ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

2101

А.А. Корнейчук

ВЫЧИСЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
доцент Н.П. Жидков

Дубна 1965

2101

А.А. Корнейчук

ВЫЧИСЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
доцент Н.П. Жидков

Решение целого ряда математических задач сводится к вычислению сингулярных интегралов. Если в теоретическом исследовании решение считается найденным, когда оно выражено через сингулярные интегралы от известных функций, то при решении практических задач эти интегралы приходится вычислять тем или иным приближенным способом. Диссертация посвящена способам приближенного вычисления сингулярных интегралов.

В первой главе, имеющей вводный характер, кратно излагается постановка и решение одной из задач, где необходимо вычислять сингулярные интегралы – краевой задачи Римана. Задача заключается в том, что надо найти функцию $\phi(z)$, аналитическую как в области D_i, внутренней по отношению к замкнутому гладкому контуру C, так и в области D_e, внешней по отношению к C. Предельные значения $\phi_i(z_0)$ и $\phi_e(z_0)$, $z_0 \subset C$ должны удовлетворять соотношению

$$\phi_i(z_0) = G(z_0)\,\phi_e(z_0) + g(z_0).$$

Описывается также известный способ решения характеристического линейного сингулярного интегрального уравнения

$$a(z_0)f(z_0) + \frac{b(z_0)}{\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} = c(z_0)$$

с неизвестной функцией $f(z_0)$ путем сведения его к краевой задаче Римана.

Вторая глава посвящена приближенному отысканию некоторых решений одной системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений, описывающих взаимодействие элементарных частиц. Система предложена Ефремовым, Чжу Хун-юанем и Ширковым /1/; она состоит из трех линейных сингулярных интегральных уравнений

$$\operatorname{Re} A_i(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \operatorname{Im} A_i(\omega')\frac{d\omega'}{\omega'-\omega} + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \sum_{k=0}^{2} b_{ik} \operatorname{Im} A_k(\omega')\frac{d\omega'}{\omega'+\omega}$$

и трех нелинейных алгебраических соотношений между неизвестными функциями $\operatorname{Re} A_i(\omega)$, $\operatorname{Im} A_i(\omega)$, $1<\omega<\infty$, $i = 0,1,2$:

$$\operatorname{Im} A_i(\omega) = \sqrt{\frac{\omega-1}{\omega+1}}\left[(\operatorname{Re} A_i(\omega))^2 + (\operatorname{Im} A_i(\omega))^2\right].$$

Ставится задача отыскания только трех решений системы, у которых функции $\operatorname{Im} A_i(\omega)$

имеют максимум в некоторой точке, а вне малой окрестности этой точки принимают значения, малые по сравнению с максимальным. После замены переменных для отыскания таких решений рассматривается приближенная система

$$F_1(\Omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{G_1(\Omega')\,d\Omega'}{\Omega'-\Omega} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2} b_{ik}\frac{1}{2-\Omega_r-\Omega}\int_{-1}^{1} G(\Omega')\,d\Omega';$$

$$G_i(\Omega) = (1-\Omega)\sqrt{\frac{1+\Omega}{3-\Omega}}\,[F_1^2(\Omega) + G_i^2(\Omega)];$$

$$i = 0, 1, 2; \quad -1 \le \Omega \le 1; \quad -1 \le \Omega_r \le 1$$

и отыскиваются те ее решения, для которых $G_i(\Omega)$ малы вне некоторой окрестности точки $\Omega = \Omega_r$. Эти решения находятся точно по методу работы /2/ путем сведения к нелинейной краевой задаче для аналитической функции. Приближенная система имеет бесконечное множество решений, из которых рассматривается лишь трехпараметрическое семейство решений, зависящих, при фиксированном Ω_r, от параметров

$$c_i = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} G_i(\Omega')\,d\Omega' > 0,$$

выбираемых произвольно. При малых c решения приближенной системы дают малые невязки (порядка c^2) при подстановке в исходную систему. Для того, чтобы вычислить эти решения, необходимо вычислить сингулярный интеграл

$$I(\Omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1-\Omega'}{2-\Omega_r-\Omega}\sqrt{\frac{1+\Omega'}{3-\Omega'}}\,\frac{d\Omega'}{\Omega'-\Omega}, \quad \Omega \subset [-1, 1].$$

Материал в первых двух главах диссертации дает представление о характере задач, где для нахождения решения требуется вычислять сингулярные интегралы. Следующие две главы – третья и четвертая – непосредственно посвящены вычислению сингулярных интегралов. При этом постановка задачи сознательно сужается тем, что, во-первых, в качестве контура интегрирования выбирается отрезок действительной оси [-1,1] и, во-вторых, рассматривается не обширное множество различных способов вычисления сингулярных интегралов, а лишь несколько способов, объединенных следующей общей идеей: приближенная формула для сингулярного интеграла получается путем аппроксимации регулярной части подынтегральной функции (без ядра, имеющего особенность) и последующего вычисления сингулярного интеграла в явном виде. На этом пути получается ряд весьма эффективных формул, в том числе – формулы наивысшей алгебраической точности (аналогичные формулам Гаусса для обычных интегралов).

Заменяя в сингулярном интеграле с ядром Коши

$$\phi(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,dx}{x-y}, \quad y \subset [-1, 1], \quad f(-1) = f(1) = 0$$

функцию $f(x)$ кусочно-линейной (так же, как это делается при вычислении обычного интеграла по формуле трапеций) и вычисляя затем точно сингулярный интеграл, можно получить следующую квадратурную формулу – аналог формулы трапеций:

$$\phi\left(-1+\frac{2\ell}{n}\right) \approx \sum_{k=1}^{n-1} \bar{a}_{k-\ell}\, f\left(-1+\frac{2k}{n}\right),$$

где обозначено

$$\bar{a}_0 = 0; \quad \bar{a}_p = \frac{1}{\pi}[(p+1)\ln|p+1| - 2p\ln|p| + (p-1)\ln|p-1|]; \quad p = \pm1, \pm2, \dots, \pm(n-1).$$

Подобно ядру Коши, являющемуся функцией разности аргументов $x-y$, коэффициент $\bar{a}_{k-\ell}$ приведенной выше квадратурной формулы является функцией разности индексов $k-\ell$.

Дается оценка сверху точности квадратурной формулы. Если $f(x) \subset H^\alpha$ (удовлетворяет условию Гельдера с показателем α), то эта оценка при $h = \frac{2}{n} \to 0$ стремится к нулю как $h^\alpha \ln\frac{1}{h}$. При $f'(x) \subset H^\alpha$ порядок оценки $\sim h^{\alpha+1}\ln\frac{1}{h}$.

Получена также квадратурная формула, более точная для гладких функций – аналог формулы Симпсона. Предложена более точная, чем аналог формулы трапеций, квадратурная формула для вычисления сингулярного интеграла от функции, имеющей степенную асимптотику на концах отрезка.

В четвертой главе для сингулярного интеграла с ядром Гильберта

$$\phi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{ctg}\,\frac{x-y}{2}\,dx$$

получена квадратурная формула

$$\phi(y) \approx \tilde{\tilde{\phi}}(y) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N-1} f\left(\frac{\pi m}{N}\right)\sin\frac{N-1}{2}\left(\frac{\pi m}{N}-y\right)\sin\frac{N}{2}\left(\frac{\pi m}{N}-y\right)\mathrm{cosec}\,\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi m}{N}-y\right), \tag{1}$$

точная для тригонометрических полиномов $N-1$-го порядка. О точности ее для произвольной функции $f(x)$ дают представление следующие теоремы:

Теорема 4.2.1. Если ряд Фурье подынтегральной функции $f(x)$ абсолютно сходится, то приближенное значение сингулярного интеграла с ядром Гильберта, вычисленное по квадратурной формуле (2), сходится к точному значению при безграничном увеличении числа узлов. Для остаточного члена имеет место оценка сверху через коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$|\tilde{\phi}(y)-\phi(y)|<2\sum_{i=N}^{\infty}(|b_i|+|a_i|).$$

Теорема 4.2.2. Если $f(x)$ –нечетная функция, а ее коэффициенты Фурье b_i положительны и монотонно убывают с ростом i, то имеет место оценка снизу

$$|\tilde{\phi}(0)-\phi(0)|>\sum_{i=N}^{\infty}|b_i|.$$

При специальном выборе узлов y из формулы (1) получаются квадратурные формулы, точные для тригонометрических полиномов $N-1$ -го порядка, использующие только N узлов вместо $2N$ в (1) при произвольном y:

$$\tilde{\phi}_{2\ell}=\sum_{m=0}^{N-1} f_{2m+1}c_{2(m-\ell)+1},\quad \ell=0,1,\dots,N-1,$$

$$\tilde{\phi}_{2\ell+1}=\sum_{m=0}^{N-1} f_{2m}c_{2(m-\ell)-1},\quad \ell=0,1,\dots,N-1,$$

где обозначено

$$f_m=f\left(\frac{\pi m}{N}\right),\quad \tilde{\phi}_\ell=\tilde{\phi}\left(\frac{\pi\ell}{N}\right),\quad c_p=\frac{1-(-1)^p}{2N}\operatorname{ctg}\frac{\pi p}{2N}.$$

Для сингулярного интеграла с ядром Коши

$$\phi(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,d\alpha(x)}{x-y},$$

где $\alpha(x)$ –неубывающая функция, отличная от константы, получена квадратурная формула

$$\phi(y)\approx\tilde{\phi}(y)=-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n+1}\frac{f(x_m)}{p'_{n+1}(x_m)}\,\frac{q_{n+1}(x_m)-q_{n+1}(y)}{x_m-y},\qquad (2)$$

точная, когда $f(x)$ –алгебраический полином n-й степени. В этой формуле $p_{n+1}(y)$ – $n+1$ -й полином из системы ортонормированных с распределением $d\alpha(x)$ полиномов; x_m– корни этого полинома, $q_{n+1}(y)$ $-n+1$ -я функция второго рода. Получены оценки сверху для остаточного члена квадратурной формулы (2).

При специальном выборе узлов $y=y^*$ в нулях функции второго рода ($q_{n+1}(y^*)=0$) квадратурная формула упрощается

$$\tilde{\phi}(y^*)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n+1}\lambda_m^{(n+1)}\frac{f(x_m)}{x_m-y^*}\qquad (3)$$

и становится точной для алгебраических многочленов $2n+2$ -й степени; для непрерывно дифференцируемой подынтегральной функции $f(x)$ получена следующая оценка остаточного члена

$$|\tilde{\phi}(y^*)-\phi(y^*)|<\frac{2}{\pi}[\alpha(1)-\alpha(-1)]\,E^{(1)}_{2n+1},$$

где $E^{(1)}_{2n+1}$ – наилучшее приближение $f'(x)$ полиномом $2n+1$ -го порядка. Для $f(x)$, имеющей непрерывную $2n+3$ -ю производную, получено выражение остаточного члена, аналогичное остаточному члену квадратурной формулы Гаусса для обычного интеграла:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,d\alpha(x)}{x-y^*}-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n+1}\lambda_m^{(n+1)}\frac{f(x_m)}{x_m-y^*}=\frac{1}{\pi}\,\frac{f^{(2n+3)}(\zeta)}{(2n+3)!\,k^2_{n+1}},\quad \zeta\subset[-1,1];$$

k_{n+1} – коэффициент при x^{n+1} полинома $p_{n+1}(x)$.

Рассмотрен вопрос о расположении нулей функции второго рода $q_{n+1}(y)$. Показано, что между двумя соседними нулями полинома $p_{n+1}(x)$ есть по крайней мере один нуль функции второго рода.

Пятая глава диссертации посвящена применению квадратурных формул для сингулярных интегралов к численному нахождению решений нелинейного сингулярного интегрального уравнения

$$\cos\delta(y)\,\sin\delta(y)-\frac{k(y)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2\delta(x)}{k(x)}\,\frac{dx}{x-y}=f(y)\qquad (4)$$

с неизвестной функцией $\delta(y)$. Если известно некоторое решение $\bar{\delta}(y)$ этого уравнения, такое, что $\bar{\delta}(1)-\bar{\delta}(-1)=\pi n$, $n>0$, n целое, то доказано, что в этом случае уравнение (4) имеет $2n$ – параметрическое семейство решений в окрестности $\bar{\delta}(y)$.

Для доказательства существования этих решений, а также для их численного нахождения уравнения (4) преобразуется путем применения формулы для решения линейного характеристического сингулярного интегрального уравнения. Рассмотрен частный случай $k(x)=\sqrt{1-x^2}$; для вычисления сингулярных интегралов использованы квадратурные формулы высокой алгебраической точности с функциями распределения $d\alpha(x)=(1-x^2)^{\pm 1/2}dx$.

Шестая глава посвящена оценкам решений линейных разностных и дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, стремящимися к постоянным пределам. Разностному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами, стремящимися к постоянным пределам, удовлетворяют, например, многочлены Якоби, ортогональные с весом $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$; тому же уравнению, но с другими начальными условиями, удовлетворяют и соответствующие функции второго рода. Это разностное уравнение позволяет находить $p_{n+1}(x)$ по двум предыдущим значениям – $p_n(x)$ и $p_{n-1}(x)$ – и является удобным средством вычисления многочленов Якоби (а также функций второго рода) – особенно при использовании вычислительных машин. Проведен анализ погрешности, возникающей при вычислении многочленов Якоби по рекуррентной формуле и получены неулучшаемые по порядку n оценки этой погрешности. Метод получения оценок основан на преобразовании разностного уравнения к некоторому специальному виду. Такое преобразование естественным образом обобщается для линейных разностных уравнений k-го порядка с переменными коэффициентами. Доказана следующая

Теорема 6.2.2. Пусть любое решение предельного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=0}^{k} A_j v_{n+j} = f_{n+k}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

оценивается сверху величиной

$$|v_\ell| \leq c\, T_\ell, \quad \ell = 0,1,\ldots,$$

такой, что

$$\frac{T_{\ell+1}}{T_\ell} \geq \left(\frac{\ell+2}{\ell+1}\right)^{\bar\nu} |\bar\lambda|, \qquad \ell = 0,1,\ldots,$$

где $\bar\lambda$ – тот из наибольших по модулю корней характеристического уравнения

$$\sum_{j=0}^{k} A_j \lambda^j = 0,$$

который имеет еще и наибольшую кратность $\bar\nu + 1$. Если коэффициенты разностного уравнения

$$\sum_{j=0}^{k} (A_j + a_{j,n+j})\, z_{n+j} = f_{n+k}$$

при $n \to \infty$ стремятся к постоянным пределам столь быстро, что ряды

$$\sum_{\ell=j}^{\infty} |a_{j,\ell+j}|\, (\ell+1)^{\bar\nu}, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1$$

сходятся, то для любого решения z_ℓ этого уравнения отношение $\frac{|z_\ell|}{T_\ell}$ остается ограниченным при $\ell \to \infty$.

Аналогичные результаты получены для дифференциальных уравнений. Доказана следующая

Теорема 6.3.1. Пусть любое решение предельного неоднородного уравнения

$$\sum_{j=0}^{k} A_j v^{(j)}(x) = f(x), \qquad 0 \leq x < \infty$$

непрерывно и оценивается сверху величиной

$$|v(x)| \leq c\, T(x), \quad x \geq 0$$

такой, что для нее выполнено неравенство

$$\frac{T(x)}{T(\xi)} \geq \frac{(x+1)^{\bar r}\, e^{\bar\alpha x}}{(\xi+1)^{\bar r}\, e^{\bar\alpha \xi}} \qquad x \geq \xi \geq 0,$$

где $\bar\mu = \bar\alpha + i\bar\beta$ – тот из корней характеристического уравнения

$$\sum_{j=0}^{k} A_j \mu^j = 0,$$

который, имея наибольшую действительную часть $\bar\alpha$, имеет еще и наибольшую кратность $\bar r + 1$. Если коэффициенты дифференциального уравнения

$$\sum_{j=0}^{k} [(A_j + a_j(x))\, z(x)]^{(j)} = f(x), \quad x \geq 0, \quad a_k(x) \equiv 0, \quad A_k = 1$$

при $x \to \infty$ стремятся к постоянным пределам столь быстро, что интегралы

$$\int_0^\infty |a_j(\xi)|\, (\xi+1)^{\bar r}\, d\xi, \qquad j = 0,1,\ldots,k-1$$

сходятся, то для любого решения $z(x)$ этого уравнения отношение $\frac{|z(x)|}{T(x)}$ остается ограниченным при $x \to \infty$.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

К.М.Железнова, А.А.Корнейчук, А.С.Марков. Приближенное вычисление сингулярных интегралов. В сб. "Материалы совещания по математическим методам решения задач ядерной физики". Препринт ОИЯИ 2005, Дубна 1965, стр. 38-40.

А.А. Корнейчук. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. В сб. "Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы". Изд-во "Наука", 1964, 64-74; препринт ОИЯИ Р-1317, Дубна 1963.

А.А.Корнейчук, А.С. Марков, Ом Сан Ха. Вычисление многочленов Якоби. Препринт ОИЯИ 1733, Дубна 1964.

А.А. Корнейчук. Оценки решений линейных резностных и дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Препринт ОИЯИ, 1872 Дубна 1964.

А.А. Корнейчук, А.С. Марков, Ом Сан Ха. О решениях линейных разностных и дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В сб. "Материалы Совещания по математическим методам решения задач ядерной физики". Препринт ОИЯИ 2005, Дубна 1965, стр. 33-37.

Л и т е р а т у р а

1. А.В. Ефремов, Чжу Хун-юань, Д.В. Ширков. Пион-пионное рассеяние при низких энергиях. Препринт ОИЯИ Д-757, Дубна 1961.

2. L.Castillejo, R.H.Dalitz, F.J.Dyson. Low's Scattering Equations for the Charged and Neutral Scalar Theories. Phys. Rev., 101, 1, 1956, p.p. 453-458.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 апреля 1965 года.