Г-19

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-92-447

ГАНБОЛД Гуржавын

УДК 530.145

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ
В РЕЖИМЕ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

Специальность: 01.04.02 - теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 1992

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Г.В. Ефимов

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Л.В. Прохоров
доктор физико-математических наук,
профессор В.К. Федянин

Ведущая организация:
Институт теоретической физики Академии наук Украины

Защита диссертации состоится декабря 1992 г. в часов на заседании специализированного совета К047.01.01 при Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований по адресу: Московская обл. г.Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан ноября 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета К047.01.01
кандидат физико-математических наук
(А.Е. Дорохов)

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В современной теоретической физике обширный круг актуальных задач может быть сформулирован на языке функциональных интегралов. В качестве примеров таких проблем можно привести следующие:
- исследование распространения волн в стохастических средах;
- исследование диссипативных процессов в квантовой механике;
- фазовые переходы ;
- нестабильность в динамических системах различной природы (например, неустойчивость вакуума в моделях КТП) и т.д.

Характерным для всех этих задач является то, что их решения могут быть представлены в форме функциональных интегралов (ФИ) с некоторой заданной гауссовой мерой.

Для вычисления подобных интегралов предлагались различные теоретические схемы, но математически хорошо обоснованными являются только пертурбативные разложения, пригодные лишь при малой константе связи. Однако многие проблемы в КТП, например исследование спонтанного нарушения симметрии и фазовой структуры вакуума, требуют рассмотрения ситуации, когда интенсивность взаимодействия возрастает, достигая больших значений.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы вычислить соотствующие ФИ вне области пертурбативного разложения.

Традиционно такого рода задачи исследуются вариационными методами, популярность которых связана с их наглядностью и относительной простотой вычислений. Однако вариационный подход не дает единого рецепта выбора пробных волновых функций и не позволяет контролировать точность аппроксимации. Кроме того, имеется класс задач (неэрмитовы комплексные функционалы, полевые

Объединенный институт ядерных исследований БИБЛИОТЕКА

модели с расходимостями в высших порядках теории возмущений), где вариационные методы неприменимы.

Прямое использование численного моделирования для этих задач сопряжено с известными трудностями перехода к непрерывному пределу и ограниченной возможностью компьютерных ресурсов.

В связи с этим представляется актуальной разработка регулярного метода вычисления функциональных интегралов в области сильной связи, когда традиционный аппарат теории возмущений становится неэффективным.

Актуальность исследования связана также и с возможностью применения разработанного метода к задачам современной квантовой физики: в квантовой механике, статистической физике и квантовой теории поля.

Цель исследования

Основной целью диссертации является построение регулярного метода вычисления функциональных интегралов в области сильной связи, определенных на заданной гауссовой мере

$$Z_{\Gamma}[g] = \int \delta\varphi \exp\{-\frac{1}{2}(\varphi D_0^{-1}\varphi) + gW[\varphi]\}. \qquad (1)$$

Такие интегралы встречаются во многих разделах современной теоретической физики:
- исследование рассеяния и поглощения волн в средах со случайными примесями;
- изучение характера фазовых переходов в моделях квантовой физики;
- оценки характеристических функционалов квантовых систем в области, где велики критические параметры;
- анализ появления нестабильности в моделях КТП.

В диссертации также ставилась задача применения разработанного метода к конкретным проблемам современной квантовой физики (статистическая физика и теория поля).

Научная новизна

1. Разработан новый, регулярный метод гауссово -эквивалентного представления для широкого класса функциональных интегралов вне области пертурбативного разложения. От вариационных подходов, широко используемых в области сильной связи, предложенный метод выгодно отличается следующими свойствами:

- регулярностью - метод дает единое предписание для вычисления различных функциональных интегралов (1);
- для эрмитовых функционалов $W[\phi]$ нулевое приближение в предлагаемом подходе воспроизводит вариационную оценку;
- возможностью оценить высшие поправки (как правило, незначительные) к полученному нулевому приближению;
- применимостью и в случае неэрмитовых, комплексных функционалов, встречающихся в случайных и стохастических процессах и в моделях с грассмановыми степенями свободы.

2. Метод применен для актуальных задач в различных областях теоретической физики:

- вычисление с высокой точностью энергии основного состояния нерелятивистского электрона, движущегося в ионной решетке, при произвольном значении константы связи (теория полярона в физике твердого тела);
- изучение характера фазового перехода в теории с самодействием (скалярная модель $g\varphi^4_{2,3}$ в двумерном и трехмерном пространстве);
- исследование устойчивости вакуума для бозон-фермионного взаимодействия (теория Юкавы).

Практическая и научная ценность работы

Предложенный в диссертации метод и результаты, полученные на его основе, могут быть использованы в следующих задачах:
- теоретические исследования физических свойств полярона в магнитном поле, что имеет важное значение для анализа циклотронных резонансных экспериментов;
- теория биполярона и модель двумерного полярона;
- исследование распространения и поглощения волн в стохастических средах;
- изучение прохождения волн через хаотически распределенные рассеиватели;
- исследование возникновения хаоса в динамических моделях;
- обобщение предложенного метода на калибровочные теории (например, на глюодинамику).

Метод легко алгоритмизуется, что позволяет применять его к задачам, требующим большого объема численных расчетов.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на 9-ой Международной конференции по проблемам КТП (Дубна, апрель 1989 г.), Международной конференции "Точные результаты в квантовой динамике" (Либлице, ЧСФР, июнь 1990 г.), Международной школе "Структура вакуума в сильных полях" (Каржез, Франция, август 1990 г.), Международном совещании по проблемам в квантовой теории (Мадрид, Испания, июнь 1991 г.), Международной конференции по функциональным интегралам (Тютзинг, Германия, май 1992 г.), а также на семинаре в Дублинском институте перспективных исследований (Дублин, Ирландия, март 1990 г.), в Гейдельбергском университете (Гейдельберг, Германия, апрель 1991 г.), в Международном центре теоретической физики (Триест, Италия, март 1992 г.) и на тематических семинарах Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований (Дубна).

Всего по теме диссертации опубликовано 11 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Список цитируемой литературы составляет 122 наименования. Общий объем диссертации – 110 страниц текста, 9 рисунков и 2 таблицы.

Краткое содержание диссертации

1 Введение

Во введении (Главе 1) дается краткий обзор развития метода функционального интегрирования, современных достижений в этой области и основных проблем, возникающих при применении данного подхода к задачам квантовой физики. Здесь же сформулированы основные цели исследования и кратко изложена структура диссертации.

2 Метод гауссово-эквивалентного представления функциональных интегралов

Во второй главе изложены основные принципы построения и соответствующее математическое описание "альтернативного" (гауссово -эквивалентного) представления широкого класса ФИ типа

$$Z_{\Gamma}(g) = N_o \int \delta\varphi \, \exp\left\{-\frac{1}{2}(\varphi D_o^{-1} \varphi) + g W[\varphi]\right\} \qquad (2)$$

вне области пертурбативного разложения $g > 1$. В основе данного метода лежит идея о том, что существуют такие преобразования исходных полевых переменных и свободной функции Грина:

$$\begin{aligned} \Lambda_\varphi : \varphi(x) &\longrightarrow \varphi(x) + b(x), \\ \Lambda_D : D_o^{-1}(x,y) &\longrightarrow D^{-1}(x,y), \end{aligned} \tag{3}$$

с помощью которых первоначальные ФИ преобразуются к другому представлению с сохранением гауссового характера свободной части, но с другой функцией Грина и с новым функционалом взаимодействия.

Показано, что требования отсутствия линейных и квадратичных полевых конфигураций в новом функционале взаимодействия и его нормально-упорядоченной формы по отношению к новой функции Грина приводят к уравнениям

$$b(x) = g \int_\Gamma dy\, D_o(x,y) \frac{\delta}{\delta b(y)} \bar{W}[b],$$

$$D(x_1,x_2) = D_o(x_1,x_2) + g \int_\Gamma dx \int_\Gamma dy\, D_o(x_1,x) \frac{\delta^2 \bar{W}[b]}{\delta b(x)\, \delta b(y)} D(y,x_2), \tag{4}$$

определяющим новую меру ФИ в "альтернативном" представлении и параметр преобразования полевой переменной. В (4) введен функционал взаимодействия

$$\bar{W}[b] = \int d\mu_a \exp\left\{ i\,(a\,b) - \frac{1}{2}(a\,D\,a) \right\}, \tag{5}$$

являющийся по сути нормально-упорядиченной формой исходного функционала взаимодействия $W[\varphi]$:

$$W[\varphi] = \int d\mu_a\, e^{i(a\,\varphi)}, \tag{6}$$

где $d\mu_a$ является некоторой мерой.

Найдено, что в новом представлении, в силу преобразований (3), главный вклад в ФИ в режиме сильной связи факторизуется в виде отдельного множителя:

$$W_o = \frac{1}{2} \ln \det \frac{D}{D_o} - \frac{1}{2}(b\, D_o^{-1} b) - \frac{1}{2}\left([D_o^{-1} - D^{-1}]\, D \right) + g\, \bar{W}[b]. \tag{7}$$

Доказано, что в случае вещественных функционалов W_o воспроизводит вариационную оценку исходного ФИ. Поправки к ведущему вкладу записываются в виде нового ФИ

$$Z_\Gamma(g) = \exp\{ W_o \} \int d\sigma_D \exp\left\{ g\, \bar{W}_2[\varphi] \right\} \tag{8}$$

с функционалом взаимодействия

$$\bar{W}_2[\varphi] = g \int d\mu_a\, e^{i(a\,b) - \frac{1}{2}(a\,D\,a)} : e^{i(a\,\varphi)} - 1 - i\,(a\,\varphi) + \frac{1}{2}(a\,\varphi)^2 :, \tag{9}$$

который может быть вычислен пертурбативным методом, благодаря малости эффективной константы связи в новом представлении.

Метод дает единое предписание для вычисления главного вклада в ФИ независимо от конкретного вида интеграла, а также позволяет оценить следующие поправки к полученному результату. В отличие от вариационных подходов, предложенный метод пригоден и в случае неэрмитовых функционалов, что особенно важно для многих приложений в квантовой физике.

3 Энергия основного состояния полярона

В третьей главе, в рамках предложенного метода в едином подходе исследуется проблема энергии основного состояния оптического полярона в областях слабой, промежуточной и сильной констант электрон–фононного взаимодействия α. Дается обзор различных методов, применяемых для решения этой задачи, и полученных результатов.

Показано, что найденная в диссертации собственная энергия полярона уже в нулевом приближении превосходит по точности известную вариационную оценку Фейнмана в слабом пределе $\alpha \to 0$ и при промежуточных значениях $\alpha < \infty$. Для асимптотически большой константы $\alpha \to \infty$ воспроизводится фейнманская верхняя граница $E_{Feyn}(\alpha) = -\alpha^2/3\pi + O(1)$.

Вычисленные значения следующих поправок заметно улучшают вариационную оценку во всем интервале изменения константы α.

Построены правила диаграммной техники для расчета высших поправок к энергии полярона при $\alpha \to \infty$. Найденная в этом пределе оценка сверху для энергии основного состояния полярона $E_3(\alpha) = -0.108430\alpha^2 + O(1)$ отличается от точной оценки, полученной численно С. Мияке (1975) и подтвержденной позже Дж. Адамовски, Б. Герлах и Х. Лешке (1989), только на 0.07%. Это несомненно свидетельствует об эффективности предложенного подхода.

Полученные результаты для собственной энергии полярона являются одними из лучших среди имеющихся в специальной литературе.

Обсуждается возможность применения предложенного метода в теории двумерного полярона и биполярона.

4 Характер фазового перехода в скалярной теории $g\varphi^4$ при $d = 2, 3$

В четвертой главе, на основе предложенного метода исследуется характер фазового перехода (ФП) в квантовой теории скалярного самодействия $g\varphi_d^4$ в дву- и трехмерном пространствах $d = 2; 3$. Дается краткий обзор современного состояния теоретических исследований в этой области.

Получены нулевое приближение для эффективного потенциала (ЭП) (в виде "кактусного" потенциала) и эффективная масса скалярной частицы, заключающая в себе вклады высших поправок. Найден конкретный вид уравнений, определяющих функцию Грина скалярной частицы и параметр полевого преобразования.

Показано, что в двухмерном случае существует пара решений этих уравнений ("тривиальное" и "нетривиальное"). Определены области существования этих решений. Доказана эквивалентность "тривиального" решения для "кактусного" потенциала широко известному гауссовому эффективному потенциалу (ГЭП).

Отмечено существование "нетривиального" решения для ГЭП, поведение которого указывает на отсутствие ФП первого рода в теории $g\varphi_2^4$.

Проведен анализ этого вопроса с учетом вкладов высших поправок от негауссовой части ЭП, который убедительно указывает на существование ФП второго рода в теории $g\varphi_2^4$ и на его отсутствие в случае $d = 3$. Найдено значение безразмерной критической константы $(g/2\pi m^2)_{crit} = 0.533$, при достижении которой наступает ФП второго рода. Полученный результат согласуется с известными теоремами Б. Саймона, Р. Гриффитса и Дж. Розена (1979).

5 Нестабильность вакуума в суперперенормируемой теории Юкавского типа

В пятой главе диссертации анализируется дестабилизирующая роль фермионов в проблеме устойчивости вакуума в квантово-полевых теориях. В рамках развитого метода рассмотрен пример суперперенормируемой модели юкавского типа в пространстве с размерностью $d = 4$. Дан краткий обзор других подходов, используемых для изучения этой проблемы.

Исследуется поведение ЭП при различных значениях двух констант в юкавской теории: константы бозонного самодействия h и константы фермион-бозонного взаимодействия g. Для регуляризации расходимостей в бозонном секторе использован пропагатор, быстро убывающий в импульсном пространстве в евклидовой области.

Получено выражение для потенциала "кактусного типа", отвечающего чисто бозонному самодействию. Вычисленные поправки к основному вкладу в ЭП указывают на появление фазового перехода второго рода в рассматриваемой системе при достижении константы фермион-бозонного взаимодействия некоторого критического значения $g = g_{crit}$.

Показано, что присутствие фермионов дестабилизирует исходно устойчивую систему при критических отношениях двух констант связи в теории. Отмечается, что в данном вопросе главную роль играет перенормировочная процедура устранения расходимостей в фермионных петлях.

С целью сравнения развита вариационная оценка ЭП в данной теории. Показано, что при этом возникает проблема неэрмитовости действия системы, для преодоления которой предлагается модифицировать фермионный пропагатор. Анализ результатов указывает на широкую возможность применения метода, предложенного в Главе 2.

6 Заключение

В заключении диссертации сформулированы основные результаты, выносимые на защиту:

1. Предложен регулярный метод вычисления в режиме сильной связи для широкого класса функциональных интегралов, определенных на гауссовой мере.

2. Показано, что в области сильной связи существуют такие преобразования исходных полевых переменных и свободной функции Грина, посредством которых первоначальные ФИ преобразуются к новому представлению с сохранением гауссова характера свободной части, но с другой функцией Грина и с новым функционалом взаимодействия. В предположении об отсутствии линейных и квадратичных полевых конфигураций в новом функционале взаимодействия и об его нормально-упорядоченной форме по отношению к новой функции Грина, получена система нелинейных функциональных уравнений, фиксирующая новую меру ФИ и параметр преобразования полевой переменной.

3. Найдено, что в гауссово-эквивалентном представлении главный вклад в ФИ в режиме сильной связи факторизуется в виде отдельного множителя, который включает в себя в замкнутой

форме бесконечную сумму петлевых диаграмм "кактусного" типа. Показано, что в случае вещественных функционалов этот множитель воспроизводит вариационную оценку исходного ФИ. Разработанный метод позволяет получить также следующие поправки к основному вкладу, описываемому фейнмановскими диаграммами "кактусного" типа.

4. Показано, что предложенный метод применим и в случае неэрмитовых функционалов.

5. Полученная в рамках предложенного метода собственная энергия полярона уже в нулевом приближении превосходит по точности известную вариационную оценку Фейнмана в областях слабой, промежуточной и сильной констант связи электрон-фононного взаимодействия α.

6. Показано, что частное двухпараметрическое решение для энергии полярона, полученное в нулевом приближении предлагаемого метода, в точности воспроизводит известную вариационную оценку Фейнмана, являющуюся одной из лучших в данной проблеме.

7. Исследовано асимптотическое поведение энергии полярона для предельных значений константы электрон-фононного взаимодействия. Построена техника графического представления для высших поправок к энергии полярона при $\alpha \to \infty$. С хорошей точностью найдена оценка сверху для собственной энергии полярона $E_3(\alpha \to \infty) = -0.108430\alpha^2 + O(1)$.

8. В квантовой теории скалярного самодействия $g\varphi_d^4$ в дву- и трехмерном пространствах $d = 2; 3$ найден конкретный вид уравнений, определяющих функцию Грина скалярной частицы и параметр полевого преобразования. Показано, что в двухмерной теории существует альтернатива между "тривиальным" и "нетривиальным" решениями этих уравнений. Определены области существования таких решений.

9. Показана эквивалентность "тривиального" решения для "кактусного" потенциала, полученного в нулевом приближении нашего метода, широко известному гауссовому эффективному потенциалу (ГЭП). Отмечено существование "нетривиального" решения для ГЭП, поведение которого указывает на отсутствие ФП первого рода в теории $g\varphi_2^4$.

10. Проведен анализ этой проблемы с учетом вкладов для негауссовой части ЭП, который указывает на существование ФП второго рода в теории $g\varphi_2^4$ и на его отсутствие в модели $d = 3$. Найдено значение безразмерной критической константы $(g/2\pi m^2)_{crit} = 0.533$, при достижении которой в теории $g\varphi_2^4$ наступает ФП второго рода.

11. В суперперенормируемой модели юкавского типа в пространстве с размерностью $d = 4$ описан способ регуляризации расходимостей в бозонном секторе, использующий пропагатор, быстро убывающий в импульсном пространстве в евклидовой области.

12. Получено выражение для потенциала "кактусного" типа, отвечающего чисто бозонному самодействию в юкавской теории. Вычисленные поправки следующих порядков к основному вкладу ЭП указывают на появление фазового перехода второго рода в рассматриваемой системе при критических отношениях двух констант связи в теории. Указано, что в данном вопросе главную роль играет перенормировочная процедура устранения расходимостей в фермионных петлях.

13. Отмечено, что при применении вариационного метода к юкавской задаче возникает проблема неэрмитовости действия системы, для преодоления которой необходимо модификация фермионного пропагатора. Найдена соответствующая вариационная оценка ЭП. Сравнение результатов двух способов оценки ФИ показывает на регулярность и более точный характер предложенного метода по сравнению с вариационным подходом.

Здесь же рассматриваются перспективы дальнейшего использования результатов, полученных в диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Efimov G.V., Ganbold G., – *Functional Integrals in the Strong Coupling Regime and the Ground State Energy of Polaron.*, phys. stat. sol(**b**), 1990, **168** pp 165-178.

2. Efimov G.V., Ganbold G. – *Vacuum Stability in the Superrenormalized Yukawa-type Theory.*, Int. Jour. Mod. Phys., 1990, **A5** pp 531-541.

3. Efimov G.V., Ganbold G. – *Phase Transition in $g\phi_2^4$ Theory.*, Mod. Phys. Lett., 1992, **A7** pp 2189-2197.

4. Efimov G.V., Ganbold G. – *Path Integrals in Strong Coupling Limit.*, NATO ASI series, 1991, **B255** pp 133-139.

5. Efimov G.V., Ganbold G. – *Functional Integrals and Ground State Energy of Polaron.*, Dublin Institute for Advanced Studies preprint DIAS-STP-90-22, 1990, Dublin.

6. Efimov G.V., Ganbold G. – *Intermediate Coupling Polaron Ground State Energy.*, International Centre for Theoretical Physics preprint ICTP/92/38, 1992, Trieste; phys. stat. sol(**b**) (to be published).

7. Efimov G.V., Ganbold G. – *Effective Potential in $g\phi_2^4$ Theory.*, preprint JINR E2-92-191, 1992, Dubna; Phys. Lett., **B** (to be published).

8. Efimov G.V., Ganbold G. – *On the Nature of Phase Transition in Two-dimensional ϕ^4 Theory.*, JINR Communications E2-89-729, 1989, Dubna.

9. Efimov G.V., Ganbold G. – *Polaron Ground State Energy in the Strong Coupling Limit.*, JINR Communications E17-91-116, 1991, Dubna.

10. Efimov G.V., Ganbold G. – *Character of Phase Transition in Two- and Three-dimensional Theory* ϕ^4., JINR Communications E2-91-437, 1991, Dubna.

11. Efimov G.V., Ganbold G. – *Polaron Self Energy.*, Proceedings of the International Workshop "Polaron: Theory and Applications", (Pushchino, 25-31 May, 1992) pp

Рукопись поступила в издательский отдел
5 ноября 1992 года.