

© 15a
Б-955

17/IV 65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2028



И.Быстрицкий, Ф.Легар

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МАКСИМУМА
ПРАВДОПОДОБИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ
ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ
ИСКРОВЫХ КАМЕР

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1965

2028

И.Быстрицкий, Ф.Легар

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МАКСИМУМА
ПРАВДОПОДОБИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ
ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ
ИСКРОВЫХ КАМЕР

Направлено в журнал "Ядерная физика"

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

2104/3 48

В в е д е н и е

Искровые камеры весьма удобно применять для регистрации редких событий. В связи с этим уже несколько лет искровые камеры с успехом используются в сложных установках для измерения параметров двойных и тройных рассеяний поляризованных частиц. Они выгодны тем, что: 1) являются управляемыми приборами; 2) могут регистрировать редкие события при наличии довольно большого фона, который можно легко исключить при обработке; 3) регистрируют частицы под большим телесным углом.

Рассмотрим многопластинчатую искровую камеру, которая не находится в магнитном поле и внутри которой помещены один или несколько рассеивателей. При рассеянии заряженных частиц внутри камеры мы измеряем проекции угла рассеяния и пространственные координаты точки, в которой произошло рассеяние.

После предварительной обработки всех данных мы получим для каждого случая рассеяния совокупность угловых и пространственных координат $(x_1, \dots, x_q) = x$, полностью характеризующих этот случай. Способ предварительной обработки данных, полученных из измерений, например, учет геометрии эксперимента, для нас не существен. Будем только предполагать, что имеется большое количество случаев. Наша же задача из большого количества случаев, каждый из которых описывается координатами $x^i = (x_1^i, \dots, x_q^i)$, найти $a^* = (a_1^*, \dots, a_m^*)$ — оценки параметров $a = (a_1, \dots, a_m)$, которые характеризуют изучаемое явление и их ошибки σ_a . Так, например, в случае рассеяния нуклонов на нуклонах речь идет об определении таких величин, как поляризация, параметры тройного рассеяния, коэффициенты спиновых корреляций и т.д. Оказывается, что наилучшую оценку с точки зрения минимума σ_a можно получить, если экспериментальные данные обрабатывать методом максимума правдоподобия, который подробно рассмотрен в работах ^{1,2,3/}. В настоящей работе использован метод максимума правдоподобия для обработки результатов поляризационных измерений с помощью искровых камер.

2. Метод максимума правдоподобия

Предположим, что все измеренные случаи x^i статистически независимы. В случае обработки данных с искровых камер это требование выполнено, так как каждый отдельный вызывается отдельной первичной частицей. Все такие частицы взаимно независимы. Статистическое распределение случаев x^i описывается функцией распределения $p(a, x)$. Вероятность получения случая x в элементе объема dV при заданных a равна значению функции $p(a, x) dV$. Вероятность получения n независимых случаев x^i в объемах dV_i ($i=1, \dots, n$) равна произведению

$$dP = -L(a) dV_1 \dots dV_n, \quad (2.1)$$

где функция правдоподобия

$$L(a) = \prod_{i=1}^n p(a, x^i). \quad (2.2)$$

Наиболее вероятными значениями величин a являются такие их значения $a^* = (a_1^*, \dots, a_m^*)$, при которых функция $L(a)$ достигает своего максимума. Совокупность этих значений параметров называем максимально вероятным решением.

При $n \rightarrow \infty$ функция правдоподобия $L(a)$ будет близка к гауссовскому распределению $1/2$. Крамер доказал $1/1$, что в пределе $n \rightarrow \infty$ $a^* \rightarrow a$, где a - истинные величины, и что не существует другого более точного метода оценки. Из предыдущего видно, что метод максимума правдоподобия можно применять только в тех случаях, когда имеется большое количество экспериментальных данных, что и было оговорено нами с самого начала. Мерой точности определения a^* является среднеквадратичное отклонение σ_a , которое в случае одного параметра имеет вид:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\int (a-a^*)^2 L(a) da}{\int L(a) da}}. \quad (2.3)$$

Это имеет место также в случае нескольких параметров, ошибки которых взаимно некоррелированы^x). Эквивалентной мерой точности является матрица ошибок N^{-1} , где матричные элементы N_{ij} даны выражениями:

$$N_{ij} = - \frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial a_j} \Big|_{a=a^*} \quad (2.4)$$

$$W(a) = - \ln L(a). \quad (2.5)$$

Ошибки параметров являются квадратичными корнями из диагональных элементов матрицы ошибок. Для процесса поиска максимума функции $L(a)$ удобнее пользоваться функцией $W(a)$ (2.5), максимум которой находится также в точке a^* . Поиск максимума функции $W(a)$ можно осуществить разными способами, разработанными в области вычислительной математики. Оказалось, что удобным методом для нахождения максимума функции правдоподобия и ошибок параметров является метод линейаризации^{14/}, который и был использован в настоящей работе.

3. Метод линейаризации и его применение

Метод линейаризации для нахождения минимума функционала построен Соколовым и Силиным^{14/} для функционалов вида $M\{y(a, x)\}$, где от искомых параметров a

^x) Для нескольких параметров, ошибки которых коррелированы, можно получить аналогичные формулы, содержащие кратные интегралы. Такие формулы являются слишком громоздкими, и поэтому мы здесь их не приводим.

зависит только функциональный аргумент $y(a, x)$. Идеальным для применения этого метода является квадратичный функционал вида:

$$M = \sum_{i=1}^n w_i \{ y(a, x^i) - t_i \}^2, \quad (3.1)$$

где t_i - константы и w_i - их удельные веса.

Если обозначить через G матрицу с элементами

$$G_{kl} = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial y_i}{\partial a_k} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial a_l}, \quad (3.2)$$

то шаг, который приводит к уменьшению функционала, согласно методу линейаризации пропорционален вектору

$$\psi_i = \sum_j w_j y_j \frac{\partial y_j}{\partial a_i}. \quad (3.3)$$

Кроме того, матрица ошибок N^{-1} найденных параметров хорошо аппроксимируется матрицей G^{-1} . В случае аппроксимации экспериментальных данных некоторой теоретической зависимостью функционал (3.1) имеет вид

$$M = \sum_{i=1}^n w_i \{ \phi(a, x^i) - F_i \}^2, \quad (3.1a)$$

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (3.1b)$$

где $\phi(a, x^i)$ - функция, аппроксимирующая экспериментальные данные, x^i - координаты точек, в которых произведено измерение, F_i - экспериментальные значения измеренных величин, σ_i - ошибки измерений.

Однако в нашем случае мы поступим несколько иначе. Введем следующие обозначения:

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad (3.4)$$

$$y_i = \sqrt{-2 \ln \frac{p_i}{p}}, \quad (3.5)$$

где p - такая константа, что

$$\frac{p_i}{p} < 1 \quad (i=1, \dots, n).$$

Если подставить в \bar{M} значение y_i , мы получаем

$$\bar{M} = - \sum_{i=1}^n 2 \ln p_i + 2n \ln p = -2W(a) + 2n \ln p. \quad (3.6)$$

Функция \bar{M} , являющаяся квадратичным функционалом, достигает своего минимума в такой точке a^* , в которой функция $W(a)$ (2.5) достигает минимума. Константа $2n \ln p$ (3.6) можно опустить - это на положение минимума не влияет.

Итак, мы ищем минимум функционала

Максим

$$dP = L(a) dV_1 \dots dV_n, \quad (2.1)$$

где функция правдоподобия

$$L(a) = \prod_{i=1}^n p(a, x^i). \quad (2.2)$$

Наиболее вероятными значениями величин a являются такие их значения $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$, при которых функция $L(a)$ достигает своего максимума. Совокупность этих значений параметров называем максимально вероятным решением.

При $n \rightarrow \infty$ функция правдоподобия $L(a)$ будет близка к гауссовскому распределению^{/1,2/}. Крамер доказал^{/1/}, что в пределе $n \rightarrow \infty$ $a^* \rightarrow a$, где a - истинные величины, и что не существует другого более точного метода оценки. Из предыдущего видно, что метод максимума правдоподобия можно применять только в тех случаях, когда имеется большое количество экспериментальных данных, что и было оговорено нами с самого начала. Мерой точности определения a^* является среднеквадратичное отклонение σ_a , которое в случае одного параметра имеет вид:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\int (a-a^*)^2 L(a) da}{\int L(a) da}}. \quad (2.3)$$

Это имеет место также в случае нескольких параметров, ошибки которых взаимно некоррелированы^{x)}. Эквивалентной мерой точности является матрица ошибок N^{-1} , где матричные элементы N_{ij} даны выражениями:

$$N_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial a_i \partial a_j} \Big|_{a=a^*} \quad (2.4)$$

$$W(a) = -\ln L(a). \quad (2.5)$$

Ошибки параметров являются квадратичными корнями из диагональных элементов матрицы ошибок. Для процесса поиска максимума функции $L(a)$ удобнее пользоваться функцией $W(a)$ (2.5), максимум которой находится также в точке a^* . Поиск максимума функции $W(a)$ можно осуществить разными способами, разработанными в области вычислительной математики. Оказалось, что удобным методом для нахождения максимума функции правдоподобия и ошибок параметров является метод линеаризации^{/4/}, который и был использован в настоящей работе.

3. Метод линеаризации и его применение

Метод линеаризации для нахождения минимума функционала построен Соколовым и Силиным^{/4/} для функционалов вида $M\{y(a, x)\}$, где от искомых параметров a

^{x)} Для нескольких параметров, ошибки которых коррелированы, можно получить аналогичные формулы, содержащие кратные интегралы. Такие формулы являются слишком громоздкими, и поэтому мы здесь их не приводим.

зависит только функциональный аргумент $y(a, x)$. Идеальным для применения этого метода является квадратичный функционал вида:

$$M = \sum_{i=1}^n w_i \{y(a, x^i) - t_i\}^2, \quad (3.1)$$

где t_i - константы и w_i - их удельные веса.

Если обозначить через G матрицу с элементами

$$G_{kl} = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial y_i}{\partial a_k} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial a_l}, \quad (3.2)$$

то шаг, который приводит к уменьшению функционала, согласно методу линеаризации пропорционален вектору

$$\psi_i = \sum_j w_j y_j \frac{\partial y_j}{\partial a_i}. \quad (3.3)$$

Кроме того, матрица ошибок N^{-1} найденных параметров хорошо аппроксимируется матрицей G^{-1} . В случае аппроксимации экспериментальных данных некоторой теоретической зависимостью функционал (3.1) имеет вид

$$M = \sum_{i=1}^n w_i \{ \phi(a, x^i) - F_i \}^2, \quad (3.1a)$$

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (3.16)$$

где $\phi(a, x^i)$ - функция, аппроксимирующая экспериментальные данные, x^i - координаты точек, в которых произведено измерение, F_i - экспериментальные значения измеряемых величин, σ_i - ошибки измерений.

Однако в нашем случае мы поступим несколько иначе. Введем следующие обозначения:

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad (3.4)$$

$$y_i = \sqrt{-2 \ln \frac{p_i}{p}}, \quad (3.5)$$

где p - такая константа, что

$$\frac{p_i}{p} \leq 1 \quad (i=1, \dots, n).$$

Если подставить в \bar{M} значение y_i , мы получаем

$$\bar{M} = - \sum_{i=1}^n 2 \ln p_i + 2n \ln p = -2W(a) + 2n \ln p. \quad (3.6)$$

Функция \bar{M} , являющаяся квадратичным функционалом, достигает своего минимума в такой точке a^* , в которой функция $W(a)$ (2.5) достигает минимума. Константу $2n \ln p$ (3.6) можно опустить - это на положение минимума не влияет.

Итак, мы ищем минимум функционала

Максимум

$$M = -2 \sum_{i=1}^n \ln p_i = -2 W(a). \quad (3.7)$$

По формуле (3.2) можно теперь вычислить элементы матрицы (для функционала (3.4) $t_i = 0, w_i = 1$)

$$G_{kl} = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i^2} \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \frac{\partial p_i}{\partial a_l}. \quad (3.8)$$

Матрица G^{-1} является матрицей ошибок оценок параметров a^* . Помимо параметров a_1, \dots, a_m , функция распределения $p(a, x)$ в общем случае зависит еще от r параметров a_{m+1}, \dots, a_{m+r} , которые известны заранее из других t экспериментов. Нашей задачей является учет влияния этих дополнительных параметров (и их ошибок) на искомые параметры (a_1, \dots, a_m) . В некоторых случаях возможно также уточнение параметров $(a_{m+1}, \dots, a_{m+r})$ на основе числового материала, полученного для определения параметров (a_1, \dots, a_m) . Предположим, что все дополнительные r параметров не зависят от координат $x = (x_1, \dots, x_q)$. Таким образом, r дополнительных параметров можно разделить по группам

$$a_{m+1, j-1+k}, \dots, a_{m+1, j} \quad (j=1, \dots, t, i_0=0, i_t=r), \quad (3.9)$$

каждая из которых содержит параметры, полученные из отдельного j -го эксперимента. j -ый эксперимент описывается совокупностью s_j экспериментальных точек

$$(F_{jk}, \sigma_{jk}, z_{jk}), \quad (3.10)$$

где F_{jk} - экспериментальное значение, σ_{jk} - ошибка и z_{jk} - вектор координат k -той точки ($k=1, \dots, s_j$), соответствующий j -тому эксперименту. В число координат z_{jk} могут входить некоторые из координат x_1, \dots, x_q . Пусть зависимость экспериментальных значений F_{jk} (с ошибками σ_{jk}) от координат z_j наилучшим образом, при помощи метода наименьших квадратов, аппроксимируется функцией ϕ_j . Коэффициенты разложения A_{jk} этой функции $\phi_j = \phi_j(A_{jk}, z_j)$ и являются дополнительными параметрами, полученными из j -го эксперимента, т.е.

$$a_{m+1, j-1+k} = A_{jk}. \quad (3.11)$$

В частном случае, когда неизвестны экспериментальные точки, которые аппроксимируются функцией ϕ_j , а известны только коэффициенты разложения этой функции, можно для j -го эксперимента в качестве экспериментальных значений F_{jk} принять значения

x)

В противном случае надо параметры, не удовлетворяющие этому предположению, аппроксимировать функцией, содержащей только такие параметры, которые не зависят от координат x . Это можно сделать, например, при помощи метода наименьших квадратов.

A_{jk} коэффициентов разложения и в качестве σ_{jk} - ошибки ΔA_{jk} этих коэффициентов. Т.е. в этом случае

$$a_{m+1, j-1+k} = F_{jk} = A_{jk}.$$

Функционал M (3.7) заменим теперь функционалом

$$M_1 = M + \sum_{j=1}^t \sum_{k=1}^{s_j} \frac{[\phi_j(z_{jk}) - F_{jk}]^2}{\sigma_{jk}^2}. \quad (3.12)$$

Если предположим, что значения параметров a_{m+1}, \dots, a_{m+r} не меняются, то M_1 отличается от M только на константу (двойная сумма в (3.12) не зависит от a_1, \dots, a_m), и поэтому M_1 достигает минимума в точке a^* . Составив матрицу G (3.2) уже для всех параметров a_1, \dots, a_{m+r} , находим матрицу ошибок G^{-1} , в которой учтены также ошибки и корреляции ошибок дополнительных параметров.

Однако в общем случае более правильным методом определения искомых параметров является следующий прием. При поиске минимума функционала M_1 мы считаем все параметры a_{m+1}, \dots, a_{m+r} переменными. Таким образом, учитываем влияние числового материала, полученного для определения a_1, \dots, a_m также и на параметры a_{m+1}, \dots, a_{m+r} . Целесообразно сначала находить минимум только по параметрам a_1, \dots, a_m , как это делалось раньше, а затем уточнить полученный результат, варьируя все параметры a_1, \dots, a_{m+r} .

Значения тех дополнительных параметров, которые были раньше определены правильно, при уточнении не меняются. Для этого, конечно, необходимо учесть влияние всех экспериментов, при помощи которых эти параметры были определены. В противном случае оценка такого параметра может ухудшиться.

Допустимым изменением параметра мы можем считать изменение его значения в пределах двух ошибок. При сдвиге больше чем на две ошибки необходимо учесть весь числовой материал или фиксировать параметр заранее известным значением и учесть только влияние его ошибки.

Если j -я группа параметров (3.9) получена из j -го эксперимента методом максимума правдоподобия, то правильнее учитывать влияние параметров j -го эксперимента, составив общую функцию правдоподобия j -го эксперимента и эксперимента для определения параметров a_1, \dots, a_m . Это эквивалентно замене суммы

$$\sum_{k=1}^{s_j} \frac{[\phi_j(z_{jk}) - F_{jk}]^2}{\sigma_{jk}^2} \quad (3.13)$$

из функционала M_1 (3.12) на функционал типа (3.7), составленный для j -го эксперимента. При этом сильно увеличивается количество обрабатываемого числового материала и чаще приходится искать минимум функционала M_1 (3.12).

4. Общая схема программы

В Вычислительном центре ОИИИ было решено несколько задач /5,6/, относящихся к рассматриваемой проблеме. В дальнейшем объяснении мы будем приводить некоторые данные, относящиеся к машине М-20 и программам, составленным для этой машины в ВЦ ОИИИ. Однако сам метод можно использовать и для других машин. По предложению И.Н.Силина для решения рассмотренной задачи был использован уже имеющийся в библиотеке стандартных программ СП-123 метод наименьших квадратов (МНК). Аналогичная программа составлена в ВЦ ОИИИ также для счетной машины „Минск-2“. СП-123 надо использовать несколько нестандартным образом, как будет показано дальше.

Программа СП-123 находит минимум квадратичного функционала (3.1). Для работы с СП-123 надо задавать a_0 — начальное значение параметров a и совокупность экспериментальных точек (F_i, q, x^i) ($i=1, \dots, n$). Кроме обращения к СП-123, надо составить программу, называемую „арифметическая часть МНК“, которая обеспечивает вычисление функции $y(a, x)$ и производных $\frac{\partial y(a, x)}{\partial a_j}$ по отдельным параметрам при заданных значениях параметров a и координат x . В дальнейшем мы будем обозначать $A_{сп}$ первый адрес программы СП-123 в оперативной памяти счетной машины.

Роль параметров для МНК играют в нашем случае параметры a_1, \dots, a_{m+r} из гл. 3. Начальные значения параметров a_1, \dots, a_m надо задавать, исходя из физических соображений, начальные значения параметров a_{m+1}, \dots, a_{m+r} известны из других экспериментов. В качестве экспериментальных точек МНК мы берем точки (3.10)

$$t_{jk} = (F_{jk}, \sigma_{jk}, z_{jk}) \quad (j=1, \dots, t, k=1, \dots, s_j) \quad (4.1)$$

и точку t_0 , ее экспериментальное значение F_0 — любое, ошибка $\sigma_0 \neq 0$, координата z_0 — условная (обычно $F_0=0, z_0=1$). Арифметическая часть МНК делится на $(t+1)$ часть, причем j -тая часть соответствует группе точек t_{jk} ($k=1, \dots, s_j$) и j -му эксперименту. Из всех арифметических частей является основной та часть, которая соответствует точке t_0 . В этой части вычисляется значение функции M (3.7) и ее производные. Значения M нельзя, однако, указывать в качестве значения функции для МНК, т.к. в таком случае мы находили бы минимум функции $\frac{(F_0 - M)^2}{\sigma_0^2}$, а не самого M . Поэтому значение функции M и ее производных добавляется прямо в рабочие ячейки МНК, где находится сумма M (3.1) и ее производные $\frac{\partial M}{\partial a_i}$. Соответственно исправляется также значение матрицы G . Для этого целесообразно использовать программу СП-123 (накопление матрицы Грамма), причем две последние строки обращения к ней совпадают с соответствующими строками обращения внутри СП-123, которые находятся в ячейках $A_{сп} + 211$ и $A_{сп} + 212$. Если указать в качестве значения функции и ее производных для СП-113 соответственно значения

$p_i = p(a, x^i), \partial p_i / \partial a_1, \dots, \partial p_i / \partial a_{m+r}$ и в качестве веса значение $1/p_i^2$, то СП-113 добавляет к производным $\partial M / \partial a_k$ значение

$$\frac{1}{p_i^2} \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \quad (k=1, \dots, m+r)$$

и к матрице G — матрицу

$$\left\| \frac{1}{p_i^2} \frac{\partial p_i}{\partial a_j} \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \right\|,$$

что соответствует нашим требованиям. Однако СП-113 „портит“ сумму M , так как к ней добавляет значение p_i вместо нужного $-2\Delta p_i$. Поэтому надо в начале арифметической части, соответствующей точке t_0 , заменить значение M (находящееся в МНК в ячейке $A_{сп} + 0020$) в отдельной рабочей ячейке и уже в эту ячейку добавлять $-2\Delta p_i$. Таким образом, мы к СП-113 обращаемся в раз, перебирая все случаи x^i ($i=1, \dots, n$).

Кроме того, в рассматриваемой арифметической части надо заменить команду 03 из СП-123, находящуюся в ячейке $A_{сп} + 0061$ на команду 02, так как в нашем случае величина M может быть также отрицательной.

Наконец, в качестве значения функции $y(a, x)$ и ее производных для МНК зачисляются $F=0$ и нули. Остальные t арифметических частей имеют общие черты. В j -той части ($j=1, \dots, t$) мы в качестве функции y и ее производных вычисляем значение функции ϕ_j вместе с ее производными, как это в МНК обычно делается.

К программе СП-123 мы в первый раз обращаемся, варьируя только параметры a_1, \dots, a_m . После нахождения минимума a^* мы можем варьировать также те из параметров a_{m+1}, \dots, a_{m+r} , для которых мы использовали весь их экспериментальный материал. Затем, чтобы учесть влияние ошибок всех остальных параметров, мы обращаемся снова к МНК, варьируя все параметры a_1, \dots, a_{m+r} . На этот раз нас интересует только результат нулевой итерации, т.е. значения всех параметров остаются прежними и мы находим только общую матрицу ошибок.

5. Пример

В качестве примера будем искать поляризацию $a_1 = P_{p,n}$ и параметр тройного рассеяния $a_2 = R_{p,n}$ на основе числового материала, полученного из измерений с искровыми камерами /6/, i -ый случай описывается четырьмя координатами:

$$x^i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i) \quad (x_1^i = \sin \phi_1, x_2^i = \cos \phi_1, x_3^i = \sin \theta_1, x_4^i = \cos \theta_1).$$

Функция распределения задана следующей формулой:

$$p_i = p(P_{p,n}, R_{p,n}, P_1, P_3(\theta_1), \sin \phi_1, \cos \phi_1) = (1 + P_{p,n} P_3(\theta_1) \cos \phi_1 - P_1 P_3(\theta_1) R_{p,n} \sin \phi_1). \quad (5.1)$$

В качестве дополнительных параметров выступают P_1 и $P_3(\theta_1)$. Величина $P_1 = -0,43 \pm 0,03$ /7/ есть поляризация первичного пучка и не зависит от координат x .

$P_3(\theta)$ — есть анализирующая способность, которая зависит от x и поэтому была разложена в ряд:

$$P_3(\theta) = \sin \theta \sum_{k=0}^2 A_k \cos^k \theta, \quad (5.2)$$

где A_k — коэффициенты разложения, не зависящие от x . Для $P_3(\theta)$ известно 11 экспериментальных точек, на основе которых были получены коэффициенты A_k при помощи метода наименьших квадратов [8].

Таким образом, мы получаем две группы дополнительных параметров. Первая группа содержит единственный параметр $a_3 = P_1$, а числовой материал задан одной точкой ($\xi_{11} = 0,43$, $\sigma_{11} = 0,03$). Вторая группа содержит четыре параметра: $a_4 = A_0$, $a_5 = A_1$, $a_6 = A_2$, $a_7 = A_3$. Этой группе соответствует 11 выше указанных экспериментальных точек. Каждая экспериментальная точка задана, кроме значения F и ошибки σ , еще двумя координатами. Первая задает условное число эксперимента ($t = 0,1,2$), вторая важна только для второго эксперимента и имеет значение угла θ .

Программа для электронной счетной машины была составлена следующим образом: координаты x^i заранее записаны на магнитной ленте по зонам, начиная с четвертой зоны. В начале каждой зоны помещена информация о числе случаев в зоне. В третьей зоне хранится информация о числе всех занятых зон. Значение функции y и ее производных для МНК, и также для СП-113, помещается в ячейке 0700, ... 0,707. Программа использует ДЗУ1 для кода управления МНК, ДЗУ2 — для шкалы фиксации параметров и ДЗУ3 — для точности определения параметров (см. стр. 12-14).

Блок-схема программы показана на рисунке.

Аналогичным образом можно получить оценки всех параметров, которые характеризуют рассеяния частиц ядрами или атомами.

В заключение авторы выражают свою благодарность И.К.Взорову, Ю.М.Казаринову, Г.А.Ососкову и И.Н.Силину за ценные замечания и обсуждения работы.

Л и т е р а т у р а

1. Н.С.Крэммер. *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, 1946.
2. Русский перевод: Г.Крэммер. *Математические методы статистики*. Гос. изд. иностр. лит., Москва, 1948.
3. Н.П.Клепиков, С.Н.Соколов. *Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия*. Москва, "Наука", 1984.
4. Д.Орир. Препринт ОИЯИ, R-292, Дубна, 1959.
5. С.М.Соколов, И.Н.Силин. Препринт ОИЯИ, Д-810, Дубна, 1981.
6. И.Быстрицкий, Б.М.Головин, Р.Я.Зулькарнеев, С.В.Медведь, В.И.Никаноров, А.Ф.Писарев. Доклад 1.9 на 12-ой международной конференции по физике высоких энергий. Дубна, 1984.

6. Ю.М.Казаринов, Ф.Легар, А.Ф.Писарев, А.М.Розанова, Ю.Н.Симонов. Доклад 1-11 на 12-ой международной конференции по физике высоких энергий. Дубна, 1984.
7. Ю.П.Кумекин, М.Г.Мещеряков, С.Б.Нурушев, Г.Д.Столетов. ЖЭТФ, 46, 50 (1964).
8. Ю.М.Казаринов, Ф.Легар, Г.Петер, А.Ф.Писарев, К.Фальбрух. ЖЭТФ, 47, 848 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
25 февраля 1985 г.

Адрес	Команда				Объяснение	
I00	010	1001	0101	0000	Ввод параметров a_1, \dots, a_7 с ячейки 1001	
I01	016	0102	7501	7610	Перевод параметров	
I02	052	1001	0042	1020		
I03	050	0022	0003	0677	Чтение третьей зоны магнитной ленты	
I04	070	0677	0103	0000		
I05	016	0106	7501	7610	Обращение к МНК по инструкции	
I06	000	0007	0123	0004		
I07	000	7771	7773	0015		
I10	000	1001	0000	0000		
I11	007	0000	0000	0000		
I12	000	0700	0116	0225		
I13	017	0000	0000	0000		останов
I14	056	0115	0105	0111		Повторение обращения к МНК, предусмотрено изменение УЧ2-запрещено чтение числового материала
I15	006	0000	0000	0000		
						Начало арифметической части МНК
I16	461	0002	7751	0026	Сдвиг числа эксперимента во второй адрес	
I17	400	0003	0000	0025	Выборка второй координаты в рабочую ячейку	
I20	052	0000	0000	0000	Смещение рабочих ячеек для значения функции МНК и её производных	
I21	100	0000	0000	0700		
I22	112	0007	0121	0001		
I23	072	0000	0026	0000	Уход на соответствующую часть арифметики МНК, засылка P_1 в ячейку для u	
I24	256	0000	0125	0000		
I25	056	0000	0145	0000		
I26	056	1003	0144	0700		
I27	016	0225	0130	0143		
I30	004	0025	7754	0027	Перевод угла θ в радианы	

Адрес	Команда				Объяснение	
I31	016	0132	7501	7610	Вычисление $P_2(\theta)$ и производных по параметрам A_0, \dots, A_5 , арифметическая часть второго эксперимента.	
I32	000	0027	0071	0704		
I33	005	0704	1004	0700		
I34	000	0705	0000	0600		
I35	452	0000	0000	0142		
I36	505	0704	0600	0705		
I37	605	1005	0705	0601		
I40	001	0700	0601	0700		
I41	112	0002	0136	0001		
I42	000	0000	0000	0000		
I43	000	0000	0000	0000		Возврат
I44	056	7761	0225	0703		Засылка единицы на место производной $dy/d\theta$ для первого эксперимента.
					Арифметическая часть для точки t_0	
I45	072	0000	0105	0000	Засылка $A_{ст}$ в РА	
I46	272	0000	0000	0000		
I47	313	0226	0061	0061	Исправление команды 03 на 02 в ячейке $A_{ст} + 0061$	
I50	400	0211	0000	0210	Извлечение последних двух строк обращения к СП-113	
I51	400	0212	0000	0211		
I52	400	0020	0000	0030	Сохранение значения m и засылка нуля в рабочую ячейку СП-123	
I53	100	0000	0000	0020		
I54	452	0000	0000	0220	Сохранение значения $A_{ст}$	
I55	072	0001	0677	0031	Засылка числа текущей зоны магнитной ленты в РА	
I56	472	0000	0031	0216		
I57	250	0022	0003	5777	Запись текущей зоны в МОЗУ	
I60	070	2777	0157	0000		
I61	472	0001	2777	0031		
I62	400	2774	0000	0704		
I63	400	2775	0000	0705		
I64	016	0165	0133	0143		
I65	405	2777	0700	0701		
I66	405	2776	0700	0602		

