ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2 - 9117

РУТЕНБЕРГ
Михаил Липович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Специальность - 01.04.02. - математическая и теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Дубна 1975

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель
доктор физико-математических наук Г.В.ЕФИМОВ

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук В.И.ОГИЕВЕЦКИЙ
кандидат физико-математических наук И.В.ТЮТИН

Ведущее научно-исследовательское учреждение - Институт теоретической физики АН УССР, г. Киев.

Автореферат разослан " " 1975 г.

Защита состоится " " 1975 года на заседании Ученого совета Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна, Московской обл.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
Р.А.АСАНОВ

2 - 9117

РУТЕНБЕРГ
Михаил Липович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Специальность - 01.04.02. - математическая и теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Хорошо известно, что в классической механике, а также в классической теории поля уравнение Лагранжа-Эйлера или уравнения Гамильтона сохраняют свою форму соответственно при точечных или канонических преобразованиях переменных. Иными словами, в классической теории поведение физической системы не зависит от выбора переменных, с помощью которых она описывается. Аналогичное утверждение должно быть справедливым и в квантовой теории поля, так как полевые переменные являются ненаблюдаемыми величинами.

Из основных положений квантовой теории следует, что наблюдаемые величины, т.е. спектры и соотношения между ними не зависят от преобразований ненаблюдаемых величин. Поэтому физические результаты, получаемые с помощью наблюдаемых величин, не зависят от преобразований полевых переменных. Проверку этого факта в рамках используемого в квантовой теории поля математического аппарата обычно называют доказательством теоремы эквивалентности.

Существуют различные формулировки теоремы эквивалентности, что связано с различными подходами к квантовой теории поля. В S'-матричном подходе, в рамках лагранжева формализма теорему эквивалентности можно сформулировать следующим образом:

На массовой поверхности S-матрицы, построенные по лагранжианам $\mathcal{L}(\varphi)$ и $\mathcal{L}'(\psi)$, связанным локальным преобразованием полевых переменных, равны

$$S'(\mathcal{L}(\varphi)) = S'(\mathcal{L}'(\varphi)),$$

где

$$\mathcal{L}'(\varphi) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(\varphi)), \quad \mathcal{L}(\varphi) = \varphi + F(\varphi).$$

Из различных формулировок теоремы эквивалентности в большей степени важной и актуальной является формулировка теоремы эквивалентности в подходах, основанных на теории возмущений. Это связано, во-первых, с тем, что до последнего времени теория возмущений является основным методом получения количественных результатов в квантовой теории поля, во-вторых, с успехами, достигнутыми в последнее время при построении самосогласованной нелинейной теории поля, калибровочных и киральных теорий, где теорема эквивалентности используется в рамках теории возмущений.

Однако доказать теорему эквивалентности в рамках теории возмущений как некоторую математически строгую теорему, вплоть до настоящего времени не удается.

Пока еще не существует глубоко обоснованных методов построения S -матрицы по произвольному лагранжиану взаимодействия. В этой ситуации имеет смысл по-иному подойти к формулировке теоремы эквивалентности. Под теоремой эквивалентности следует понимать совокупность некоторых правил, позволяющих по классическим лагранжианам, связанным преобразованием полевых переменных, построить S -матрицы, которые на массовой поверхности равны.

Эта совокупность правил включает в себя:

а) регуляризационную процедуру, параметризующую ультрафиолетовые расходимости некоторым параметром Λ ;

б) процедуру снятия регуляризации.

Таков обычный путь построения S - матрицы по теории возмущений. Очевидно, что не всякая регуляризационная процедура, а также процедура снятия регуляризации будут приводить к равенству S -матриц. Поэтому возникает проблема построения такой регуляризационной процедуры и процедуры снятия регуляризации, использование которых приводит к равенству S - матриц на массовой поверхности. Другой важной проблемой является само доказательство теоремы эквивалентности в рамках используемой регуляризации и процедуры снятия регуляризации. Этим проблемам посвящена настоящая диссертация.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Во введении кратко обсуждаются существующие уже доказательства теоремы эквивалентности, выделены проблемы доказательства этой теоремы.

В главе I формулируется теорема эквивалентности в лагранжевом формализме квантовой теории поля в рамках S - матричного подхода Боголюбова-Ширкова /I/. Для простоты все изложение ведется на примере нейтрального скалярного поля с взаимодействием, содержащим производные до n -порядка. В §I рассматривается схема построения S - матрицы по произвольному лагранжиану взаимодействия в рамках подхода Боголюбова-Ширкова.

S - матрица в этой схеме записывается в виде

$$S = T\exp\left\{i\int dx\, \mathcal{L}_I(x)\right\}. \qquad (1)$$

Обсуждается обобщение (I) на случай лагранжианов взаимодействия с производными. Например, в случае, когда лагранжиан взаимодействия имеет вид $\frac{1}{2}\Phi(\varphi)\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi = \mathcal{L}_I(\varphi)$, S - матрица уже строится не по $\mathcal{L}_I$, а по некоторому эффективному лагранжиану

$$\mathcal{L}_{эф} = \mathcal{L}_I - i\delta(0)\ln\sqrt{1+\Phi(\varphi)}, \qquad (2)$$

что следует из канонического квантования. /2/ Однако в ряду теории возмущений дополнительные члены, пропорциональные $\delta(0)$, отсутствуют, поскольку они сокращаются с соответствующими членами из $\mathcal{L}_I$. Поэтому в дальнейшем используется (I) и такая регуляризационная процедура, в рамках которой $\delta_\Lambda(0)=0$.

В § 2 рассматривается формулировка теоремы эквивалентности в лагранжевом формализме квантовой теории поля, в рамках S - матричного подхода Боголюбова-Ширкова. Её можно представить в следующем виде:

В квантовой теории поля рассматриваются две независимые теории, индуцируемые классическими лагранжианами $\mathcal{L}(\varphi)$ и $\mathcal{L}'(\Psi)$, которые связаны преобразованием полевых переменных

$$\mathcal{L}(\varphi) \xrightarrow{\varphi \to \Psi + F(\Psi)} \mathcal{L}'(\Psi):$$

I) Лагранжианы разбиваются на часть, описывающую свободное поле, и часть, описывающую взаимодействие.

$$\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}_0(\varphi) + \mathcal{L}_I(\varphi)$$
$$\mathcal{L}'(\Psi) = \mathcal{L}_0(\Psi) + \mathcal{L}'_I(\Psi)$$
$$\mathcal{L}_0(\varphi) = \tfrac{1}{2}\varphi(\Box - m^2)\varphi$$
$$\mathcal{L}_0(\Psi) = \tfrac{1}{2}\Psi(\Box - m^2)\Psi$$

2) Строится гильбертово пространство физических состояний, соответствующее $\mathcal{L}_0$. Согласно выбору $\mathcal{L}_0(\varphi)$ и $\mathcal{L}_0(\Psi)$, пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ совпадают.

$$\mathcal{H} \; - \; \mathcal{H}'$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}'$$

3) Строится S-матрица согласно принципу соответствия.

$$S = 1 + i\int dx\,\mathcal{L}_I(x), \quad S' = 1 + i\int dx\,\mathcal{L}'_I(x)$$

4) Вводится регуляризационная процедура $\mathcal{R}$, задающая S-матрицу в каждом порядке теории возмущений. Для перехода на массовую поверхность вводятся контр-члены перенормировки массы и волновой функции.

$$\mathrm{reg}\, S \qquad \mathrm{reg}\, S'$$

5) Регуляризационная процедура подбирается так, чтобы на массовой поверхности

$$\mathrm{reg}\, S = \mathrm{reg}\, S'.$$

6) Следующим этапом должна быть указана процедура снятия регуляризации и получения конечной S-матрицы, выраженной через физические параметры, такая, чтобы

$$S = S'.$$

В § 3 дается формальное доказательство теоремы эквивалентности для $\mathcal{L}_I$, содержащих производные не выше первой степени. Ограничение на производные связано с вычислением дополнительных членов (2). Доказательство формальное, поскольку мы игнорируем ультрафиолетовые расходимости.

Вторая глава посвящена построению регуляризационной процедуры (правило а) и обсуждению методов снятия регуляризации (правило в), приводящих к равенству S-матриц на массовой поверхности.

В § I строится регуляризационная процедура. Основное требование, предъявляемое к регуляризационной процедуре, - эквивалентность регуляризованных S-матриц на массовой поверхности

$$\mathrm{reg}\, S = \mathrm{reg}\, S'. \qquad (3)$$

Подчеркнем, что это требование является важным ввиду того, что, совершая локальное преобразование полевых переменных, мы с необходимостью приходим к неперенормируемым теориям, и, если равенство регуляризованных S-матриц будет нарушено, то восстановить равенство S-матриц после снятия регуляризации, вследствие неперенормируемости теории, пока не представляется возможным.

Используемая регуляризационная процедура есть обычная регуляризация Паули-Вилларса с дополнительными условиями на коэффициенты регуляризации C_j :

$$\mathcal{D}_\Lambda(p) = \sum_{j=0}^{N} \frac{c_j}{m^2\Lambda_j^2 - p^2 - i\varepsilon} \qquad C_0 = \Lambda_0 = 1 \qquad (4)$$

$$1 + \sum_{j=1}^{N} C_j \Lambda_j^k = 0 \qquad k = 0, 1, \dots, N-n$$

$$\sum_{j=1}^{N} C_j \Lambda_j^{2m} \log \Lambda_j = 0 \qquad m = 1, 2, \dots\ n+1. \qquad (5)$$

Существенным является то, что каждый пропагатор регуляризуется своим параметром Λ и предельный переход $\Lambda \to \infty$ по каждому Λ совершается независимо. Вследствие уравнений (5)

регуляризованная причинная функция обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{D}_\Lambda(p) \sim \frac{1}{(p^2)^{N-n}}$ при $p^2 \to \infty$,

2) $\Box_x^m \mathcal{D}_\Lambda(x)_{|x=0} = 0 \qquad m = 0, 1, \dots, n.$

Это приводит к тому, что обычное произведение полевых операторов совпадает с нормально упорядоченным.

3) $\delta_\Lambda(x)_{|x=0} = -i(\Box_x - m^2)\mathcal{D}_\Lambda(x)_{|x=0} = 0$,что позволяет устранить в ряду теории возмущений члены, пропорциональные $\delta(0)$.

С помощью построенной регуляризации в § 2 дается доказательство равенства (3) на массовой поверхности.

Для перехода в (3) на массовую поверхность вводятся контрчлены перенормировки массы и волновой функции

$$\delta m^2 \varphi^2(x) + (z_2 - 1)\varphi(x)(\Box_x - m^2)\varphi(x)$$

для $\mathrm{reg}\, S$ и

$$\delta m'^2 [\Psi(x) + F(\Psi(x))]^2 + (z_2' - 1)[\Psi(x) + F(\Psi(x))](\Box - m'^2)[\Psi(x) + F(\Psi(x))]$$

для $\mathrm{reg}\, S'$.

Построение контрчленов для $\mathrm{reg}\, S'$ с помощью замены переменных с необходимостью вытекает из предложенного нами метода доказательства равенства S и S' .

Представляя $\mathrm{reg}\, S'$ в виде

$$\mathrm{reg}\, S' = \exp\left\{\frac{1}{2}\iint dx\,dy\, \mathcal{D}_\Lambda(x-y)\frac{\delta^2}{\delta\Psi(x)\,\delta\Psi(y)}\right\} \exp\left\{i\int dx \left[\mathcal{L}_I'(\Psi(x)) - \delta m'^2(\Psi(x) + F(\Psi(x)))^2 + (z_2' - 1)(\Psi(x) + F(\Psi(x)))(\Box_x - m'^2)(\Psi(x) + F(\Psi(x)))\right]\right\}, \qquad (6)$$

с помощью алгебраических преобразований (6) приводится к виду

$$\mathrm{reg}\, S' = \exp\left\{i\int dx\, \Psi(x)(\Box_x - m'^2) F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\right)\right\} T\exp\left\{i\int dx \left[\mathcal{L}_I(\Psi(x)) - \delta m'^2 \Psi^2(x) + (z_2' - 1)\Psi(x)(\Box - m'^2)\Psi(x)\right]\right\} \exp\left\{\int dz\, \alpha(z) A(\Psi(z))\right\}_{\alpha=0}, \qquad (7)$$

где $A(x)$ удовлетворяет уравнению

$$A(x)=\Psi(x)-F(A(x)).$$

Легко видеть, что выражение для $reg\, S'$ отличается от $reg\, S$ на экспоненту, которая на массовой поверхности приводит к дополнительным собственно-энергетическим вставкам во внешние линии диаграмм.

Рассмотрение собственно-энергетических вставок во внешние и внутренние линии диаграмм Фейнмана приводит к следующим результатам:

1) $m'^2 = m^2$, т.е. наблюдаемая масса частицы не зависит от преобразования полевых переменных;

2) перенормировка волновой функции совершается с помощью введения контрчлена

$$(Z_2-1)[\Psi(x)+F(\Psi(x))](\Box_x-m^2)[\Psi(x)+F(\Psi(x))],$$

в котором $Z_2' = Z_2$, и дополнительной перенормировки внешних линий диаграмм Фейнмана.

Дополнительная перенормировка внешних линий заключается в умножении их на множитель $\frac{1}{1-F}$, где F -значение на массовой поверхности собственно-энергетического блока, образованного экспоненциальным множителем

$$\exp\left\{i\int dx\, \Psi(x)(\Box_x-m^2)F\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\}$$

в выражении для $reg\, S'$ (7).

Совершая перенормировку массы и описанную выше процедуру перенормировки волновой функции,получаем на массовой поверхности

$$reg\, S = reg\, S' \qquad (8)$$

В тех случаях, когда $\lim_{\Lambda\to\infty} reg\, S$ существует, формула (8) позволяет доказать равенство S -матриц после снятия регуляризации:

$$S = S'. \qquad (9)$$

В § 3 , с помощью (8), равенство (9) доказывается для случая, когда один из лагранжианов $\mathcal{L}_I(\varphi)$ или $\mathcal{L}_I'(\Psi)$ относится к перенормируемому типу. В качестве процедуры снятия регуляризации (правило в) используется вычитательная процедура Боголюбова -Парасюка.

В § 4 равенство (9) доказывается для лагранжианов с нелокальным взаимодействием./3/ Существование предела $\lim_{\Lambda\to\infty} reg\, S$ в этом случае обеспечивается нелокальностью взаимодействия.

В § 5 равенство (8) рассматривается в"приближении деревьев ". Поскольку в этом приближении предел $\lim_{\Lambda\to\infty} reg\, S$ существует, снимая регуляризацию , получаем равенство S и S' в " приближении деревьев".

В третьей главе исследуется роль регуляризации при доказательстве теоремы эквивалентности. В рамках регуляризации, нарушающей (8) (в качестве такой регуляризации взята известная циклическая регуляризация Паули - Вилларса), на примере взаимодействия с внешним полем.

$$\mathcal{L}_I = \frac{g}{2}\partial_\mu \varphi(x)\partial_\mu \varphi(x) A(x)$$

$$\mathcal{L}_I' = \left[\frac{gm^2A(x)}{2(1+gA(x))} - \frac{g\Box_x A(x)}{4(1+gA(x))} + \frac{g^2}{8}\frac{\partial_\mu A(x)\partial_\mu A(x)}{[1+gA(x)]^2}\right]\Psi^2(x),$$

где $\mathcal{L}_I$ и $\mathcal{L}_I'$ связаны преобразованием $\varphi(x)=\frac{\Psi(x)}{\sqrt{1+gA(x)}}$, исследуется возможность доказательства эквивалентности конечных S-матриц. Конечные S-матрицы строятся с помощью наложения дополнительных условий на коэффициенты циклической регуляризации

$$C_j \quad : \quad \sum_{j=1}^{N} C_j \Lambda_j^m \log \Lambda_j = a_m \quad m=0,2,4 ,$$

где a_m-произвольные фиксированные постоянные. В более реалистических теориях они определяются из эксперимента.

После снятия регуляризации S-матрицы, построенные по $\mathcal{L}_I(\varphi)$ и $\mathcal{L}_I'(\Psi)$, зависят от параметров a_m.

Показано, что нарушение равенства (8) в рамках используемой процедуры снятия регуляризации приводит к нарушению эквивалентности конечных S-матриц.

Следует отметить, что вследствие " регулярности" используемой процедуры снятия регуляризации нарушение эквивалентности конечных S-матриц полностью определяется нарушением эквивалентности регуляризованных S-матриц.

Вычисления во втором порядке показывают, что $\mathrm{reg}\, S$ и $\mathrm{reg}\, S'$ отличаются на массовой поверхности на полином по внешнему импульсу диаграммы, причем степень полинома равна индексу расходимости диаграммы. Это указывает на возможность восстановления равенства конечных S-матриц, если в качестве процедуры снятия регуляризации использовать вычитательную процедуру. Однако реализовать эту возможность для неперенормируемых теорий пока не представляется возможным.

В четвертой главе результаты, полученные выше, применяются к более реалистическим теориям.

В § 1 рассматривается теория с киральным лагранжианом. Успехи, достигнутые в последнее время, в таких теориях в большей степени связаны с построением ковариантной теории возмущений. Как было показано во второй главе на примере скалярного поля теорию возмущений, инвариантную относительно преобразования полевых переменных, можно построить только с учетом перенормировочной процедуры, а именно, процедуры перенормировки волновой функции.

Подчеркнем, что процедура перенормировки волновой функции отличается от обычной и включает в себя дополнительную перенормировку внешних линий диаграмм.

Применяя этот результат к киральным теориям, получаем, что ковариантную теорию возмущений можно построить только с учетом процедуры перенормировки волновой функции, описанной выше.

Здесь же показывается, что причиной возникновения дополнительной перенормировки внешних линий является различие в механизме редукции для внешних и внутренних линий диаграмм.

Интересным исключением является экспоненциальная параметризация, в которой, вследствие отсутствия редукции диаграмм, отсутствует и дополнительная перенормировка внешних линий.

В § 2 рассматриваются преобразования полевых переменных в теории с градиентной группой. Здесь исследуется возможность обобщения построенной выше регуляризации, не нарушающей ни эквивалентности, ни градиентной инвариантности S-матриц.

Исходным является лагранжиан скалярной электродинамики

$$\mathcal{L}(\varphi^+,\varphi,A_\mu) = \mathcal{L}_0(\varphi^+,\varphi) + \mathcal{L}_0(A_\mu) + (-ie)\left(\partial_\mu \varphi\, \varphi^+ - \varphi\, \partial_\mu \varphi^+\right) + e^2 A_\mu^2 \varphi^+ \varphi .$$

С помощью преобразования

$$\varphi^+(x) = \Psi^+(x)\left[1 + F(\Psi^+(x)\Psi(x))\right], \quad \varphi(x) = \Psi(x)\left[1 + F(\Psi^+(x)\Psi(x))\right]$$

получаем $\mathcal{L}'(\Psi^+, \Psi, A_\mu)$.

Как $\mathcal{L}(\Psi^{+},\Psi,A_{\mu})$, так и $\mathcal{L}'(\Psi^{+},\Psi,A_{\mu})$ градиентно-инвариантны.

Далее показывается, что регуляризация, построенная во второй главе, допускает обобщение, которое не нарушает равенства

$$\mathrm{reg}\, S(\mathcal{L}(\Psi^{+},\Psi,A)) = \mathrm{reg}\, S'(\mathcal{L}'(\Psi^{+},\Psi,A)) \qquad (10),$$

сохраняет градиентную инвариантность $\mathrm{reg}\, S$,
и, вследствие (10) , градиентную инвариантность $\mathrm{reg}\, S'$.

Поскольку скалярная электродинамика перенормируема, после введения соответствующих контрчленов в (10), предел слева в (10) существует, поэтому существует предел справа. Снимая регуляризацию, получаем $S(\mathcal{L}) = S'(\mathcal{L}')$ и как S , так и S' – градиентно-инвариантны.

В Заключении кратко обсуждаются полученные в диссертации результаты, которые докладывались на Международном семинаре по нелинейной, нелокальной квантовой теории поля, на семинарах ЛТФ ОИЯИ, ИТФ АН УССР и опубликованы в работах /4,5,6,7/.

Литература

1. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957.
2. М.А.Браун, Ю.А.Евлашев. ТМФ,6,318,1971.
3. Г.В.Ефимов. Препринт ИТФ 68-52, 68-54, (1968).
4. Г.В.Ефимов, М.Л.Рутенберг. ТМФ 16,186,1973; препринт ОИЯИ Р2-6384,Дубна, 1972.
5. О.А.Могилевский,М.Л.Рутенберг. Препринт ИТФ-74-38Р,Киев.
6. М.Л.Рутенберг.Препринт ИТФ-75-34Р, Киев.
7. Г.В.Ефимов, М.Л.Рутенберг. Препринт ОИЯИ Р2-8813, Дубна, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 августа 1975 года.