ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2168

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

О.А. Колпаков

ИЗЛУЧЕНИЕ СГУСТКА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ И МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ ПРИ ПРОЛЕТЕ ЧЕРЕЗ ОТКРЫТЫЙ КОНЕЦ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ВОЛНОВОДА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВНУТРИ ДРУГОГО, БЕСКОНЕЧНОГО ВОЛНОВОДА

1965

2168

О.А. Колпаков

ИЗЛУЧЕНИЕ СГУСТКА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ И МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ ПРИ ПРОЛЕТЕ ЧЕРЕЗ ОТКРЫТЫЙ КОНЕЦ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ВОЛНОВОДА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВНУТРИ ДРУГОГО, БЕСКОНЕЧНОГО ВОЛНОВОДА

РАЗДЕЛ I . Излучение сгустка зарядов

Излучение, возникающее при пролете зарядов и токов через открытый конец полубесконечного цилиндрического волновода, было исследовано в работах [3,6].

В данной работе рассматривается излучение при пролете аксиально-симметричного заряженного сгустка через открытый конец цилиндрического волновода, который концентрически расположен в другом, бесконечном волноводе большего радиуса.

Предполагается, что заряженный сгусток движется со скоростью $\bar{u}$ по оси волновода z. Сгусток по радиусу r однороден. В направлении z распределение плотности заряда характеризуется функцией $Q(z)$. Для определенности можно предположить, что сгусток имеет форму цилиндра $r = r_0$. Рассмотренным методом задачу можно решить для любого аксиально-симметричного распределения заряда.

Далее предполагается, что полубесконечный волновод расположен при $z > a$ и радиус его $r = a$, $a > r_0$, а радиус бесконечного волновода $r = b$, $b > a$.

1. Получение выражений для полей

Чтобы удобнее было сравнивать полученные результаты с формулами упомянутых работ, целесообразно искать решения для полей при помощи вектора Герца $\vec{\Pi}$. Вектор $\vec{\Pi}$ можно представить в виде суммы

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}^0 + \vec{\Pi}^1 , \tag{1}$$

где $\vec{\Pi}^0$ описывает поле заряда, пролетающего в бесконечном волноводе радиуса $r = b$ а $\vec{\Pi}^1$ – дополнительное поле от переходного излучения. Вследствие симметрии задачи векторы $\vec{\Pi}$, $\vec{\Pi}^0$, $\vec{\Pi}^1$ имеют лишь одну компоненту

$$\vec{\Pi} = \Pi_z , \quad \vec{\Pi}^0 = \Pi^0_z , \quad \vec{\Pi}^1 = \Pi^1_z . \tag{2}$$

Простоты ради Π_z, Π^0_z, Π^1_z в дальнейшем будут записываться как Π, Π^0, Π^1. Представление Фурье функций Π^1 и Π^0 имеет вид:

$$\Pi^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi^0_\omega e^{-i\omega t}\, d\omega , \quad \Pi^1 = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi^1_\omega e^{-i\omega t}\, d\omega . \tag{3}$$

Функция Π^0_ω имеет следующее выражение (вывод этого выражения приведен в Приложении к данной работе):

$$\Pi^0_\omega = \frac{iq\lambda(k)}{\pi\omega} e^{i\frac{\omega}{u}(z-ut)} \left\{ K_0(k\gamma r) - \frac{K_0(k\gamma b)}{I_0(k\gamma b)} I_0(k\gamma r) \right\}. \qquad (4)$$

В формуле (4) использованы обозначения из Приложения: q – величина общего заряда сгустка,

$$\lambda(k) = \frac{2I_1(k\gamma r_0)}{k\gamma r_0} \int Q(z') e^{i\frac{\omega}{u}z'} dz', \qquad (5)$$

где $z' = z - ut$, $k = \frac{\omega}{c}$, $\gamma = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$.

Выражение для Π^1, как это показано в /1/, можно найти следующим образом. Заряженный сгусток индуцирует на стенках полубесконечного волновода ток

$$jz = f(z). \qquad (6)$$

Поле, вызванное током, может быть выражено при помощи вектор – потенциала

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{e^{ikR}}{R} j_z\, ds, \qquad (7)$$

где интегрирование производится по всей поверхности полубесконечного волновода. Используя обозначения, введенные на рис. 1, можно написать

$$\vec{A} = A_z(r,z) = \frac{a}{c}\int_0^\infty f(\xi)\,d\xi \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\sqrt{(z-\xi)^2+R_0^2}}}{\sqrt{(z-\xi)^2+R_0^2}}\, d\phi,$$

где $R_0^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\phi$.

Применяя известные соотношения

$$\frac{e^{ik\sqrt{R_0^2+z^2}}}{\sqrt{R_0^2+z^2}} = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_0(vR_0) e^{iwz}\, dw, \qquad v = \sqrt{k^2-w^2};$$

$$\mathcal{H}_0(vR_0) = \Sigma J_s(vr)\mathcal{H}_s(va) e^{-is\phi}, \quad r < a; \qquad (8)$$

$$\mathcal{H}_0(vR_0) = \Sigma J_s(va)\mathcal{H}_s(vr) e^{-is\phi}, \quad r > a;$$

и представляя ток j_z в виде разложения

$$f(z) = \int e^{iwz} F(w)\, dw, \qquad (9)$$

можно получить

$$A_z(r,z) = \frac{2\pi^2 a_1}{c}\int e^{iwz} J_0(vr)\mathcal{H}_0(va) F(w)dw, \quad r < a,$$

$$A_z(r,z) = \frac{2\pi a_1}{c}\int e^{iwz} J_0(va)\mathcal{H}_0(vr) F(w)dw, \quad r > a.$$

Вследствие симметрии задачи из выражения для $A_z(r,z)$ легко получить формулу для вектора Π^1_ω:

$$(\Pi^1_\omega)_0 = -\frac{2\pi^2 a}{c}\int F(w) \begin{Bmatrix} J_0(vr)\mathcal{H}_0(va) \\ J_0(va)\mathcal{H}_0(vr) \end{Bmatrix} e^{iwz}\, dw, \qquad (10)$$

где верхняя строчка в фигурных скобках–для $r < a$, а нижняя – для $r > a$. В (10) преднамеренно применена запись $(\Pi^1_\omega)_0$, т.к. (10) является частным решением задачи. Добавляя общее решение однородного уравнения и удовлетворяя граничному условию $E_z|_{r=b} = 0$, что равносильно $\Pi^1_\omega|_{r=b} = 0$, можно получить общее решение для функции Π^1_ω:

$$\Pi^1_\omega = -\frac{2\pi}{\omega}\int F(w)L(wr)\frac{1}{v^2} e^{iwz}\, dw, \text{ где} \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} L(wr) &= \pi a v^2 J_0(vr)\left[\mathcal{H}_0(va) - \frac{\mathcal{H}_0(vb)}{J_0(vb)} J_0(va)\right], \quad r < a; \\ L(wr) &= \pi a v^2 J_0(va)\left[\mathcal{H}_0(vr) - \frac{\mathcal{H}_0(vb)}{J_0(vb)} J_0(vr)\right], \quad r > a. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Равенства (11) тождественны следующим:

$$L(wr) = ia\pi v^2 J_0(vr)[N_0(va)J_0(vb) - N_0(vb)J_0(va)]\frac{1}{J_0(vb)}, \quad r < a;$$

$$L(wr) = ia\pi v^2 J_0(va)[N_0(vr)J_0(vb) - N_0(vb)J_0(vr)]\frac{1}{J_0(vb)}, \quad r > a;$$

или, если ввести обозначения

$$Z_0(va) = N_0(va)J_0(vb) - N_0(vb)J_0(va), \qquad (13)$$

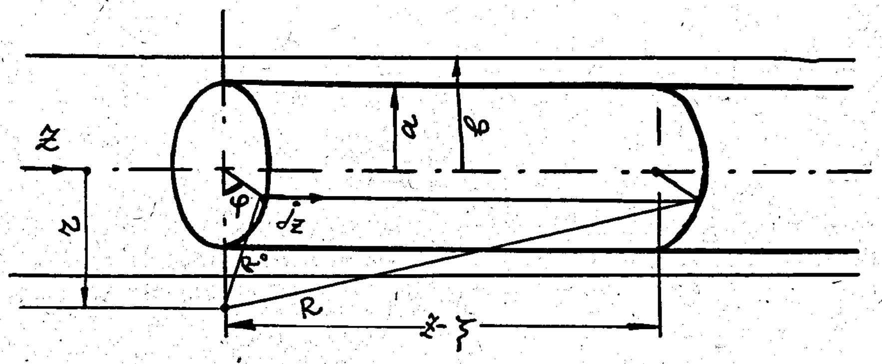
$$Z_0(vr) = N_0(vr)J_0(vb) - N_0(vb)J_0(vr),$$

то формулы (12) можно записать в виде

$$L(wr) = ia\pi v^2 J_0(vr)\frac{Z_0(va)}{J_0(vb)}, \quad r < a;$$

$$L(wr) = ia\pi v^2 Z_0(vr)\frac{J_0(va)}{J_0(vb)}, \quad r > a. \tag{14}$$

Формулы (11-14) позволяют свести задачу отыскания функции Π^1_w к задаче определения фурье-компоненты наведенного тока $F(w)$.



Р и с. 1

Теперь, когда найден общий вид Π^0 и Π^1, можно написать выражения для полей. Выражения для полей при помощи вектора $\vec{\Pi}$ могут быть представлены следующим образом:

$$\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2}, \quad \vec{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t}. \tag{15}$$

Учитывая (2), из (15) можно получить

$$E_r = \frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\Pi_z, \quad H_\phi = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Pi_z}{\partial t}\right), \quad E_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Pi_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\Pi_z. \tag{16}$$

Из равенств (16) в соответствии с разложением (3) можно получить выражения для компонент собственного поля заряда и поля излучения

$$\left.\begin{aligned} &E^{01}_r = i\frac{\omega}{a}\frac{\partial\Pi^1_z}{\partial r}, \quad E^0_z = -\gamma^2k^2\Pi^0_z, \quad H^0_\phi = -\frac{i}{c}\omega\frac{\partial\Pi^0_z}{\partial r},\\ &E^1_r = iw\frac{\partial\Pi^1_z}{\partial r}, \quad E^1_z = -v^2\Pi^1_z, \quad H^1_\phi = \frac{i}{c}\omega\frac{\partial\Pi^1_z}{\partial r}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Подстановка в формулы (17) выражений для Π^0_z и Π^1_z из (4) и (7) приводит к равенствам

$$\left.\begin{aligned} &E^0_{z\omega} = \frac{k\gamma q\cdot\lambda(k)}{\pi\beta c}\left\{K_1(k\gamma r) + I(k\gamma r)\frac{K_0(k\gamma b)}{I_0(k\gamma b)}\right\}e^{i\frac{\omega}{u}z},\\ &E^0_{z\omega} = -\gamma^2k^2\lambda(k)\frac{iq}{\pi\omega}\left\{K_0(k\gamma r) - I_0(k\gamma r)\frac{K_0(k\gamma b)}{I_0(k\gamma b)}\right\}e^{i\frac{\omega}{u}z}; \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$E^1_{r\omega} = -\frac{2\pi i}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w}{v}F(w)L'(w,r)e^{iwz}\,dw,$$

$$E^1_{z\omega} = \frac{2\pi}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)L(wr)e^{iwz}\,dw, \tag{19}$$

$$H^1_{\phi\omega} = \frac{2\pi i}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{v}F(w)L'(w,r)e^{iwz}\,dw;$$

$$L'(w,r) = -\pi av^2J_1(vr)\left[\mathcal{H}_0(va) - J_0(va)\frac{\mathcal{H}_0(vb)}{J_0(vb)}\right], \quad r < a;$$

$$L'(w,r) = -\pi av^2J_0(va)\left[\mathcal{H}_1(vr) - J_1(vr)\frac{\mathcal{H}_0(vb)}{J_0(vb)}\right], \quad r > a. \tag{20}$$

Функцию $F(w)$ можно определить, если решить уравнения, являющиеся следствием граничных условий. В качестве граничных условий, во-первых, необходимо принять равенство нулю тангенциальной составляющей электрического поля на стенках полубесконечного волновода

$$E^0_z + E^1_z = 0, \quad r = a, \; z > 0; \tag{21}$$

во-вторых, – обращение в нуль плотности тока на продолжении стенки волновода при $z<0$

$$f(z) = 0, \quad z < 0. \tag{22}$$

Подстановка в формулу (21) выражений для полей из (18) и (19) и в формулу (22) выражения для тока из (9) приводит к соотношениям:

$$\frac{2\pi^2 a}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty} v\, F(w)J_0(va)\left[\mathcal{H}_0(va) - \frac{\mathcal{H}_0(vb)}{J_0(vb)}J_0(va)\right]e^{iwz}\,dw =$$

$$= \frac{iq\gamma^2 k^2 \lambda(k)}{\pi\omega}\left\{K_0(k\gamma a) - I_0(k\gamma a)\frac{K_0(k\gamma b)}{I_0(k\gamma b)}\right\}e^{i\frac{\omega}{u}z},\ z>0\ ; \qquad (23)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwz}\,dw = 0, \qquad z < 0.$$

Систему (23) можно решить методом Винера-Хопфа, варианты которого рассмотрены в ряде работ [1,2]. Для рассматриваемой задачи будет использован метод, примененный Вайнштейном. Следуя этому методу, функцию $L(w,a)$ необходимо представить в виде произведения

$$L(wa) = L(w) = \frac{L_1(w)\cdot L_2(w)}{w^2 - \frac{\omega^2}{u^2}}, \qquad (24)$$

причем $L_1(w)$ голоморфна и не имеет нулей в верхней полуплоскости, а $L_2(w)$ голоморфна и не имеет нулей в нижней полуплоскости. Так как в первом уравнении (23) контур интегрирования следует замыкать в верхней полуплоскости w, то функция $F(w)\cdot L(w)$ должна быть голоморфна в верхней полуплоскости за исключением точки $w=\frac{\omega}{u}$, где должен быть простой полюс. Во втором уравнении (23) контур интегрирования необходимо замыкать в нижней полуплоскости переменного w. Следовательно, $F(w)$ должна быть регулярной в этой полуплоскости. Принимая во внимание свойства функций $L_1(w)$ и $L_2(w)$ в соответствующих полуплоскостях, этим требованиям можно удовлетворить, если $F(w)$ представить в виде

$$F(w) = \frac{R}{L_2(w)}. \qquad (25)$$

При таком определении вида $F(w)$ очевидно, что удовлетворяется второе уравнение (23), где R - некоторая постоянная, которую можно определить, если подставить $F(w)$ в первое уравнение (23). В соответствие с [1] $L_1(w)$ и $L_2(w)$ можно представить в виде

$$L_1(w) = \phi_1(w)\left(w + \frac{\omega}{u}\right)\sqrt{k+w}\ ,\quad L_2(w) = \phi_2(w)\left(w - \frac{\omega}{u}\right)\sqrt{k-w}\ , \qquad (26)$$

где

$$\phi(w) = \phi_1(w)\cdot\phi_2(w) = \frac{1}{v}L(w).$$

С учетом формул (25) и (26) можно написать

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\cdot L(w)e^{iwz}\,dw = R\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(w)e^{iwz}\,dw}{\phi_2(w)\left(w - \frac{\omega}{u}\right)\sqrt{k-w}}. \qquad (27)$$

Как уже было отмечено выше, контур интегрирования в (27) надо замыкать в верхней полуплоскости w, т.к. при $w \to +i\infty$, $e^{iwz} \to 0$. Но в верхней полуплоскости есть единственный полюс в подинтегральном выражении (27) $w = \frac{\omega}{u}$. Действительно, интеграл в (27) можно записать в виде

$$k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L_1(w)e^{iwz}\,dw}{w^2 - \frac{\omega^2}{u^2}}.$$

Вычет в точке $w = \frac{\omega}{u}$ равен

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(w)e^{iwz}\,dw}{\phi_2(w)\left(w - \frac{\omega}{u}\right)\sqrt{k-w}} = 2\pi i R\,\frac{L\left(\frac{\omega}{u}\right)e^{i\frac{\omega}{u}z}}{\phi_2\left(\frac{\omega}{u}\right)\sqrt{k - \frac{\omega}{u}}}. \qquad (28)$$

При

$$w = \frac{\omega}{u}, \quad v = \sqrt{k^2 - w^2} = ik\gamma \qquad (29)$$

$$J_0(ik\gamma a) = I_0(k\gamma a), \quad \mathcal{H}_0(ik\gamma a) = \frac{2}{\pi i}K_0(k\gamma a), \qquad (30)$$

$$L\left(\frac{\omega}{u}\right) = -\frac{2}{i}ak^2\gamma^2 I_0(k\gamma a)\left[K_0(k\gamma a) - \frac{K_0(k\gamma b)}{I_0(k\gamma b)}I_0(k\gamma a)\right]. \qquad (31)$$

Используя соотношения (27), (28), (29), (30), (31), можно получить из первого уравнения (23) формулу для коэффициента R:

$$R = -\frac{q\cdot\lambda(k)\phi_2\left(\frac{\omega}{u}\right)\sqrt{k - \frac{\omega}{u}}}{8\pi^3 ia\, I_0(k\gamma a)\left(w - \frac{\omega}{u}\right)} \qquad (32)$$

и, подставив в (25) R из (32), $L_2(w)$ из (26), формулу для $F(w)$:

$$F(w) = \frac{q\cdot\lambda(k)}{8\pi^3 ia I_0(k\gamma a)}\cdot\frac{\phi_2\left(\frac{\omega}{u}\right)\sqrt{k - \frac{\omega}{u}}}{\phi_2(w)\sqrt{k-w}\left(w - \frac{\omega}{u}\right)}. \qquad (33)$$

2. Исследование вспомогательных функций

Явный вид функций $\phi_1(w)$ и $\phi_2(w)$ для задачи, когда полубесконечный волновод расположен в свободном пространстве, определен в [1].

Для рассматриваемой задачи соответствующие функции будут иметь характерные особенности. Поэтому необходимо остановиться на их определении. При этом целесообразно придерживаться общей схемы, принятой в работе [1] при определении $\phi_1(w)$ и $\phi_2(w)$. Согласно этой схеме, нужно ввести функцию

$$\chi(w) = \ln \phi(w). \tag{34}$$

Очевидно, разбиение $\phi(w)$ на произведение двух функций равнозначно представлению $\chi(w)$ в виде суммы. Нули функции $\phi_2(w)$ расположены на разрезе $k \to i\infty$ в верхней полуплоскости w. Если предположить существование у k мнимой части k^0, то $\phi_1(w)$ голоморфна всюду ниже оси $J_m w < k$, нули $\phi(w)$ расположены на разрезе $k \to i\infty$, $\phi_1(w)$ голоморфны выше оси $J_m w > -k_0$.

Следовательно, область регулярности $\phi(w)$, а также и $\chi(w)$, находится в полосе

$$-k_0 < Jm\, w < k_0 .$$

Из теории функций комплексного переменного известно, что в этом случае $\chi(w)$ можно представить в виде суммы двух функций $\chi_1(w)$ и $\chi_2(w)$, причем

$$\chi_2(w) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+k_0-\infty}^{k_0+\infty} \frac{\chi(w')dw'}{w'-w},$$

$$\chi_1(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-k_0-\infty}^{-k_0+\infty} \frac{\chi(w')dw'}{w'-w}. \tag{35}$$

В работе [1] проведено детальным образом вычисление $\chi_1(w)$ и $\chi_2(w)$. Например, $\chi_2(w)$ можно определить таким образом. Производная от $\chi_2(w)$ равна

$$\frac{d}{dw}\chi_2(w) = \frac{d}{dw}\ln\phi_2(w) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ik_0-\infty}^{ik_0+\infty} \frac{d\chi(w')}{dw'}\frac{dw'}{w'-w} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+ik_0-\infty}^{ik_0+\infty}\left\{\frac{1}{va} + \frac{J_0'(va)}{J_0(va)} + \frac{Z_0'(va)}{Z_0(va)} - \frac{J_0'(vb)}{J_0(vb)}\right\}\frac{w'}{v}\,\frac{dw'}{w-w'} . \tag{36}$$

Путь интегрирования в (36) необходимо деформировать так, чтобы он охватил разрез $k \to +i\infty$. Результатом интегрирования будет, во-первых, сумма вычетов подынтегрального выражения в (36) и сумма главных значений интеграла по противоположным берегам разреза. Что касается вычетов, то в (36) нужно вычислить вычеты в точках, где имеются нули функций $J_0(va)$, $Z_0(va)$ и $J_0(vb)$, т.е. три группы вычетов; вычисления, проведенные в [1], дают в результате одну группу вычетов в нулях $J_0(va)$.

В задаче из работы [1] учитывались главные значения интегралов по берегам разрезов. Нетрудно убедиться, что в рассматриваемой задаче вклад от этих интегралов равен нулю. Интегралы от модулей функций по противоположным берегам разрезов равны и противоположны друг другу. Аргументы функций v, $J_0(va)$, $Z_0(va)$, $J_0(vb)$ не зависят от w вдоль разрезов и изменяются на постоянную величину. Производная по w вдоль берегов разреза от аргументов равна нулю.

Если обратиться к задаче из [1], то там надо было учитывать интеграл от аргумента функции $H(va)$, который зависит от w. Этот интеграл в конечном результате давал экспоненциальный множитель. Таким образом, когда полубесконечный волновод расположен в свободном пространстве, то получается одна группа полюсов и экспоненциальная часть в решении. Когда же полубесконечный волновод расположен в другом волноводе, то имеется три группы полюсов и нет экспоненциального множителя. Очевидно, может быть проведена соответствующая физическая интерпретация. В открытом пространстве, когда имеется один волновод, должна быть одна группа волн и решение должно иметь вид, удовлетворяющий условиям излучения на бесконечности. В данной задаче – три группы волн, соответствующих пространству внутри полубесконечного волновода, пространству между волноводами и пространству для $z < 0$, где полубесконечный волновод отсутствует.

Ниже об этом будет рассказано более подробно.

Итак, в результате интегрирования в (36) получается результат

$$\frac{1}{dw}\chi_2(w) = \frac{1}{2a(w-k)} + \Sigma\frac{1}{a(w-w_{m1})} + \Sigma\frac{1}{a(w-w_{m2})} - \Sigma\frac{1}{a(w-w_{m3})}, \tag{37}$$

где w_{m1}, w_{m2}, w_{m2} являются корнями уравнений

$$J_0(v_{m1}a) = 0, \quad Z_0(v_{m2}a) = 0, \quad J_0(v_{m3}) = 0, \tag{38}$$

$$w_{m1} = \sqrt{k^2 - v_{m1}^2}, \quad w_{m2} = \sqrt{k^2 - v_{m2}^2}, \quad w_{m3} = \sqrt{k^2 - v_{m3}^2} . \tag{39}$$

Из (37) можно получить

$$\chi_2(w) = \ln\phi_2(w) = \ln\{\sqrt{a(w-k)}\,\Pi\,\frac{(w-w_{m1})a(w-w_{m2})a}{(w-w_{m3})a}\,P_2\}, \tag{40}$$

где P_2 -некоторая функция, не зависящая от w. Или, заменяя (40) тождественным равенством, получаем

$$\phi_2(w) = \sqrt{a(w-k)}\,\Pi\,\frac{a(w-w_{m1})a(w-w_{m2})}{a(w-w_{m3})}\,P_2. \tag{41}$$

Производя соответствующие вычисления, можно написать

$$\phi_1(w) = \sqrt{a(w+k)}\,\Pi\,\frac{a(w+w_{m1})a(w+w_{m2})}{a(w+w_{m3})}\,P_1. \tag{42}$$

Чтобы удовлетворить тождеству (26), P_1 и P_2 следует выбрать таким образом, чтобы

$$\phi_1(\omega)\cdot\phi_2(w) = i\pi a\sqrt{k^2-w^2}\,J_0(va)\,\frac{Z_0(va)}{J_0(vb)}. \tag{43}$$

С другой стороны, P_1 и P_2 не должны зависеть от w. Функции $J_0(va)$, $Z_0(va)$, $J_0(vb)$ можно представить в таком виде:

$$J_0(va) = A\Pi a^2(w^2-w_{m1}^2),\quad Z_0(va) = B\Pi a^2(w^2-w_{m2}^2),\quad J_0(vb) = C\Pi a^2(w^2-w_{m3}^2) \tag{44}$$

где A, B, C не зависят от w. Подставляя (44) в (43), можно получить

$$\phi_1(w)\cdot\phi_2(w) = i\pi a\sqrt{k^2-w^2}\cdot A\cdot B\cdot C\,\Pi\,\frac{[a^2(w^2-w_{m1}^2)][a^2(w^2-w_{m2}^2)]}{[a^2(w^2-w_{m3}^2)]}. \tag{45}$$

С другой стороны, учитывая (41) и (42), имеем равенство

$$\phi_1(w)\cdot\phi_2(w) = -a\sqrt{k^2-w^2}\,\Pi\,\frac{[a^2(w^2-w_{m1}^2)][a^2(w^2-w_{m2}^2)]}{[a^2(w^2-w_{m3}^2)]}. \tag{46}$$

Если выбрать

$$P_1 = P_2 = \sqrt{-i\pi J_0(va)\,\frac{Z_0(va)}{J_0(vb)}\,\Pi\,\frac{[a^2(w^2-w_{m3}^2)]}{[a^2(w^2-w_{m1}^2)][a^2(w^2-w_{m2}^2)]}} \tag{47}$$

(легко видеть, что P_1, P_2 не зависят от w), то подстановка (41) и (42) в (43) удовлетворяет этому равенству. Окончательно формулы для $\phi_1(w)$ и $\phi_2(w)$ приобретают вид:

$$\left.\begin{aligned} \phi_1(w) &= \sqrt{i\pi a(k+w)Z_0(va)\,\frac{J_0(va)}{J_0(vb)}\,\Pi\,\frac{(w+w_{m1})(w+w_{m2})(w-w_{m3})}{(w+w_{m3})(w-w_{m1})(w-w_{m2})}}, \\ \phi_2(w) &= \sqrt{i\pi a(k-w)Z_0(va)\,\frac{J_0(va)}{J(vb)}\,\Pi\,\frac{(w-w_{m1})(w-w_{m2})(w+w_{m3})}{(w+w_{m3})(w+w_{m3})(w-w_{m3})}}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

3. Волны в волноводной системе

После того, как определены функции $F(w)$ и $L(w)$, возможно приступить к вычислению полей. Общий вид функции Π_ω^1, характеризующей поле дифракции, приведен в формуле (7). Подставляя в (7) значения $F(w)$ и $L(w)$ из (14) и (33), можно получить

$$\left.\begin{aligned} \Pi_\omega^1 &= \frac{q\cdot\phi_2(\frac{\omega}{u})\sqrt{k-\frac{\omega}{u}\lambda(k)}}{4\pi\omega I_0(k\gamma a)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_0(vr)Z_0(va)e^{iwz}\,dw}{J_0(vb)(w-\frac{\omega}{u})\sqrt{k-w}\;\phi_2(w)}, \quad r<a; \\ \Pi_\omega^1 &= \frac{q\cdot\phi_2(\frac{\omega}{u})\sqrt{k-\frac{\omega}{u}\lambda(k)}}{4\pi\omega I_0(k\gamma a)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_0(va)Z_0(vr)e^{iwz}\,dw}{J_0(vb)(w-\frac{\omega}{u})\sqrt{k-w}\;\phi_2(w)}, \quad r>a \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Интеграл в (49) вычисляется при помощи вычетов. Для области внутри полубесконечного волновода имеются полюса подынтегральной функции в точках, где обращается в нуль $J_0(va)$.

Для области между волноводами полюса образуют нули функции $Z_0(va)$. Область $Z<0$, где имеется лишь один волновод, характеризуется той особенностью, что контур интегрирования в (49) приводится уже не в верхней полуплоскости переменного w, а в нижней полуплоскости. Поэтому полюса соответствуют нулям $J_0(vb)$. Полюса первой и третьей группы имеются в точках

$$\left.\begin{aligned} J_0(v_{m1}a) &= 0, \quad v_{m1}a = \nu_{m1}, \\ J_0(v_{m3}a) &= 0, \quad v_{m3}a = \nu_{m3}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Полюса второй группы имеются в точках w_{m2}

$$Z_0(v_{m2}a) = 0. \tag{51}$$

Теперь будет рассмотрен вид полей в отдельности для каждой области.

1) Область внутри полубесконечного волновода, $z > 0$, $r < 0$.

$$\Pi^1_\omega = \frac{q\phi_2(\frac{\omega}{u})\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}\;\lambda(k)}{4\pi\omega\cdot I_0(k\gamma a)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_0(vr)Z_0(va)e^{iwz}\,dw}{J_0(vb)(w-\frac{\omega}{u})\sqrt{k-w}\;\phi_2(w)}. \tag{52}$$

Интеграл равен сумме вычетов в точках

$$w = \frac{w}{u} \quad и \quad w_{m1} = \sqrt{k^2 - v_{m1}^2}, \quad J_0(v_{m1}a) = 0. \tag{53}$$

Вычет в точке $w = \frac{w}{u}$ равен

$$\frac{q\cdot\lambda(k)}{\pi\omega i}\,\frac{I_0(k\gamma r)}{I_0(k\gamma a)}\,e^{i\frac{\omega}{u}z}\left\{K_0(k\gamma a) - I_0(k\gamma a)\frac{K_0(k\gamma b)}{I_0(k\gamma b)}\right\} = \tag{54}$$

$$= -\frac{q\lambda(k)}{\pi\omega i}\,e^{i\frac{\omega}{u}z}\left\{I_0(k\gamma r)\frac{K_0(k\gamma b)}{I_0(k\gamma b)} - I_0(k\gamma r)\frac{K_0(k\gamma a)}{I_0(k\gamma a)}\right\}.$$

Согласно (5), поле заряда в волноводе радиуса $r = b$ равно

$$\Pi^0_\omega = -\frac{q\lambda(k)}{\pi\omega i}\,e^{i\frac{\omega}{u}z}\left\{K_0(k\gamma r - \frac{K_0(k\gamma b)}{I_0(k\gamma b)}\,I_0(k\gamma r)\right\}. \tag{55}$$

Выражения (54) и (55) дают в сумме

$$(\Pi^0_\omega)_{r=a} = -\frac{q\lambda(k)}{\pi\omega i}\,e^{i\frac{\omega}{u}z}\left\{K_0(k\gamma r) - \frac{K_0(k\gamma a)}{I_0(k\gamma a)}I_0(k\gamma r)\right\}; \tag{56}$$

$(\Pi^0_\omega)_{r=a}$, как это легко видеть, является полем заряда в бесконечном волноводе радиуса $r = a$. Поле излучения, таким образом, определяется вычетами в точках w_1. Если обозначить поле излучения $(\Pi^1_\omega)_И$, то

$$(\Pi^1_\omega)_И\Big|_{\substack{r<a\\ z>0}} = \frac{q\cdot\lambda(k)\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}\,\phi_2(\frac{\omega}{u})}{2\omega i\; I_0(k\gamma a)}\sum_{m_1}\frac{I_0(v_{m1}r)Z_0(v_{m1}a)e^{iw_{m1}z}}{I_0(v_{m1}b)\sqrt{k-w_{m1}}(w_{m1}-\frac{\omega}{u})\phi'(w_{m1})}. \tag{57}$$

2) Область между волноводами, $z > 0$, $r > a$. Согласно (49), поля в этой области определяются

$$\Pi^1_\omega = \frac{q\lambda(k)}{4\pi\omega}\cdot\frac{\phi_2(\frac{\omega}{u})\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}}{I_0(k\gamma a)}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I_0(va)Z_0(vr)e^{iwz}\,dw}{J_0(vb)(w-\frac{\omega}{u})\sqrt{k-w}\;\phi_2(w)}. \tag{58}$$

Интеграл равен сумме вычетов в точках

$$w = \frac{\omega}{u}, \qquad w_{m2} = \sqrt{k^2 - v_{m2}^2}, \quad Z_0(v_{m2}a) = 0. \tag{59}$$

Вычет в точке $w = \frac{w}{u}$ равен

$$\frac{q\cdot\lambda(k)}{\pi\omega i}\,\frac{I_0(k\gamma a)}{I_0(k\gamma a)}\,e^{i\frac{\omega}{u}z}\left\{K_0(k\gamma r) - I_0(k\gamma r)\frac{K_0(k\gamma b)}{I_0(k\gamma b)}\right\} = \tag{60}$$

$$= \frac{q\cdot\lambda(k)}{\pi\omega i}\,e^{\frac{i\omega z}{u}}\left\{K_0(k\gamma r) - I_0(k\gamma r)\frac{K_0(k\gamma b)}{I_0(k\gamma b)}\right\}.$$

Выражение (60) равно и противоположно по знаку Π^0_ω (55), определяющему поле заряда, пролетающего по оси бесконечного волновода радиуса $r = b$, т.е. в сумме величины (60) и Π^0_ω дают нуль.

Это соответствует тому, что поле заряда, пролетающего в бесконечном волноводе радиуса $r = a$, продолжается до $r \le a$ и при $r \ge a$ это поле не может быть отличным от нуля. Поле излучения $(\Pi^1_\omega)_{u2}$ вычисляется по вычетам в точках w_{m_2}

$$(\Pi^1_\omega)_u\Big|_{\substack{r>a\\ z>a}} = \frac{q\lambda(k)}{2\omega i}\,\frac{\phi_2(\frac{\omega}{u})\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}}{I_0(k\gamma a)}\sum_{m_2}\frac{J_0(v_{m2}a)Z_0(v_{m2}r)e^{iw_{m2}z}}{J_0(v_{m2}b)\phi_2'(w_{m2})\sqrt{k-w_{m2}}(w_{m2}-\frac{\omega}{u})}. \tag{61}$$

3) Область без полубесконечного волновода, $z < 0$

$$\left.\begin{aligned}
\Pi^1_\omega &= \frac{q\cdot\phi_2(\frac{\omega}{u})\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}\,\lambda(k)}{4\pi\omega\, I_0(k\gamma a)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_0(vr)Z_0(va)e^{-iwz}\,dw}{J_0(vb)(w-\frac{\omega}{u})\sqrt{k-w}\,\phi_2(w)}, \quad r < a;\\
\Pi^1_\omega &= \frac{q\phi_2(\frac{\omega}{u})\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}\,\lambda(k)}{4\pi\omega\; I_0(k\gamma a)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_0(va)Z_0(vr)e^{-iwz}\,dw}{J_0(vb)(w-\frac{\omega}{u})\sqrt{k-w}\;\phi_2(w)}, \quad r > a.
\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Интеграл вычисляется также при помощи вычетов. Так как $\mathrm{Im}\, w < 0$, то контур интегрирования необходимо замыкать в другой полуплоскости w, $\mathrm{Im}\, w < 0$, где

$\phi(w)$ не имеет нулей. Нули имеет $J_0(vb)=0$ в точках $w_{m3}=\sqrt{k^2-v_{m3}^2}$.
Очевидно, справедливы соотношения

$$Z_0(vr)=J_0(vr)N_0(vb), \qquad Z_0(va)=J_0(va)N_0(vb),$$
$$J_0(va)Z_0(vr) = J_0(vr)J_0(va)N_0(vb), \quad \text{т.е.} \tag{63}$$

подынтегральная функция одинакова для $r<a$ и $r>a$. Кроме того, т.к. $J_m\, w < 0$ и предполагается, что w имеет положительную мнимую компоненту, то $w = \frac{w}{u}$ в пределах контура интегрирования не выполняется. Оба вывода соответствуют физической картине: поскольку для $Z<0$ нет второго волновода, то, во-первых, выражения для полей не должны отличаться при $r<a$ и $r>a$ и, во-вторых, Π^1_ω в большом волноводе может описывать лишь поле излучения.

Вычисляя вычеты и используя (63), можно получить выражение для поля дифракции при $z<0$

$$(\Pi^1_\omega)_u\Big|_{z<0} = \frac{q\cdot\lambda(k)}{2\omega i}\,\frac{\phi_2(\frac{\omega}{u})\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}}{I_0(k\gamma a)}\sum_{m_3}\frac{J_0(v_{m3}r)J_0(v_{m3}a)N_0(v_{m3}b)e^{-iw_3z}}{J_0'(v_{m3}b)\phi_1(w_{m3})(w_{m3}+\frac{\omega}{u})\sqrt{w_{m3}+k}}. \tag{64}$$

4. Излучение заряда

Вычисленные поля определяют потери на излучение при пролете заряда через открытый конец полубесконечного волновода. Как известно, поток излучаемой энергии для волн с определенной частотой ω можно вычислить по формуле

$$W_\omega = 2\pi c\int E_{\omega r}H_{\omega r}\,r\,dr. \tag{65}$$

Подстановка выражений полей через вектор Π^1_ω , приведенных в (17), преобразует (65) к виду

$$W_\omega = -2\pi\omega w\int[\frac{\partial}{\partial r}(\Pi^1_\omega)_u]^2\,r\,dr. \tag{66}$$

Так как свойства $(\Pi^1_\omega)_u$ различны для каждой области, необходимо в отдельности определить W_ω внутри каждой области.

1) $r<a$, $z>0$. Интегрирование в (66) необходимо производить от $r=0$ до $r=a$.

$$W_\omega\Big|_{\substack{r<a\\ z>a}} = -2\pi\omega w\int_0^a[\frac{\partial}{\partial r}(\Pi^1_\omega)^1_u]^2\,r\,dr, \tag{67}$$

где

$$(\Pi^1_\omega)^1_u = (\Pi^1_\omega)_u\Big|_{\substack{r<a\\ z>0}}. \tag{68}$$

Производя операции дифференцирования, возведение в квадрат и интегрирование над выражением для $(\Pi^1_\omega)_4$, приведенным в (57), можно получить

$$W_\omega\Big|_{\substack{r<a\\ z>a}} = \frac{q^2\lambda^2(k)}{\omega\pi}\,\frac{(k-\frac{\omega}{u})\phi_2^2(\frac{\omega}{u})}{I_0^2(k\gamma a)}\sum_{m_1}\frac{w_{m1}}{\phi_2'^2(w_{m1})(k-w_{m1})(w_{m1}-\frac{\omega}{u})^2}. \tag{69}$$

При получении (69) были использованы тождества

$$v_{m1}^2\int_0^a J_1^2(v_{m1}r)\,r\,dr = \frac{v_{m1}^2a^2}{2}J_1^2(v_{m1}a) = \frac{\nu_{m1}}{2}J_1^2(\nu_{m1}), \tag{70}$$

где

$$\nu_{m1}=v_{m1}a, \quad J_0(\nu_{m1})=0,$$

$$N_0(\nu_{m1})J_1(\nu_{m1})-N_1(\nu_{m1})J_0(\nu_{m1}) = N_0(\nu_{m1})J_1(\nu_{m1}) = \frac{2}{\pi\nu_{m1}},$$
$$NZ_0(\nu_{m1}) = N_0(\nu_{m1})J_0(v_{m1}b)-J_0(\nu_{m1})N_0(v_{m1}b) = N_0(\nu_{m1})J_0(v_{m1}b).$$

2) Область между волноводами, $r>a$, $z>0$.

$$W_\omega\Big|_{\substack{r>a\\ z>0}} = -2\pi\omega w\int_a^b[\frac{\partial}{\partial r}(\Pi^1_\omega)^2_u]^2\,r\,dr, \tag{71}$$

где $(\Pi^1_\omega)^2_4=(\Pi^1_\omega)_u\Big|_{\substack{r>a\\ z>0}}$.

Для подстановки в (71) следует использовать формулу (61), определяющую $(\Pi^1_\omega)^2_u$. При интегрировании надо принять во внимание, что $Z_0(v_{m2}b)\equiv 0$, $Z_0(v_{m2}a)=0$, согласно (59), и поэтому имеет место равенство

$$\int_a^b Z_1^2(v_{m2}r) = ½\{[bZ_1(v_{m2}b)]^2-[aZ_1(v_{m2}a)]^2\}. \tag{72}$$

При этом выражение для $W_w\Big|_{\substack{r>a\\ z>0}}$ будет иметь вид:

$$W_\omega\Big|_{\substack{r>a\\ z>0}} = \frac{\pi^2q^2\lambda^2(k)}{4\omega}\,\frac{(k-\frac{\omega}{u})\phi_2^2(\frac{\omega}{u})}{I_0^2(k\gamma a)}\sum_{m_2}\frac{v_{m2}^2w_{m2}J_0^2(v_{m2}a)\{[bZ_1(v_{m2}b)]^2-[aZ_1(v_{m2}a)]^2\}}{J_0^2(v_{m2}b)\phi_2'^2(w_{m2})(k-w_{m2})(w_{m2}-\frac{\omega}{u})^2}. \tag{73}$$

Если использовать следующие очевидные соотношения:

$$Z_0(v_{m2}a) = J_0(v_{m2}a)N_0(v_{m2}b) - J_0(v_{m2}b)N_0(v_{m2}a) = 0,$$

$$\frac{J_0(v_{m2}a)}{J_0(v_{m2}b)} = \frac{N_0(v_{m2}a)}{N_0(v_{m2}b)},$$

$$Z_1(v_{m2}a) = J_1(v_{m2}a)N_0(v_{m2}b) - N_1(v_{m2}a)J_0(v_{m2}b) = \tag{74}$$

$$= \frac{J_0(v_{m2}b)}{J_0(v_{m2}a)}\left[J_1(v_{m2}a)N_0(v_{m2}a) - N_1(v_{m2}b)J_0(v_{m2}a)\right] =$$

$$= \frac{J_0(v_{m2}b)}{J_0(v_{m2}a)} \cdot \frac{2}{\pi v_{m2}a}, \quad Z_1(v_{m2}b) = \frac{2}{\pi v_{m2}b}, \quad \text{то}$$

$$v_{m2}^2\{[bZ_1(v_{m2}b)]^2 - [aZ_1(v_{m2}a)]^2\}\frac{J_0^2(v_{m2}a)}{J_0^2(v_{m2}b)} = \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{J_0^2(v_{m2}a)}{J_0^2(v_{m2}b)} - 1\right] \tag{75}$$

и формула (73) приобретает более простой вид:

$$W_\omega\Big|_{\substack{r>a\\z>0}} = \frac{q^2\lambda^2(k)}{\pi\omega}\,\frac{(k-\frac{\omega}{u})\phi_2^2(\frac{\omega}{u})}{I_0^2(k\gamma a)}\sum_{m2}\frac{w_{m2}\left[\frac{J_0^2(v_{m2}a)}{J_0^2(v_{m2}b)} - 1\right]}{\phi_2'^2(w_{m2})(k-w_{m2})(w_{m2}-\frac{\omega}{u})^2}. \tag{76}$$

3) $z < 0$, область, свободная от полубесконечного волновода, формула (64) дает выражение для $(\Pi^1_\omega)_u$ при $z < 0$. Пользуясь (64), можно найти выражение для излучаемой энергии, если интегрирование в (66) производить от $r = 0$ до $r = b$. Интеграл в (66) легко вычисляется, если принять во внимание очевидные соотношения

$$v_{m3}^2\int_0^b J_1^2(v_{m3}r)r\,dr = \frac{v_{m3}^2 b^2}{2} J_1^2(v_{m3}b), \tag{77}$$

$$N_0(v_{m3}b)J_1(v_{m3}b) = N_0(v_{m3}b)J_1(v_{m3}b) - N_1(v_{m3}b)J_0(v_{m3}b) = \frac{2}{\pi v_{m3}b}.$$

Выражение для излучаемой энергии имеет вид:

$$W_\omega\Big|_{z<0} = \frac{q^2\lambda^2(k)}{\pi\omega}\,\frac{\phi^2(\frac{\omega}{u})(k-\frac{\omega}{u})}{I_0^2(k\gamma a)}\sum_{m3}\frac{w_{m3}\frac{J_0^2(v_{m3}a)}{J_0^2(v_{m3}b)}}{\phi_1(w_{m3})(k+w_{m3})(w_{m3}+\frac{\omega}{u})^2}. \tag{78}$$

Если обозначить

$$W_\omega\Big|_{\substack{r<a\\z>0}} = W_1, \quad W_\omega\Big|_{\substack{r>a\\z>0}} = W_2, \quad W_\omega\Big|_{z<0} = W_3 \tag{79}$$

и произвести тождественную замену

$$\frac{\omega}{u} = \frac{k}{\beta}, \quad \frac{1}{k}(k-\frac{\omega}{u}) = 1 - \frac{1}{\beta}, \tag{80}$$

то все три формулы для потока излучаемой энергии можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned}
W_1 &= q^2\lambda^2(k)\frac{(1-\frac{1}{\beta})\phi_2^2(\frac{k}{\beta})}{\pi c I_0^2(k\gamma a)}\sum_{m1}\frac{w_{m1}}{\phi_1'^2(w_{m1})(k-w_{m1})(\frac{k}{\beta}-w_{m1})^2},\\
W_2 &= q^2\lambda^2(k)\frac{(1-\frac{1}{\beta})\beta\phi_2^2(\frac{k}{\beta})}{\pi c I_0^2(k\gamma a)}\sum_{m2}\frac{w_{m2}\left[\frac{J_0^2(v_{m2}a)}{J_0^2(v_{m2}b)}-1\right]}{\phi_2'^2(w_{m2})(k-w_{m2})(\frac{k}{\beta}-w_{m2})^2},\\
W_3 &= q^2\lambda^2(k)\frac{(1-\frac{1}{\beta})\phi_2^2(\frac{k}{\beta})}{\pi c I_0^2(k\gamma a)}\sum_{m3}\frac{w\,\frac{J_0^2(w_{m3}a)}{J_0'^2(v_{m3}b)}}{\phi_1^2(w_{m3})(k-w_{m3})(w_{m3}+\frac{k}{\beta})^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

5. Получение приближенных формул

При помощи формул (81) можно оценить величину потока излучаемой энергии. В общем случае необходимо было бы вычислять бесконечные суммы по m_1, m_2, m_3 и интегралы в бесконечных пределах по частоте ω.

Однако функции от ω, входящие в (81), только тогда имеют корни, когда $k > v$. Следовательно, для данного k имеется лишь конечное число величин v_{m1}, v_{m2} и v_{m3}.

Таким образом, суммы по m_1, m_2 и m_3 содержат конечное число членов, если k конечно. Для приближенной оценки можно также и вместо бесконечных пределов интегрирования учитывать конечную область величин k. Действительно, формулы (81) содержат в знаменателе множитель $I_0^2(k\gamma a)$. Следовательно, с увеличением частоты ω, W_1, W_2 убывают по закону $e^{-2k\gamma a}$. Естественно ввести некую верхнюю границу частоты $\omega = \omega_{max}$. Например, оценить $\omega_{max} = c \cdot k_{max}$ при помощи равенства

$$k_{max}\gamma a = 1. \tag{82}$$

Интересно отметить, что если задать γ, a и b, т.е. скорость заряда и геометрические размеры волноводной системы, то может оказаться, что надо учитывать только по одному члену в суммах по m_1, m_2, m_3. Это означает, что в таком случае формулы (81) очень удобно использовать для численных оценок переходного излучения. Значения v_{m1}, v_{m2}, v_{m3} при $m = 1$ соответственно равны

$$v_{11} = \frac{\nu_0}{a}, \quad v_{12} \approx \frac{\pi}{b-a}, \quad v_{13} = \frac{\nu_0}{b}, \tag{83}$$

где ν_0 – корень функции Бесселя,

$$J_0(\nu_0) = 0, \quad \nu_0 \approx \frac{3}{4}\pi .$$

Особенно интересен случай, когда диаметры волноводов a и b выбраны так, что выполняется условие

$$a \gg b-a, \quad b \gg b-a, \quad a \approx b . \tag{84}$$

Тогда из (83) с учетом (84) следует, что

$$v_{11} \approx v_{13} \ll v_{12} . \tag{85}$$

При выполнении условия 85 может оказаться, что для $k \leq \frac{1}{\gamma a}$, $w_{12} = \sqrt{k^2 - v_2^2}$ будет величиной мнимой, т.е. с данной частотой вообще не может существовать волн в пространстве между волноводами.

Такой случай эквивалентен расположению, когда в цилиндрическом волноводе имеется ступенька – переход от одного диаметра к другому.

Другой крайний случай, когда, $b \gg a$. При $b \to \infty$ соотношения, полученные в этой работе, должны переходить в формулы из работы /3/.

Чтобы показать, что это действительно так, надо рассмотреть функцию

$$J_0(va)\{\mathcal{H}_0(vr) - J_0(vr)\frac{\mathcal{H}_0(vb)}{J_0(vb)}\} .$$

Практически величина k всегда содержит небольшую мнимую часть вследствие затухания. Следовательно, числа v комплексные

$$v = v_1 + iv_2 .$$

При неограниченном возрастании аргументов функции Бесселя стремятся к следующим величинам:

$$\mathcal{H}_0(vb) \to e^{ivb} = e^{iv_1 b} e^{-v_2 b},$$

$$J_0(vb) \xrightarrow{b\to\infty} e^{ivb} + e^{-ivb} \to e^{-iv_1 b} e^{v_2 b},$$

$$\frac{\mathcal{H}_0(vb)}{J_0(vb)} \to e^{2iv_1 b} e^{-2v_2 b} \to 0,$$

$$b \to \infty .$$

Следовательно, при $b \to \infty$

$$J_0(va)\{\mathcal{H}_0(vr) - J_0(vr)\frac{\mathcal{H}_0(vb)}{J_0(vb)}\}\Big|_{b\to\infty} \to J_0(va)\,\mathcal{H}_0(vr),$$

что и требовалось показать.

В качестве примера можно рассмотреть, каким образом получить оценку потока излученной энергии в полубесконечном цилиндре, т.е. определить численную величину W_1, когда может существовать единственная волна с числом w_{m1}. В формулу для W_1 входит отношение величин $\phi_2^2(\frac{k}{\beta})/\phi_2'^2(w_{m1})$. Для оценки этого отношения удобно воспользоваться такой записью $\phi_2(w)$, вид которой приведен в (41). Согласно (41),

$$\phi_2(w) = \sqrt{\bar{w} - \bar{k}}\ \Pi\ \frac{(\bar{w} - \bar{w}_{m1})(w - \bar{w}_{m2})}{(\bar{w} - \bar{w}_{m3})}, \tag{86}$$

где $\bar{w} = aw$, $\bar{k} = dk$.

Тогда, согласно (86),

$$\phi_2(\frac{k}{\beta}) = (\frac{\bar{k}}{\beta} - \bar{w}_{m1})\sqrt{\bar{k}}\sqrt{\frac{1}{\beta} - 1}\ \tilde{\tilde{\phi}}_2(\frac{\bar{k}}{\beta}), \tag{87}$$

$$\phi_2'(w_{m1}) = a\sqrt{\bar{w}_{m1} - k}\ \tilde{\tilde{\phi}}_2(\bar{w}_{m1}), \tag{88}$$

где

$$\tilde{\tilde{\phi}}_2(w) = \Pi\ \frac{(\bar{w} - \bar{w}_{m1})(\bar{w} - \bar{w}_{m2})}{(\bar{w} - \bar{w}_{m3})}, \tag{89}$$

множители по m_1 надо считать, начиная с $m_1 = 2$. При сделанном предположении, что действительными числами являются только $w_{m1}|_{m1=1}$ и $w_{m3}|_{m_3=1}$, очевидно, отношение

$$\delta = \frac{\tilde{\phi}_2(\frac{\bar{k}}{\beta})}{\tilde{\tilde{\phi}}_2(\bar{w}_{m1})} \approx 1, \tag{90}$$

тогда

$$\frac{\phi_2^2(\frac{k}{\beta})}{\phi_2'^2(w_{m1})} \approx \frac{k(\frac{k}{\beta} - w_{m1})^2(\frac{1}{\beta} - 1)}{w_{m1} - k} . \tag{91}$$

Считая $0 \leq k\gamma a \leq 1$, $I_0(k\gamma a) \approx 1$ и подставляя приближенное равенство (91) в (81), можно получить

$$W_1 = [\delta \cdot q \cdot \lambda(k)]^2 \frac{(\frac{1}{\beta}-1)^2}{\pi c} \frac{w_{m1}\cdot k}{(k - w_{m1})^2} . \quad (92)$$

Полная энергия, излученная при пролете заряда, есть интеграл по всем частотам от минимальной,

$$k_{min} = v_{m1}$$

до максимальной

$$k_{max} = \frac{1}{\gamma a} .$$

Если допустить

$$k_{max} - k_{min} = \frac{1}{\gamma a} - v_{m1} \ll v_{m1} , \quad (93)$$

то интегрирование можно заменить умножением W_1 на полосу частот

$$\Delta\omega = c\,(\frac{1}{\gamma a} - v_{m1}) = \frac{c}{a}(\frac{1}{\gamma} - v) . \quad (94)$$

Обозначая полную энергию через U, можно написать с учетом (94):

$$U = \frac{1}{\pi a}[q\cdot\lambda(k)\,\delta]^2 (\frac{1}{\beta}-1)^2 \frac{\tilde{w}_{m1}\tilde{k}(\frac{1}{\gamma} - \nu)}{(\tilde{k} - \tilde{w}_{m1})^2} , \quad (95)$$

$\tilde{k}$, $\tilde{w}_{m1}$ – средние значения k, w_{m1} на данном интервале. При выполнении (93) можно получить

$$\tilde{k} = k_{max} = \frac{1}{\gamma a} ,$$

$$\tilde{w}_{m1} = w_{m1\,max} = \sqrt{k^2_{max} - v^2_{m1}} \approx \sqrt{2k_{max}\cdot\Delta k} \quad (96)$$

$$\tilde{k} - \tilde{w}_{m1} = \tilde{k} = k_{max} .$$

Используя равенства (96), можно (95) преобразовать к виду

$$U = \frac{\sqrt{2}}{\pi a}[q\cdot\lambda(k)\cdot\delta]^2 (\frac{1}{\beta}-1)^2 \frac{(1-\gamma\nu)^{3/2}}{\gamma} . \quad (97)$$

6. Количественные оценки излученной энергии

Если принять $\lambda(k) = 1$, $\delta = 1$, то

$$U = \frac{\sqrt{2}}{\pi a} q^2 (\frac{1}{\beta} - 1)^2 \frac{(1-\gamma_\nu)^{3/2}}{\gamma} ,$$

$$a = 8 , \quad \gamma = 0{,}4 \quad (\gamma = \frac{1}{2{,}5}) .$$

Для отверстия в бесконечном экране, согласно /7/,

$$U_\infty = \frac{q^2}{a\gamma\beta} , \quad \frac{U}{U_\infty} = \frac{\sqrt{2}\,\beta(1-\beta)^2(1-\gamma\nu)^{3/2}}{\pi\beta^2\gamma} ,$$

где a – диаметр отверстия.

$$\frac{(1-\beta)^2}{\beta\gamma} = \frac{(1-\beta)^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta)^{3/2}(1+\beta)^{-1/2} ,$$

$$\frac{U}{U_\infty} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}[(1-\beta)(1-\gamma\nu)]^{3/2} \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \approx \frac{1}{\pi}[(1-\beta)(1-\gamma\nu)]^{3/2} \approx \frac{1}{\pi}[\tfrac{1}{2}\gamma^2(1-\gamma\nu)]^{3/2} .$$

И подставляя численные выражения, получим:

$$\frac{U}{U_0} \approx 5.10^{-5} .$$

РАЗДЕЛ II. Излучение магнитного диполя

В разделе I рассмотрено переходное излучение, возникающее при пролетании заряда по оси двух цилиндрических коаксиальных волноводов.

Во втором разделе будет рассмотрен случай, когда по оси таких волноводов движется не заряд, а магнитный диполь P_m. Предполагается, что скорость движения магнитного диполя постоянна и равна u.

1. Поля, возникающие при движении магнитного диполя

Поле, возникающее при движении диполя P_m, является суммой собственного поля P_m в бесконечном волноводе и поля дифракции на открытом конце полубесконечного волновода. Если поля описывать функцией вектор – потенциала $\vec{A}$,

$$\text{то} \quad \vec{A} = \vec{A}^1 + \vec{A}^0 , \qquad (1)$$

где $\vec{A}^0$ служит для выражения собственного поля, а $\vec{A}^1$ – поля дифракции.

В случае с магнитным диполем имеется то отличие от задачи с зарядом, что теперь возбуждаются магнитные волны, а не электрические; на стенках волновода при движении магнитного диполя наводится азимутальный ток, тогда как движение электрического заряда наводило продольный ток. Наличие волн только одного типа и в том, и в другом случае обусловлено симметрией задачи. Также вследствие симметрии в случае магнитного диполя вектор-потенциал $\vec{A}$ имеет только азимутальную компоненту

$$\vec{A} = A_\phi , \quad \vec{A}^1 = A^1_\phi , \quad \vec{A}^0 = A^0_\phi , \quad A_\phi = A^0_\phi + A^1_\phi . \qquad (2)$$

Компоненты полей магнитного типа E_ϕ, H_z, H_r выражаются через A_ϕ следующим образом:

$$E_\phi = \frac{1}{c}\frac{\partial A_\phi}{\partial t} , \quad H = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA \quad), \quad H = -\frac{\partial A_\phi}{\partial Z} . \qquad (3)$$

При движении магнитного диполя P_m в свободном пространстве функция A^0_ϕ известна и равна

$$A^0_\phi = \frac{P_m \gamma}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(k\gamma r) e^{i\frac{\omega}{u}(z-ut)} \frac{\omega\, d\omega}{U} , \qquad (4)$$

где

$$k = \frac{\omega}{c} , \quad \gamma = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} , \quad \beta = \frac{u}{c} . \qquad (5)$$

Вводя представления A^0_ϕ в виде разложения

$$A^0_\phi = \frac{1}{2\pi} \int A^0_{\phi\omega} e^{-i\omega t} d\omega , \qquad (6)$$

взамен формулы (4) можно получить

$$A^0_{\phi\omega} = \frac{P_m \gamma k}{2u} K_1(k\gamma r) e^{i\frac{\omega}{u}z} . \qquad (7)$$

Выражение (7) является частным решением для задачи определения поля P_m при движении в бесконечном волноводе радиуса b. Чтобы найти общее решение, надо частное сложить с решением однородного уравнения Максвелла и удовлетворить граничному условию на поверхности бесконечного волновода

$$A^0_{\phi\omega}\Big|_{r=b} = 0 . \qquad (8)$$

При выполнении этого и используя (7), можно получить

$$A^0_{\phi\omega} = \frac{k\gamma P_m}{2u} \left[K_1(k\gamma r) - I_1(k\gamma r) \frac{K_1(k\gamma b)}{I_1(k\gamma b)} \right] e^{i\frac{\omega}{u}z} . \qquad (9)$$

Теперь необходимо найти выражение для A^1_ϕ или для $A^1_{\phi\omega}$, определенного равенством

$$A^1_\phi = \frac{1}{2\pi} \int A^1_{\phi\omega} e^{-i\omega t} d\omega . \qquad (10)$$

Поле, созданное азимутальным током на поверхности полубесконечного волновода, определяется формулой

$$A^1_\phi = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} j(z) \frac{e^{ikR} \cos\phi}{R} ds , \qquad (11)$$

ds – элемент поверхности волновода,

$$ds = a\, d\phi\, dz$$

$$A^1_\phi = \frac{a}{c} \int_{-\infty}^{\infty} j(z)\, dz \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \cos\phi\, d\phi , \qquad (12)$$

$j(z)$ – плотность азимутального тока на стенках волновода

$$\left. \begin{aligned} j(z) &= f(z) , \quad z > 0 \\ j(z) &= 0 , \quad z < 0 \end{aligned} \right\} . \qquad (13)$$

Если $j(z)$ и A^1_ϕ представить в виде разложения

$$\left. \begin{aligned} j(z) &= \int F(w) e^{iwz} dw , \\ A^1_\phi &= \frac{1}{2\pi} \int A^1_\omega e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \qquad (14)$$

и произвести преобразования, подобные сделанным в разделе 1 согласно соотношению (8), то формула (12) приводит к выражению

$$A^1_\omega = i \frac{2\pi^2 a}{c} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) J_1(vr) H_1(va) e^{iwz} dw , \quad r < a ;$$

$$A^1_\omega = i \frac{2\pi^2 a}{e} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) J_1(va) H_1(vr) e^{iwz} dw , \quad r > a . \qquad (15)$$

Формула (15) является частным решением для поля дифракции. Чтобы найти общее решение, надо к частному добавить решение однородного уравнения с произвольными коэффициентами, которые определятся при удовлетворении граничных условий на поверхности бесконечного волновода

$$A^1_\omega|_{r=b} = 0 . \qquad (16)$$

Складывая частное решение для A^1_ω, данное в (16), с решением однородного уравнения и выполняя условие (16), можно получить

$$A^1_\omega = \frac{2\pi i}{c}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, L(w,r)\, e^{iwz}\, dw , \qquad (17)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}(wr) &= i\pi a J_1(vr)\left\{ N_1(va) - J_1(va)\frac{N_1(vb)}{J_1(vb)} \right\}, \quad r < a ; \\ \mathfrak{L}(wr) &= i\pi a J_1(va)\left\{ N_1(vr) - J_1(vr)\frac{N_1(vb)}{J_1(vb)} \right\}, \quad r > a . \end{aligned}\right. \qquad (18)$$

Аналогично можно ввести обозначения

$$L(wa) = L(w) = i\pi a J_1(va)\left\{ N_1(va) - J_1(va)\frac{N_1(vb)}{J_1(vb)} \right\} . \qquad (19)$$

Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} Z_1(va) &= N_1(va)\, J_1(vb) - J_1(va)\, N_1(vb) , \\ Z_1(vr) &= N_1(vr)\, J_1(vb) - J_1(vr)\, N_1(vb) , \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

формулы (18) и (19) можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned} L(wr) &= i\pi a J_1(vr)\frac{Z_1(va)}{J_1(vb)} , \quad r < a ; \\ L(wr) &= i\pi a Z_1(vr)\frac{J_1(va)}{J_1(vb)} , \quad r > a ; \\ L(w) &= i\pi a J_1(va)\frac{Z_1(va)}{J_1(vb)} , \quad r = a . \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Таким образом, решение задачи о дифракционном поле сводится к определению функции $F(w)$. Для этого можно получить уравнения, происходящие из граничных условий на поверхности полубесконечного волновода при $r = a$. Из граничных условий на поверхности полубесконечного волновода при $r = a$ можно получить систему уравнений, позволяющую определить $F(w)$.

Приравнивая азимутальную компоненту общего электрического поля при $r = a$, $z > 0$ нулю

$$E^0_\phi + E^1_\phi = 0 , \quad r = a , \quad z > 0 , \qquad (22)$$

можно получить первое уравнение, а, удовлетворяя требованию, чтобы поверхностный ток обращался в ноль на продолжении волновода при $z < 0$, можно получить второе уравнение

$$f(z) = 0 , \quad z < 0 . \qquad (23)$$

Определяя E^0_ϕ и E^1_ϕ согласно (3) с использованием (9) и (22) и подставляя полученные выражения в (22), а выражение для плотности тока из (14) подставляя в (23), систему уравнений можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\int F(w)\, L(w)\, e^{iwz}\, dw = \frac{k\gamma_0 P_m}{4\pi i u}\left[K_1(k\gamma a) - I_1(k\gamma a)\frac{K_1(k\gamma b)}{I_1(k\gamma b)} \right] e^{i\frac{\omega}{u}z} , \quad z > 0 ; \\ &\int F(w)\, e^{iwz} = 0 , \quad z < 0 . \end{aligned}\right. \qquad (24)$$

Метод решения системы интегральных уравнений (24), предложенный в /1/, был использован в разделе I. Для рассматриваемой задачи соответствующие преобразования проводятся аналогичным образом. Допускается, что функцию $L(w)$ можно представить в виде

$$L(w) = \frac{L_1(w)\cdot L_2(w)}{w^2 - \frac{\omega^2}{u^2}} . \qquad (25)$$

$L_1(w)$ регулярна и не имеет нулей в верхней полуплоскости переменного w, а $L_2(w)$ регулярна и не имеет нулей в нижней полуплоскости. В первом уравнении (24) контур интегрирования необходимо проводить в верхней полуплоскости. Следовательно, произведение $F(w) \cdot L(w)$ должно быть регулярно в верхней полуплоскости за исключением точки $w = \frac{\omega}{u}$, где имеется простой полюс. Во втором уравнении (24) контур интегрирования замыкается в нижней полуплоскости w. Следовательно, $F(w)$ должна быть регулярной в любой точке этой полуплоскости. Этим требованиям можно удовлетворить, если $F(w)$ представить в виде

$$F(w) = \frac{R}{L_2(w)} , \qquad (26)$$

где R – некоторая постоянная, которую необходимо определить, решая систему (24). Если ввести функцию $\psi(w)$, то

$$\begin{aligned} &\psi(w) = \psi_1(w)\,\psi_2(w) = vL(w) = \frac{\sqrt{k^2 - w^2}\, L_1(w) L_2(w)}{w^2 - \frac{w^2}{u^2}} , \\ &L_1(w) = \frac{\psi_1(w)(w + \frac{\omega}{u})}{\sqrt{k + w}} , \quad L_2(w) = \frac{\psi_2(w)(w - \frac{\omega}{u})}{\sqrt{k - w}} , \end{aligned} \qquad (27)$$

то

$$F(w) = \frac{R\sqrt{k-w}}{\psi_2(w)(w-\frac{\omega}{u})}. \qquad (28)$$

В соответствии с (27) и (28) первое уравнение (24) можно представить в виде

$$R\int \frac{\sqrt{k-w}}{\psi_2(w)(w-\frac{\omega}{u})} J_1(va)[H_1(va)-J_1(va)\frac{H_1(vb)}{J_1(vb)}]e^{iwz}\,dw = \qquad (29)$$

$$= \frac{k\gamma P_m}{4\pi i\beta}[K_1(k\gamma a) - I_1(k\gamma a)\frac{K_1(k\gamma b)}{I_1(k\gamma b)}]e^{i\frac{\omega}{u}z}.$$

Вычет в точке $w=\frac{\omega}{u}$ равен

$$R\int \frac{L(w)\sqrt{k-w}\;e^{iwz}}{\psi_2(w)(w-\frac{\omega}{u})}\,dw = 2\pi i R\,\frac{L(\frac{\omega}{u})\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}\;e^{i\frac{\omega}{u}z}}{\psi_2(\frac{\omega}{u})}. \qquad (30)$$

При $w=\frac{\omega}{u}$, $v = ik\gamma$

$$J_1(ik\gamma a) = iI_1(k\gamma a), \quad H_1(ik\gamma a) = \frac{2}{\pi}K_1(k\gamma a),$$
$$L(\frac{\omega}{u}) = 2aiI_1(k\gamma a)[K_1(k\gamma a) - \frac{K_1(k\gamma b)}{I_1(k\gamma b)}I_1(k\gamma a)]. \qquad (31)$$

Подстановка (30) и (31) в (29) приводит к выражению для R

$$R = -\frac{k\gamma P_m}{16\pi^2 iaI_1(k\gamma a)}\cdot\frac{\psi_2(\frac{\omega}{u})}{\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}},$$

а подстановка последнего в равенство (28) приводит к формуле для $F(w)$:

$$F(w) = -\frac{k\gamma P_m}{16\pi^2 iaI_1(k\gamma a)}\;\frac{\psi_2(\frac{\omega}{u})\sqrt{k-w}}{\beta\psi_2(w)(w-\frac{\omega}{u})\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}}. \qquad (32)$$

Вывод выражений для функций $\psi_1(w)$ и $\psi_2(w)$ может быть произведен таким же образом, как это сделано в /1/. Поэтому приводятся только окончательные формулы для этих функций:

$$\left.\begin{aligned}\psi_1(w) &= \sqrt{i\pi a(w+k)}\,Z_1(va)\frac{J_1(va)}{J_1(vb)}\prod\frac{(w+w_{m1})(w+w_{m2})(w-w_{m3})}{(w+w_{m3})(w-w_{m1})(w-w_{m2})},\\ \psi_1(w) &= \sqrt{i\pi a(w-k)}\,Z_1(va)\frac{J_1(va)}{J_1(vb)}\prod\frac{(w-w_{m1})(w-w_{m2})(w+w_{m3})}{(w-w_{m3})(w+w_{m1})(w+w_{m2})}.\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

В формулах (33) использованы обозначения:

$$\begin{aligned} w_{m1} &= \sqrt{k^2-v_{m1}^2}, \quad J_1(v_{m1}a) = 0;\\ w_{m2} &= \sqrt{k^2-w_{m2}^2}, \quad Z_1(v_{m2}a) = 0;\\ w_{m3} &= \sqrt{k^2-v_{m3}^2}, \quad J_1(v_{m3}b) = 0.\end{aligned} \qquad (34)$$

2. Свойства волн в различных областях волноводной системы

Подстановка в (17) выражений (21) и (22) приводит к равенствам

$$A_\omega^1 = P_m\frac{k\gamma}{8iuI_1(k\gamma a)}\;\frac{\psi_2(\frac{\omega}{u})}{\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}}\int\frac{\sqrt{k-w}\;J_1(vr)Z_1(va)\,e^{iwz}\,dw}{(w-\frac{\omega}{u})\psi_2(w)J_1(vb)}, \quad r<a;$$

$$A_\omega^1 = P_m\frac{k\gamma}{8iuI_1(k\gamma a)}\;\frac{\phi_2(\frac{\omega}{u})}{\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}}\int\frac{\sqrt{k-w}\;J_1(va)Z_1(vr)\,e^{iwz}\,dw}{(w-\frac{\omega}{u})\psi_2(w)J_1(vb)}, \quad r>a. \qquad (35)$$

Интеграл в (35) вычисляется при помощи вычетов. В разделе I было установлено, что для каждой области в данной волноводной системе существуют волны с характерными особенностями. Вычисление (35) приводит к такому же результату. При $z>0$, $r<a$ (внутри полубесконечного волновода) контур интегрирования в (35) замыкается в верхней полуплоскости w и вычеты вычисляются в полюсах, образованных нулями $J_1(v_{m1}a)$. Отличие от электрических волн заключается в том, что прежде полюса были в точках $J_0(v_{m1}a) = 0$. В области $z>0$, $r>a$ полюса в точках $Z_1(v_{m2}a) = 0$. В области $z<0$ контур интегрирования замыкается в нижней полуплоскости w, полюса в точках $J_1(v_{m3}b) = 0$. Например, для $z>0$, $r<a$, согласно (35),

$$A_\omega^1 = P_m\frac{k\gamma}{8iuI_1(k\gamma a)}\;\frac{\psi(\frac{\omega}{u})}{\sqrt{k-\frac{\omega}{u}}}\int\frac{\sqrt{k-w}\;J_1(vr)Z_1(va)e^{iwz}\,dw}{(w-\frac{\omega}{u})\psi_2(w)J\;(vb)}.$$

Вычет в точке $w = \frac{\omega}{u}$, равный

$$P_m \frac{k\gamma}{2u} I_1(k\gamma r)\left[\frac{K_1(k\gamma a)}{I_1(k\gamma a)} - \frac{K_1(k\gamma b)}{I_1(k\gamma b)}\right] e^{i\frac{\omega}{u}z} ,$$

в сумме с полем диполя в бесконечном волноводе, радиуса $r = b$, равным

$$-P_m \frac{k\gamma}{2u}\left[K_1(k\gamma r) - I_1(k\gamma r)\frac{K_1(k\gamma b)}{I_1(k\gamma b)}\right] e^{i\frac{\omega}{u}z} ,$$

образует поле диполя в бесконечном волноводе, радиус $r = a$,

$$-P_m \frac{k\gamma}{2u}\left[K_1(k\gamma r) - I_1(k\gamma r)\frac{K_1(k\gamma a)}{I_1(k\gamma a)}\right] e^{i\frac{\omega}{u}z} .$$

Сумма вычетов в нулях $J_1(v_{m1} a) = 0$ составляет поле дифракции $A^1_{\omega u}$ на открытом конце полубесконечного волновода, равное

$$A^1_{\omega u} = P_m \frac{\pi k\gamma}{4u I_1(k\gamma a)} \frac{\psi_2(\frac{\omega}{u})}{\sqrt{k - \frac{\omega}{u}}} \sum_{m1} \frac{\sqrt{k - w_{m1}}\, J_1(v_{m1} r) Z_1(v_{m1} a) e^{i w_{m1} z}}{(w_{m1} - \frac{\omega}{u}) J_1(v_{m1} b)\psi_2'(w_{m1})} \cdot \quad (36)$$

3. Излученная энергия

Поток излучаемой энергии на частоте ω вычисляется по формуле (65) из первого раздела. Подстановка выражений для полей согласно (3) в эту формулу приводит к равенству

$$W_\omega = 2\pi\omega w \int |A_\phi|^2 r\,dr . \quad (37)$$

Для примера можно произвести вычисление величины W_ω в области $r < a$, $z > 0$. Интеграл в этом случае берется от $r = 0$ до $r = a$. Подставляя в (37) выражения для A^1_ϕ из (36) и используя тождества

$$J_1(v_{m1} a) = 0,$$

$$\int_0^a J_1^2(v_{m1} r) r\,dr = \frac{a^2}{2} J_0^2(v_{m1} a),$$

$$J_0(v_{m1} a) Z_1(v_{m1} a)\frac{1}{J_0(v_m b)} = J_0(v_m a) N(v_{m1} a) = \frac{2}{\pi v_{m1} a} ,$$

можно получить

$$W_{\omega 1} = P_m^2 \frac{k^2\gamma^2\omega\,\psi_2^2(\frac{\omega}{u})}{2u^2(k - \frac{\omega}{u}) I_1^2(k\gamma a)} \sum_{m1} \frac{w_{m1}}{(k + w_{m1})\psi'^2(w_{m1} - \frac{\omega}{u})^2} . \quad (38)$$

4. Получение приближенных формул

При выводе формул для пространства между волноводами и для $z < 0$ надо было бы произвести такие же преобразования, какие сделаны в разделе I, с некоторыми изменениями в деталях. Поэтому целесообразно непосредственно перейти к обсуждению возможности практического применения формулы (38). Предполагается рассмотреть опять такой случай, когда возможно существование по одной первой гармонике волн первого и третьего типа и не существуют совсем волны второго типа. В этом случае в (38) сохранится только один член. Можно показать, что (38) можно еще более упростить. Функцию $\psi(w)$ можно представить в виде

$$\psi_2(w) = A\sqrt{w - k}\;\Pi\frac{(w - w_{m1})(w - w_{m3})}{(w - w_{m3})} = A(w - w_1)\frac{\sqrt{w - k}}{w - w_3} S(w), \quad (39)$$

где A – величина, не зависящая от w , а

$$w_1 = w_{m1} \text{ при } m_1 = 1 , \quad w_3 = w_{m3} \text{ при } m_3 = 1 .$$

Следовательно, можно записать:

$$\psi_2'(w)|_{w=w_1} = A\frac{\sqrt{w_1 - k}}{w_1 - w_3} S(w_1) ,$$

$$\psi_2(\frac{k}{\beta}) = A(\frac{k}{\beta} - w_1)\frac{\sqrt{k}\sqrt{\frac{1}{\beta} - 1}}{\frac{k}{\beta} - w_3}\cdot S(\frac{k}{\beta}) .$$

Можно показать, что справедливо приближенное равенство

$$\left|\frac{S(\frac{k}{\beta})}{S(w_1)}\right| \cong 1 . \quad (40)$$

С использованием соотношений этих приближенных равенств для рассматриваемого случая формула (38) преобразуется к очень простому виду:

$$W_{\omega 1} = \frac{2P_m^2}{u^2}\,\frac{\omega w_1}{\nu_1^2}\left[\frac{w_1 - w_3}{\frac{k}{\beta} - w_3}\right]^2 , \qquad (41)$$

где $\nu_1 = v_{m1} a$.

Формула (51) оценивает величину спектральной плотности излучения. Можно, как это было уже сделано в разделе I, положить $R_{max} = \frac{1}{\gamma a}$,

$$b - a \ll a , \quad v_1 \approx v_3 \quad w_1 - k \ll k .$$

В этом случае выполняется

$$\Delta\omega \approx \frac{c}{a\gamma}(1-\nu_1\gamma) , \quad \left(w_1 - \frac{k}{\beta}\right)^2 \approx \frac{k^2}{\beta^2} , \qquad (42)$$

$$\frac{w_1}{k} \approx \sqrt{1-(\nu_1\gamma)^2} \approx \sqrt{2(1-\nu_1\gamma)} , \quad (w_1 - w_3)^2 \approx \frac{\nu_1^2\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1\right]}{k^2 a^2 \left[1-(\gamma\nu_1)^2\right]} .$$

Полагая, что полный поток излучаемой энергии U равен

$$U \cong W_{\omega 1} \cdot \Delta\omega$$

и используя приближенные соотношения (42), в результате можно получить

$$U = \frac{P_m^2\gamma}{a}\sqrt{1-(\nu_1\gamma)^2}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1\right] . \qquad (43)$$

Автор благодарен Б.М. Болотовскому за оказанную помощь при обсуждении различных вопросов по данной работе, С.Б. Рубину за интерес к задаче и сотрудникам расчетной группы за проведенные вычисления.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Получение выражений для полей заряженного сгустка в бесконечном волноводе. Поле заряженного сгустка, пролетающего по оси бесконечного волновода радиуса $r = b$.

Уравнения для скалярного потенциала

$$r \le r , \quad \Delta\phi_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2} = -4\pi\rho ,$$

$$r_0 \le r \le b , \quad \Delta\phi_2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2} = 0 . \qquad (1a)$$

Вследствие симметрии задачи

$$A_z = \beta\phi , \quad A_x = A_y = 0 .$$

Граничные условия приводят к

$$A_z\big|_{r=b} = 0 , \quad \phi\big|_{r=b} = 0 . \qquad (2a)$$

Плотность заряда ρ можно представить в виде

$$\rho(z,t) = \frac{q}{\pi r_0^2}\, Q(z-ut) = \frac{q}{2\pi^2 r_0^2}\int \alpha(k)\, e^{i\frac{\omega}{u}(z-ut)} \times d\omega , \qquad (3a)$$

Представление скалярного потенциала в форме разложения Фурье записывается в форме

$$\phi(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int \phi(r,k)\, e^{i\frac{\omega}{u}(z-ut)}\, d\omega . \qquad (4a)$$

Учитывая тождество

$$\Delta\phi(r,t) \equiv \frac{d^2\phi(r,t)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi(r,t)}{dr} + \frac{d^2\phi(r,t)}{dz^2} ,$$

а также соотношение (3а) и (4а), (1а) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} & r \le r , \quad \frac{d^2\phi_1(r,k)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi_1(r,k)}{dr} - k^2\gamma^2\phi_1(r,k) = -\frac{2q}{\pi r_0^2}\alpha(k) , \\ & r_0 \le r \le b , \quad \frac{d^2\phi_2(r,k)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi_2(r,k)}{dr} + k^2\gamma^2\phi_2(r,k) = 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (5a)$$

Решение (5а) следует искать в виде

$$\left.\begin{aligned} \phi_1(r,k) &= \frac{2q}{\pi r_0^2 k^2\gamma^2}\alpha(k) + A I_0(k\gamma r) , \\ \phi_2(r,k) &= B \cdot I_0(k\gamma r) + C K_0(k\gamma r) . \end{aligned}\right\} \qquad (6a)$$

Пользуясь известными равенствами

$$\frac{d}{dz} I_0(z) = I_1(z) , \quad \frac{d}{dz} K_0(z) = -K_1(k)$$

и граничными условиями

$$\phi_2(r_0,k) = \phi_2(r_0,k) , \quad \frac{d\phi_2}{dr}\Big|_{r=r_0} = \frac{d\phi}{dr}\Big|_{r=r_0} , \quad \phi_2(b,k) = 0 , \qquad (7a)$$

можно из (6а) получить

$$\frac{2q}{\pi r_0^2 k^2 \gamma^2}\,\alpha(k) + A_0 I_0(k\gamma r_0) = B I_0(k\gamma r_0) + C K_0(k\gamma r_0),$$

$$B I_0(k\gamma b) + C K_0(k\gamma b) = 0,$$

$$B I_1(k\gamma r_0) - C K_1(k\gamma r_0) = A I_1(k\gamma r_0).$$

После введения обозначений

$$A(r_0\, b) = K_0(k\gamma b) I_1(k\gamma r_0) + I_0(k\gamma b) K_1(k\gamma r_0)$$

и учитывая, что

$$K_0(k\gamma r_0)\, I_1(k\gamma r_0) + I_0(k\gamma r_0) K_1(k\gamma r_0) = \frac{1}{k\gamma r_0}, \qquad (8a)$$

коэффициенты уравнений (6а) можно записать в виде

$$A = \frac{2q\alpha(k) f(r_0 b)}{\pi r_0\, I_0(k\gamma b)\, k\gamma},$$

$$B = -\frac{2q\alpha(k) I_1(k\gamma r_0)}{\pi r_0 I_0(k\gamma b)\, k\gamma}\, K_0(k\gamma b),$$

$$C = \frac{2q\alpha(k) I_1(k\gamma r_0)}{\pi r_0 k\gamma}.$$

Если выражения для коэффициентов подставить в (6а), то можно получить

$$\phi_1(r,k) = \frac{2q\alpha(k)}{\pi r_0 k\gamma}\left\{1 - \frac{f(r_0 b) I_0(k\gamma r)}{I_0(k\gamma b)}\right\},$$

$$\phi_2(r,k) = \frac{2q\alpha(k)}{\pi r_0 k\gamma}\, I_1(k\gamma r)\left\{K_0(k\gamma r) - \frac{K_0(k\gamma b)}{I_0(k\gamma b)}\, I_0(k\gamma r)\right\}. \qquad (9a)$$

Можно показать, что из (9а) получаются также решения для точечного заряда. Так как

$$\delta(z - ut) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\frac{\omega}{u}(z-ut)}\, d\left(\frac{\omega}{u}\right), \quad \text{а} \quad \alpha(k) \to \frac{1}{u}$$

и при $r_0 \to 0$ $\quad I_1(k\gamma r_0) \to \frac{k\gamma r_0}{2}$,

то при $r_0 \to 0$ будем иметь

$$\frac{2q\alpha(k)}{\pi r_0 k\gamma}\, I(k\gamma r_0) \to \frac{2q}{\pi u k\gamma r_0}\cdot\frac{k\gamma r_0}{2} = \frac{q}{\pi u},$$

$$\phi(r,k) \to \frac{q}{\pi u}\left\{K_0(k\gamma r) - \frac{K_0(k\gamma b)}{I_0(k\gamma b)}\, I_0(k\gamma r)\right\}. \qquad (10a)$$

(10а) есть известное решение [3] для точечного заряда в бесконечном волноводе.

Так как записи различных выкладок и уравнений в данной работе производятся с применением вектора Герца $\vec{\Pi}$, то необходимо полученные в Приложении формулы переписать для вектора $\vec{\Pi}$.

Для симметричного заряда $\vec{\Pi} = \Pi_z$ естественно предположить

$$\Pi_z^0 = \int \Pi_z^0(r,k)\, e^{i\frac{\omega}{u}(z-ut)}\, d\omega.$$

Так как $\phi = -\operatorname{div}\vec{\Pi} = -\frac{d\Pi_z}{dz} = -i\frac{\omega}{u}\Pi_z$, то

$$\Pi_0^z(r,k) = \frac{iv}{\omega}\,\phi(r,k), \quad \Pi^0 = \int \Pi_\omega^0 e^{-i\omega t}\, d\omega, \qquad (12a)$$

$$\Pi_\omega^0 = \frac{iu}{\omega}\,\phi(r,k)\, e^{i\frac{\omega}{u}z}.$$

Вводя обозначение

$$\lambda(k) = \frac{2u\alpha(k) I_1(k\gamma r_0)}{r_0 k\gamma}, \qquad (13a)$$

для Π_ω^0 можно написать:

$$\Pi_\omega^0 = \frac{iq}{\pi\omega}\left\{K_0(k\gamma r) - \frac{K_0(k\gamma b)}{I_0(k\gamma b)}\, I_1(k\gamma r)\right\}\cdot\lambda(k). \qquad (14a)$$

Для точечного заряда $\lambda(k) = 1$.

Литература

1. Л.А. Вайнштейн. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. Сов. Радио, 1953.
2. Б. Нобл. Метод Винера–Хопфа. ИЛ, 1962.

3. Б.М. Болотовский, Г.В. Воскресенский. ЖТФ, 34 , (4), 711 (1964).

4. Б.М. Болотовский, Г.В. Воскресенский. ЖТФ, 34 , (4), 704 (1964).

5. Б.М. Болотовский, Г.В. Воскресенский. ЖТФ, 34 , (10), 1856 (1964).

6. Б.М. Болотовский, Д.М. Серданян. Изв. АН Армянской ССР, серия ф.-м., 17 , 2, 119 (1964).

7. Ю.Н. Днестровский и Д.П. Костомаров. ДАН СССР, 124 , 1026 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 мая 1965 г.