappa_i r_e) - \kappa C I_1(\kappa r_e) K_0(\kappa_i r_e)\} .$$

Воспользовавшись условием (9), подставим (6д) с учетом (11) в (6). В результате получим

$$\frac{\theta_e}{2 \gamma_0} = \nu_i \frac{r_e^2}{r_i^2} - \frac{\nu_e}{\gamma_0^2} ,$$

$$\mu \frac{\theta_i}{2} = \nu_e (\ln \frac{r_i^2}{r_e^2} + 1) - \nu_i . \tag{12}$$

Как видно, при $r_i = r_e$ эти выражения точно соответствуют результатам Беннета (1а). Физический смысл (12) очень прост – он состоит в равенстве энергии поперечных колебаний $\frac{\theta_e}{2\gamma_0}$, $\mu \frac{\theta_i}{2}$ глубине потенциальной ямы. Особенностью двухмерной плоской задачи является независимость глубины ямы от размера системы.

Условия самофокусировки для $r_e < r_i$ суть

$$\frac{r_i^2}{r_e^2} \frac{1}{\gamma_0^2} < \frac{\nu_i}{\nu_e} < 1 , \tag{13}$$

что тоже вполне прозрачно.

В соответствии со сказанным выше система (12) определяет лишь отношение $\frac{r_i}{r_e}$ и совместна лишь при определенной связи между другими параметрами. Явный вид этой связи

$$\mu \frac{\theta_i}{2} + \nu_i = \nu_e [\ln \frac{\nu_i}{\frac{\theta_e}{2\gamma_0} + \frac{\nu_e}{\gamma_0^2}} + 1] \tag{12a}$$

при

$$\nu_i \geq \frac{\theta_e}{2\gamma_0} + \frac{\nu_e}{\gamma_0^2} .$$

Надо полагать, результат, полученный здесь на частном примере, носит общий характер, т.е. аналогичная связь между параметрами имеет место и для любой другой модели x/.

Сейчас трудно сказать, насколько велика роль отмеченных в этой работе двух особенностей плоских самофокусирующихся пучков. В этой связи, с нашей точки зрения, представляются нетривиальными процессы, идущие с изменением параметров пучка и, в частности, разброса поперечного импульса.

Автор благодарен В.И. Векслеру и товарищам по работе за обсуждения.

Литература

1. W. Bennett. Phys. Rev., 45, 890 (1934).
2. Г.И. Будкер, Атомная энергия, № 5, 9 (1956).
3. Дж. Линхарт, А. Шох. Сб."Физика плазмы и магнитная гидродинамика", 215, ИЛ, Москва, 1961.
4. О.И. Ярковой. ЖТФ, XXXII, 1285 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
19 мая 1965 г.

x/ Под определенной моделью мы понимаем конкретную функциональную зависимость функции распределения от интегралов движения.