

И-682

С 321



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

2-94-81

ИНОЗЕМЦЕВ
Владимир Иванович

УДК 539.01.01

**ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ
МНОГИХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ**

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Дубна 1994

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Проблема точного интегрирования уравнений движения, описывающих взаимодействие более чем двух нерелятивистских объектов, далека от полного решения, несмотря на достаточно долгую историю (фактически ее изучение началось одновременно с формулировкой классической гамильтоновой механики). За исключением тривиального случая гармонических осцилляторов, все полученные к настоящему времени результаты в этой области относятся к одномерному движению. В классической механике подобное ограничение обусловлено нелинейностью, препятствующей построению точных решений и приводящей к "хаотизации" движения даже для систем с двумя степенями свободы, в квантовой — отсутствием общих методов разделения переменных для линейных уравнений второго порядка в частных производных и явной диагонализации бесконечно-мерных матриц.

Это обстоятельство, естественно, сужает область непосредственного применения точно решаемых моделей к практическим задачам физики. Тем не менее существуют ситуации, особенно в теории конденсированных сред, в которых движение частиц либо квазичастиц допускает одномерную трактовку и по крайней мере качественные черты подобных моделей полезны для описания реальных явлений. Отдельного упоминания заслуживает и их связь с определенным классом решений уравнений Кадомцева-Петвиашвили и Бенджамина-Оно в теории нелинейных волн в сплошных средах. Они представляют несомненную важность как тесты для проверки точности асимптотических и приближенных методов, как численных, так и основанных на различных вариантах теории возмущений. Однако наибольший интерес при изучении этих моделей вызывает проблема отыскания и исследования динамической симметрии, лежащей, по замечанию Е.Вигнера, в основе всех точных результатов физики — проблема, в значительной степени и в настоящее время остающаяся открытой.

Цель работы:

- определение наиболее широкого класса интегрируемых гамильтоновых систем, описывающих динамику взаимодействия частиц во внешнем поле;
- интегрирование соответствующих уравнений движения;
- исследование спектров квантовых систем частиц;
- построение нового класса интегрируемых квантовых спиновых моделей на одномерной решетке;
- формулировка и развитие новых методов диагонализации спиновых гамильтонианов.

Научная новизна и практическая ценность работы

**Научно-техническая
библиотека
ОИЯИ**

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук,
профессор

И.В.Комаров

Доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник

М.А.Ольшанецкий

Доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник

В.Б.Приеэжев

Ведущая организация: Институт физики высоких энергий,
г. Протвино

Автореферат разослан " 1994 г.

Защита состоится " 1994 г. на заседании специализированного совета Д047.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований
г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Ученый секретарь
специализированного совета Д047.01.01
кандидат физико-математических наук

В.И.Журавлев

Найденный и исследованный в работе класс вполне интегрируемых динамических систем, описывающих движение N нерелятивистских частиц, является 6 -параметрическим и включает в себя все известные ранее системы этого типа при $N > 3$. Предложены новые примеры явного решения классических одномерных задач о взаимодействии многих частиц; указаны как случаи описания динамики в элементарных и эллиптических функциях, так и выражения решений уравнений движения посредством θ -функций негиперэллиптических римановых поверхностей.

Новыми являются примеры построения волновых функций основного состояния соответствующих квантовых систем частиц. В специальном частном случае задач со смешанным спектром впервые удалось точно определить энергии возбужденных дискретных уровней.

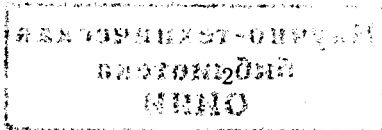
Предложенный в работе новый класс интегрируемых спиновых моделей на решетке имеет непосредственное отношение к проблемам описания явлений ферро- и антиферромагнетизма в физике конденсированных сред: соответствующие однопараметрические гамильтонианы несингулярны, взаимодействие спинов носит короткодействующий характер. Впервые обнаружена нетривиальная связь решений интегрируемых моделей на решетке с зональными сферическими функциями на симметрических пространствах. Для периодических спиновых систем найден новый дискретный аналог решений Эрмита уравнения Ламе, определяющий состояния двухмагнетонного сектора. Это позволяет надеяться на построение точного термодинамического описания свойств спиновых возбуждений при дальнейшем развитии теории.

Апробация работы

Основные материалы диссертации докладывались на всесоюзных семинарах "Квантовая теория солитонов" (ЛОМИ, 1984, 1988 гг.), IX Всесоюзной геометрической конференции (Кишинев, 1988 г.), IV Международной конференции "Нелинейные проблемы физики" (Киев, 1989 г.), V Рабочем совещании "Проблемы симметрии в физике" (Обнинск, 1991 г.), совещании по сильно коррелированным электронным системам (Триест, 1992 г.), семинарах Международного центра теоретической физики (Триест) и физического факультета университета "La Sapienza" (Рим), XXVI Международном симпозиуме по физике элементарных частиц и теории поля (Вендиш-Ритц, ФРГ, 1992 г.), семинарах Лаборатории теоретической физики.

Структура работы

Диссертация основана на 22 публикациях автора, состоит из введения, трех глав, каждая из которых снабжена краткой аннотацией, заключения и списка



цитируемой литературы. Общий объем работы составляет 80 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дана краткая характеристика предшествовавшего развития теории конечномерных вполне интегрируемых систем, обсуждение известных результатов, их связи с теоретико-алгебраическими конструкциями и приложений к физическим задачам. Указаны нерешенные проблемы, очерчен круг исследуемых вопросов.

В первой главе рассмотрена классическая динамика: в простейшем нетривиальном случае двух степеней свободы найдены все системы с гамильтонианами вида

$$\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V_\epsilon(x_1 - x_2) + \epsilon V_\epsilon(x_1 + x_2) + W_\epsilon(x_1) + W_\epsilon(x_2), \quad \epsilon = 0, 1,$$

обладающие дополнительным интегралом движения четвертого порядка по $\{p_j\}$:

$$V_0(x) = \frac{g^2 a^2}{\text{sh}^2 ax}, W_0(x) = \lambda_1 \text{ch} 4ax + \lambda_2 \text{ch} 2ax + \lambda_3 \text{sh} 2ax, \quad (1)$$

$$V_1(x) = g_0 \wp(x), W_1(x) = g_1 \wp(x) + g_2 \wp\left(x + \frac{\omega_1}{2}\right) + g_3 \wp\left(x + \frac{\omega_2}{2}\right) + g_4 \wp\left(x + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \quad (2)$$

где $\wp(x)$ - эллиптическая функция Вейерштрасса, определенная на комплексном торе $T_{\omega_1, \omega_2} = C/Z\omega_1 + Z\omega_2$. Выбор параметров $\omega_{1,2}$ ограничен единственным условием $\Im m \omega_1 \omega_2^{-1} \neq 0$.

Доказательство интегрируемости распространено на произвольные числа частиц посредством построения уравнений Лакса со спектральным параметром. Указаны предельные переходы к ранее известным интегрируемым системам. Введены уравнения эволюции многомерных матриц и получены их решения, позволяющие после редукции найти траектории взаимодействующих частиц в потенциале Морса $W_0(x) = 8\tau^2(\exp(4x) - \exp(2x))$ - единственном случае, когда интегрирование уравнений движения новых систем N частиц вида (1) может быть осуществлено в элементарных функциях:

$$x_j(t) = -\frac{1}{2} \ln q_j(t), \quad j = 1, \dots, N,$$

где $q_j(t)$ - ненулевые собственные значения $(2N \times 2N)$ -матрицы

$$\tilde{Q}(t) = \exp(\Lambda t) Q(0) \exp(\Lambda^+ t).$$

Элементы постоянных матриц Λ и $Q(0)$ могут быть найдены по начальными координатам и скоростям частиц. Равновесные конфигурации определяются нулями обобщенных полиномов Лагерра, что позволяет найти аналитические выражения для энергии, координаты центра масс и частот малых осцилляций вблизи

точки равновесия. Во всех остальных случаях для начальных условий общего положения необходимо использовать алгебро-геометрические методы, основанные на исследовании свойств спектральной кривой и построении многоточечных функций Бейкера-Ахизера. Эта программа, позволяющая дать описание траекторий в θ -функциях Римана, реализована для систем с $\varepsilon = 0$ и потенциалами взаимодействия $V(x) = Ax^{-2}$, $W(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x$.

При наложении достаточно жестких ограничений на начальные условия и лишь в случае $a_0 < 0$ удается (для произвольных N) получить частные решения в элементарных функциях, связанные с движением полюсов решений неоднородного уравнения Бюргерса-Хопфа.

Вторая глава посвящена изучению квантовых аналогов N -частичных гамильтонианов с потенциалами взаимодействия (1-2). Найдены условия, при которых волновые функции основного состояния обладают свойством факторизации

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N c(x_j) \prod_{j>k}^N \chi(x_j - x_k),$$

где $c(x)$ и $\chi(x)$ не имеют нулей вне гиперповерхностей $x_j - x_k = 0$, на которых локализованы сингулярные особенности (1,2). Установлен нетривиальный факт совпадения этих условий с теми, что дают возможность связать точки равновесия классических интегрируемых систем с нулями полиномиальных решений уравнений типа Хилла. Как и в классической механике, наиболее простыми оказываются проблемы описания взаимодействующих частиц в поле с потенциалом Морса или Пецля-Теллера - в этих случаях предложен метод нахождения явных выражений для энергий $\frac{(N+n_0)!}{N!n_0!}$ уровней дискретного спектра, нумеруемых N индексами $\{j\}$, $0 \leq j_1, \dots, j_N \leq n_0$, $\sum_{\rho=1}^N j_\rho \leq n_0$,

$$E_{j_1, \dots, j_N} = -\frac{N}{2} \left[\frac{\alpha^2}{3} (N^2 - 1) + (\lambda - \mu - \alpha(N-1) - 2n_0)^2 \right] + 2s(N+1) \times$$

$$(s + \mu - \lambda + 2n_0 + \alpha N) - \sum_{l=1}^N l j_l [\alpha(2N+1+l) + 2n_0 + \mu - \lambda - j_l] - 2 \sum_{l>m}^N l j_l j_m,$$

где

$$s = \sum_{\rho=1}^N j_\rho, \quad \alpha = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 4g^2}),$$

μ, λ - параметры потенциала Пецля-Теллера $W(x) = \frac{\mu(\mu-1)}{2\text{sh}^2 x} - \frac{\lambda(\lambda-1)}{2\text{ch}^2 x}$ и n_0 - максимальное целое число, удовлетворяющее неравенству $n_0 < \frac{\lambda-\mu}{2} - \alpha(N-1)$. Найдено, что при определенных значениях λ, μ и α некоторые уровни находятся в непрерывной части спектра - соответствующие энергии превышают порог диссоциации $E_0 = -\frac{N-1}{2} \left[\frac{\alpha^2}{3} N(N-2) + (\lambda - \mu - \alpha(N-2))^2 \right]$. Указан алгоритм вычисления соответствующих волновых функций, основанный на решении конечных систем линейных уравнений.

Третья глава содержит результаты, относящиеся к дискретным квантовым системам - взаимодействующим спинам $1/2$. В ней показано, что некоторые

концепции, сформулированные при изучении проблем интегрируемости в классической механике, могут быть перенесены и на одномерные задачи на решетке: в частности, построено представление Лакса со спектральным параметром

$$[\mathcal{H}_s, L] = [L, M], \quad (3)$$

содержащее операторнозначные $(N \times N)$ -матрицы

$$L_{jk} = (1 - \delta_{jk})f(j-k)(1 + \bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_k),$$

$$M_{jk} = (1 - \delta_{jk})g(j-k)(1 + \bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_k) + \delta_{jk} \sum_{s \neq j}^N z(j-s)(1 + \bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_s)$$

и спиновый гамильтониан \mathcal{H}_s с взаимодействием, определяемым обменными интегралами $h(l)$ ($l \in \mathbb{Z}$, $h(l+N) = h(l)$):

$$H_s = -J \sum_{j>l=1}^N h(j-l) \left(\frac{\bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_l - 1}{2} \right).$$

Соотношение (3) эквивалентно набору функциональных уравнений на f, g, z и обменные интегралы, общее решение которых содержит функции Вейерштрасса с вещественным периодом, совпадающим с числом узлов решетки N , и позволяет выделить класс интегрируемых решеточных гамильтонианов

$$h(x) = -z(x) = -f(x)f(-x) = \wp_N(x) + \text{const}, \quad g(x) = -f'(x),$$

$$f(x) = \frac{\sigma_N(x - \alpha)}{\sigma_N(x)\sigma_N(\alpha)} \exp(x\zeta_N(\alpha)),$$

где α - спектральный параметр. Физическим параметром модели является второй период \wp_N -функции $\omega = i\kappa, \kappa \in \mathbb{R}_+$. В пределе $N \rightarrow \infty$ (бесконечная решетка) функции Вейерштрасса вырождаются в тригонометрические и взаимодействие спинов носит короткодействующий характер,

$$h_\infty(x) = \frac{\pi^2}{\kappa^2 \text{sh}^2 \left(\frac{\pi x}{\kappa} \right)}.$$

Развиты методы нахождения решений соответствующих "решеточных" уравнений Шредингера. В их основе лежит способ построения замкнутых аналитических выражений для сумм специального вида, содержащих тригонометрические либо эллиптические функции. В отличие от модели с взаимодействием ближайших соседних спинов, решаемой посредством анзаца Бете, волновые функции M -магнонных возбуждений новых интегрируемых спиновых систем уже не являются линейными комбинациями плоских волн; для систем на бесконечной решетке удалось установить их связь с ранее известными объектами - зональными сферическими функциями на симметрических пространствах отрицательной кривизны ранга $M-1$. Последнее обстоятельство позволяет доказать, что S -

матрица мультимагнитного рассеяния факторизуется; ее зависимость от квазиимпульсов содержит ζ -функции Вейерштрасса с единичным вещественным квазипериодом. Посредством методов теории мероморфных функций на комплексных торах найдено обобщение уравнений Бете в двухмагнитном секторе моделей на периодической решетке:

$$k_1 N - 2i\zeta\left(\frac{N}{2}\right)\gamma = 2\pi l_1, \quad k_2 N + 2i\zeta\left(\frac{N}{2}\right)\gamma = 2\pi l_2; \quad l_1, l_2 \in Z,$$

$$-2\zeta(\gamma) + f(k_1, \gamma) - f(k_2, -\gamma) = 0, \quad (4)$$

где

$$f(k, \gamma) = -\zeta_1 \left[\frac{1}{2\pi} \left(k\omega + \frac{2}{i} \zeta_N \left(\frac{\omega}{2} \right) \gamma \right) \right] +$$

$$\frac{1}{\pi i} \left[2\zeta_1 \left(\frac{1}{2} \right) \zeta_N \left(\frac{\omega}{2} \right) \gamma + ik\zeta_1 \left(\frac{\omega}{2} \right) \right],$$

Энергии соответствующих двухмагнитных возбуждений даются формулой

$$\epsilon_2(k_1, k_2, \gamma) = J \left\{ \frac{1}{4} [f(k_1, \gamma) + f(k_2, -\gamma)]^2 + \epsilon_0(k_1, \gamma) + \epsilon_0(k_2, -\gamma) + \wp_N(\gamma) \right\},$$

где

$$\epsilon_0(k, \gamma) = \frac{2}{\omega} \left[\zeta_1 \left(\frac{\omega}{2} \right) - N\zeta_N \left(\frac{\omega}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \wp_1 \left[\frac{1}{2\pi} \left(k\omega - 2i\zeta_N \left(\frac{\omega}{2} \right) \gamma \right) \right].$$

Набор решений системы (4), приводящих к неэквивалентным волновым функциям, является полным и позволяет описать все $N(N-3)/2$ состояния спиновой решетки с $S = S_z = N/2 - 1$.

В заключении кратко суммированы результаты диссертационной работы.

Основные результаты диссертации:

1. Построено представление Лакса со спектральным параметром для классических гамильтонианов, описывающих системы частиц во внешнем поле с эллиптическими потенциалами взаимодействия; проведен анализ предельных ситуаций.
2. Дано точное решение задачи о движении классических интегрируемых систем частиц в потенциале Морса. Установлена связь координат частиц в равновесном состоянии с нулями обобщенных полиномов Лагерра, вычислены частоты малых осцилляций вблизи положения равновесия.
3. Пропинтегрированы классические уравнения движения систем произвольного числа частиц с взаимодействием, обратно пропорциональным квадрату расстояния между ними, в поле с ангармоническим потенциалом: для соответствующей спектральной задачи построены многоточечные функции Бейкера-Ахиезера, показано, что решения могут быть выражены посредством многомерных θ -функций Римана.

4. Найдены случаи факторизации волновых функций основного состояния квантовых систем частиц во внешнем поле. Продемонстрирована их связь с характеристиками равновесных конфигураций классических систем и полиномиальными решениями уравнений типа Хилла.

5. Решена проблема вычисления энергий уровней дискретного спектра гиперболических систем Калоджеро-Сазерленда в потенциале Морса. Дан алгоритм построения собственных векторов соответствующих квантовых гамильтонианов, найдено их явное выражение для первого возбужденного уровня.

6. Предложен новый класс интегрируемых квантовых моделей взаимодействия спинов 1/2 на одномерной решетке, для которого указаны дополнительные интегралы движения и представление Лакса.

7. Предложены методы диагонализации гамильтонианов спиновых систем на бесконечной решетке с гиперболическим обменным взаимодействием. Продемонстрирована связь их собственных векторов с зональными сферическими функциями, проведен анализ их асимптотического поведения; показано, что анзац Бете возникает при предельном переходе к системам с взаимодействием ближайших соседних спинов. Установлен закон дисперсии спиновых волн; доказано свойство факторизации матрицы рассеяния.

8. Найдено обобщение уравнений анзаца Бете в двухмагнитном секторе модели на конечной решетке с эллиптическим взаимодействием спинов; установлена полнота набора их решений.

Результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. V.I.Inozemtsev. On the motion of integrable particle systems in an external field. Phys. Lett. 98A, 316-318(1983)
2. V.I.Inozemtsev. Integrable models of two interacting particles in an external field. J.Phys. A17, 815-819(1984)
3. V.I.Inozemtsev. New completely integrable multiparticle dynamical systems. Phys. Scripta 25, 517-520(1984)
4. V.I.Inozemtsev, D.V.Meshcheryakov. Integrable particle systems in an external field and the motion of the poles of the solutions to the inhomogeneous Burgers-Hopf equation. Phys. Lett. 106A, 105-107(1984)
5. V.I.Inozemtsev, D.V.Meshcheryakov. On the ground-state wave functions of quantum Calogero-Sutherland systems in an external field. Phys. Lett. 106A, 102-104(1984)
6. V.I.Inozemtsev, D.V.Meshcheryakov. Extension of the class of integrable dynamical systems connected with semisimple Lie algebras. Lett. Math. Phys. 9, 13-18(1985)
7. V.I.Inozemtsev, D.V.Meshcheryakov. Factorization of the ground-state wave functions of quantum systems related to the semisimple Lie algebras. Phys. Lett. 108A, 315-318(1985)
8. V.I.Inozemtsev, D.V.Meshcheryakov. On the discrete spectrum of new exactly solvable quantum N-body problem on a line. JINR Rapid Communications, No.4,

22-27(1984)

9. V.I.Inozemtsev, D.V.Meshcheryakov. On the wave functions of the discrete spectrum states of integrable quantum systems with N degrees of freedom. Phys. Lett. 111A, 234-238(1985)
10. V.I.Inozemtsev, D.V.Meshcheryakov. The discrete spectrum states of finite-dimensional quantum systems related to Lie algebras. Phys. Scripta 33,99-102 (1986)
11. B.V.Bykovsky, V.I.Inozemtsev. Elliptic solutions to the equations of motion of two interacting particles in an external field. Phys. Lett. A119, 225-228(1986)
12. V.I.Inozemtsev. Classical Sutherland systems in the Morse potential. Phys. Scripta 39, 289-293(1989)
13. V.I.Inozemtsev. On two-particle Ruijsenaars-Schneider systems in an external field. JINR preprint E2-88-218(1988)
14. В.И.Иноземцев. Точки равновесия классических интегрируемых систем частиц, факторизация волновых функций их квантовых аналогов и полиномиальные решения уравнения Хилла. ОИЯИ P2-88-217(1988)
15. V.I.Inozemtsev. The finite Toda lattices. Comm. Math. Phys. 121, 629-638 (1989)
16. В.И.Иноземцев. Матричные аналоги эллиптических функций. Функц. анализ и прилож., 23, в.4, 81-82(1989)
17. V.I.Inozemtsev. The Lax representation with spectral parameter on a torus for integrable particle systems. Lett. Math. Phys. 17, 11-17(1989)
18. V.I.Inozemtsev. On the connection between $s=1/2$ Heisenberg chain and Haldane-Shastry model. J. Stat. Phys. 59, 1143-1155(1990)
19. V.I.Inozemtsev, N.G.Inozemtseva. Exact multimagnon states for one-dimensional ferromagnetic spin chains with non-nearest-neighbor interaction. J. Phys. A24, L859-864(1991)
20. V.I.Inozemtsev, A.L.Kuzemsky. Exact solution of the fermionic model on a lattice. Phys. Rev. B43, 1090-1097(1991)
21. V.I.Inozemtsev. The extended Bethe Ansatz for infinite $S=1/2$ quantum spin chains with non-nearest-neighbor interaction. Comm. Math. Phys. 148, 359-376(1992)
22. V.I.Inozemtsev. The Hermite-like description of two-magnon eigenvectors of 1D Heisenberg Hamiltonian with elliptic exchange is complete. ICTP preprint IC/92/172, Trieste (1992)

Рукопись поступила в издательский отдел

14 марта 1994 года.