ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

2-91-250

ЛУЦЕНКО
Игорь Владимирович

УДК 530.145

КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ СМЕСИ И АНОМАЛЬНОЕ КУЛОНОВСКОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ

Специальность: 01.04.02 - теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1991

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук, профессор — СИСАКЯН А.Н.

доктор физико-математических наук, профессор — ТЕР-АНТОНЯН В.М.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор — САВЕЛЬЕВ М.В.

кандидат физико-математических наук — ВИНИЦКИЙ С.И.

Ведущая организация - НИИЯФ МГУ.

Автореферат разослан "6" июня 1991 г. Защита состоится "3" июля 1991 г. на заседании Специализированного совета К 047.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук — ДОРОХОВ А.Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. В диссертации исследуются классические и квантовые смеси. Наглядным примером классической смеси является руда: в ней полезный компонент перемешан с пустой породой. В общем случае классической смесью мы называем любое множество,в элементах которого можно выделить подэлементы, отличающиеся друг от друга по значениям признаков, которые они (подэлементы) на себе несут. Под квантовой смесью, как это принято, мы понимаем любую суперпозицию квантовых состояний, т.е. когерентную смесь. В примере с рудой элементами смеси являются куски руды, подэлементами - компоненты, значениями признаков - массы компонентов в элементах.

Наиболее характерным свойством смесей является их разнообразие: это плёнки с треками элементарных частиц (признаки - импульсы конечных продуктов столкновения частиц), адронные мультиплеты (признаки - квантовые числа отдельных кварков в адронах), межбазисные разложения в квантовой механике (признаки - полный набор физических величин, определяющих квантовые состояния, суперпозиция которых рассматривается), предприятия одной отрасли производства (признаки - средства, распределенные между предприятиями), участки звёздного неба (признаки - светимость, либо другая физическая характеристика небесного тела) и многое другое. При таком разнообразии становится актуальным вопрос о классификации смесей и проблема в том, что положить в основу классификационной схемы. В диссертации в качестве такого основополагающего свойства принято наличие в смесях двух противоположных по действию процессов - процесса смешивания и разделения. Любая смесь - это результат компромисса между указанными процессами. Процесс смешивания уничтожает различие между элементами смеси и приводит в идеале к однородной смеси, т.е. к смеси, в которой всем элементам соответствует одно и то же значение признака. Процесс разделения лишает признака одни элементы и за счет этого обогащает им другие, и в пределе приводит к крайне неоднородной смеси, то есть к смеси, в которой каждый элемент либо лишен признака, либо им максимально нагружен.

Из сказанного следует, что смеси нужно классифицировать по их степени неоднородности. Дело сводится к указанию места, занимаемого каждой конкретной смесью на шкале, концам которой приписаны однородная и крайне неоднородная смесь. Соответствующее число $\mathcal{L}$ названо в диссертации критерием неоднородности.

Далее, смеси не только разнообразны, но и многокомпонентны. Этот второй по значимости факт делает эффективным инклюзивный метод представления экспериментальной информации о смесях. В рамках инклюзивного метода мы, работая с i -ым признаком, учитываем также (но лишь интегральным образом) вклад остальных признаков. Новым шагом, сделанным в диссертации, является модификация инклюзивной схемы, обусловленная включением в ее рамки информации о процессах смешивания и разделения. Это привело к открытию нового статистического феномена - относительной корреляции между признаками. Именно,в смесях, наряду с корреляциями в традиционном их понимании, существует особый вид корреляций, в которых признаки выступают не симметричным образом - мера зависимости i -го признака от j-го, вообще говоря, не равна мере зависимости к-го признака от i -го. Например, может оказаться, что i -ый признак вообще не зависит от j -го, а j -ый признак зависит максимальным образом от i -го; или между i -ым и j -ым признаками есть корреляция в традиционном смысле, но вместе с тем эти признаки являются относительно независимыми. Учет феномена относительных корреляций расширяет рамки инклюзивного подхода и делает его применимым не только к фундаментальной физике, но и ко многим областям науки, где исследуемые объекты включают в себя множество причин и следствий и где, поэтому, умение вычислять относительную зависимость между признаками имеет первостепенное значение.

<u>ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИССЕРТАЦИИ.</u> Цель диссертации состоит в математизации изложенных выше идей, т.е. в построении того, что в диссертации названо формализмом неоднородности и в применении полученного формализма к конкретным моделям.

В диссертации решены следующие задачи:

1. Разработан формализм неоднородности.

2. Построены две модели квантовых смесей - кулоновская кольцеобразная и осцилляторная кольцеобразная.

3. Дан полный анализ классических дельта-образных и квантовых кольцеобразных смесей с позиций формализма неоднородности.

4. Изучены некоторые следствия, к которым приводит связь между двумя фундаментальными атрибутами квантовых смесей - неоднородностью и симметрией.

<u>НАУЧНАЯ НОВИЗНА РАБОТЫ</u> прежде всего диктуется самой постановкой задачи о классификации смесей по их степени неоднородности и постановкой вопроса об относительных корреляциях признаков в смеси.

К числу оригинальных черт диссертации относится также следующее:

(а) сопоставление классической смеси не одной, а двух характеристик - функции выхода $\gamma(\beta)$ и функции извлечения $\varepsilon(\beta)$, т.е. плотности распределения "основы" по концентрации β признака и доли признака, приходящегося на данные значения концентрации;

(б) разработка метода учета степени смешивания или разделения на языке функций γ и ε ;

(в) включение квантовых смесей в общую схему формализма неоднородности за счет правила: "признак - наблюдаемая", "основа - вектор состояния";

(г) выявление связи между крайне неоднородной квантовой смесью и феноменом двухкратного вырождения в одномерной квантовой механике.

<u>ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ.</u> В диссертации слиты в единое целое три дисциплины: межбазисные разложения, одномерные квантовые системы с вырождением и формализм неоднородности. Практическая ценность первых двух дисциплин определяется их связью с задачами теоретической физики. В частности: (а) знание матриц W , генерирующих межбазисные разложения необходимо для решения одной из центральных проблем любой квантовомеханической модели - вычисления матричных элементов операторов физических величин по смешанным базисам; (б) в некоторых случаях математическая структура матрицы W позволяет делать выводы о группе симметрии, ответственной за вырождение энергетического спектра системы, если эта симметрия скрыта; (в) одномерные квантовые системы с вырождением являются удобными моделями для выяснения довольно тонких понятий, относящихся к квантовой теории поля и их доступного изложения (к числу таковых относятся, например, спонтанное нарушение симметрии и суперсимметрия).

Формализм неоднородности может иметь более широкий спектр применения. Ниже отмечены некоторые из них.

1. В силу важности проблемы классификации смесей по степени неоднородности приобретает актуальность составление карт неоднородности, т.е. диаграмм неоднородности с нанесенными на них данными о смесях, взятых из той или иной области исследования. Наличие таких карт могло бы сильно упростить задачу сравнения смесей и помочь в решении ряда связанных с этими смесями проблем. Например, соответствующие карты неоднородности могли бы оказать помощь в принятии решений по эксплуатации месторождений полезных ископаемых и в подсчете заключенных в них запасов.

2. В системах с большим числом признаков и со многими связями (например в экологических системах, где это число достигает нескольких сотен), формализм неоднородности дает возможность вычислить относительные корреляции между признаками и таким образом выявить среди них несколько директивных, т.е. диктующих поведение остальным. Такой

подход способствует пониманию процессов, происходящих в системе и прогнозированию ее эволюции.

3. Каждая смесь, в которой происходят изменения, после ее перевода на введенную в диссертации диаграмму неоднородности преобразуется во множество точек с характерной конфигурацией. Указанный факт можно использовать для составления своеобразных картотек шаблонов, которые затем можно применять в целях распазнавония образов.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Результаты, полученные в диссертации, докладывались на семинарах Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, кафедры теоретической физики и кафедры ядерной физики Ереванского университета.

ПУБЛИКАЦИИ. По результатам диссертации опубликовано десять работ, список которых приводится ниже.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИССЕРТАЦИИ. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Её общий объем с учетом 2 таблиц, 23 рисунков и списка литературы из 114 наименований составляет 115 страниц машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ВО ВВЕДЕНИИ очерчен круг исследуемых вопросов, раскрыта актуальность темы, поставлены цели и задачи, намечен подход к исследованию смесей, подчеркнута раль процессов смешивания и разделения для построения формализма неоднородности, сформулированы требования, предъявляемые к моделям квантовых смесей, обоснована целесообразность использования моделей кольцеобразных потенциалов, обращено внимание на связь задачи об одномерном атоме водорода с задачей о смесях, находящихся в крайне неоднородном состоянии.

В ПЕРВОЙ ГЛАВЕ построена модель кольцеобразных квантовых смесей. Иными словами, решена проблема межбазисных разложений в потенциале $\mathcal{U} = V(r) + \Lambda/r^2\sin^2\theta$, где $V(r)$ является кулоновским, либо осцилляторным полем, а Λ играет роль константы добавочного к $V(r)$ аксиально-симметричного взаимодействия. В §1 дан обзор общей теории кольцеобразных потенциалов в сферических координатах. Сформулированы правила соответствия, устанавливающие связь между теориями чистых и соответствующих им кольцеобразных потенциалов:

$$|m| \longrightarrow |m| + \Delta m\ , \qquad \ell \longrightarrow \ell + \Delta m \tag{1}$$

где Δm имеет смысл поправочного фактора и имеет вид

$$\Delta m = \sqrt{m^2 + 2\Lambda} - |m| \tag{2}$$

В §2 и §3 исследованы межбазисные разложения в кулоновском и осцилляторном кольцеобразных потенциалах. В случае кулоновского потенциала речь идет о разложениях

$$\Phi_{n_1 n_2 m} = \sum_{t=0}^{\nu} W^{(\nu)}_{n_2 t}(\Lambda)\, \Psi_{ntm} \tag{3а}$$

$$\Psi_{ntm} = \sum_{n_2=0}^{\nu} \overset{\cdot}{W}{}^{(\nu)}_{n_2 t}(\Lambda)\, \Phi_{n_1 n_2 m} \tag{3б}$$

Здесь через Φ и Ψ обозначены параболический и сферический базисы, разложение записано на языке квантовых чисел атома водорода $\nu = n_1 + n_2$ и $t = \ell - |m|$. В осцилляторном случае разложения имеют вид:

$$\Phi_{N n_3 M} = \sum_{t=0,1}^{N-M} W^{(N-M)}_{n_3 t}(\Lambda)\, \Psi_{N\lambda M} \tag{4а}$$

$$\Psi_{N\lambda M} = \sum_{n_3=0,1}^{N-M} W^{(N-M)}_{n_3 t}(\Lambda)\, \Phi_{N n_3 M} \tag{4б}$$

причем $M = \sqrt{m^2 + 2\Lambda}$, $\lambda = M + t$ (t имеет тот же смысл, что и для кулоновского поля), N - главное квантовое число ($N = 2N_r + \lambda = 2N_\xi + n_3 + M$). Нижний предел в суммах берется равным нулю при четных $N - M$ и единице при нечетных $N - M$ и далее суммирование ведется по значениям с фиксированной четностью. Выписанные выше межбазисные разложения обобщают известные ранее результаты из теории атома водорода и изотропного осциллятора. Для нахождения матриц W нами использована идея о переходе в исследуемых межбазисных разложениях к пределу $r \to \infty$, формализм теории ортогональных многочленов и квантовой теории углового момента. Результаты расчетов добавляют к сформулированным в §1 правилам еще одно правило соответствия

$$n \longrightarrow n + \Delta m \tag{5}$$

в котором через n обозначена величина, играющая роль главного квантового числа как в чисто кулоновской, так и в чисто осцилляторной задаче. Для матриц W получены выражения

$$W^{(\nu)}_{n_2 t}(\Lambda) = C^{\ell+\Delta m,\ m+\Delta m}_{j+\frac{\Delta m}{2},\ m_1+\frac{\Delta m}{2};\ j+\frac{\Delta m}{2},\ m_2+\frac{\Delta m}{2}} \tag{6а}$$

$$W^{(N-M)}_{n_3 t}(\Lambda) = C^{\frac{2\ell-1}{4}+\frac{\Delta m}{2},\ \frac{2|m|-1}{4}+\frac{\Delta m}{2}}_{j_1+\frac{\Delta m}{2},\ \tilde{m}_1+\frac{\Delta m}{2};\ j_2,\ \tilde{m}_2} \qquad (6б)$$

в которых через $C^{\cdots}_{\cdots}$ обозначены выражения, являющиеся аналитическим продолжением коэффициентов Клебша-Гордана с полуцелых значений индексов на любые вещественные их значения. Далее, $j=(n_1+n_2+|m|)/2$, $m_1=(|m|+n_1-n_2)/2$, $m_2=(|m|+n_2-n_1)/2$, $j_1=(n+|m|)/4$, $j_2=(n-|m|-1)/4$, $\tilde{m}_1=(n+|m|-2n_3)/4$, $\tilde{m}_2=(n-|m-1)/4$.
Приведенные результаты подчеркивают красоту задачи о кулоновских и осцилляторных кольцеобразных смесях. При $\Delta m = 0$, т.е. при выключении аксиально-симметричной добавки выражения (6) переходят в результаты, известные из теории атома водорода и изотропного осциллятора. Мы видим, что включение поля $\Lambda/r^2\sin^2\theta$ не меняет математической структуры матриц W (коэффициенты Клебша-Гордана продолжают быть коэффициентами Клебша-Гордана) и все изменения сводятся к использованию сформулированного выше правила соответствия.

ВТОРАЯ ГЛАВА посвящена изложению формализма неоднородности и его применению к классическим и квантовым смесям.

В §2.1 на примере механической смеси сформулированы основы математического аппарата теории неоднородности.

(а) Найдено уравнение связи, выражающее функцию извлечения через функцию выхода и показано, что неоднородность порождается различием в функциях ε и γ.

(б) Обосновано, что в качестве критерия неоднородности смеси следует выбрать выражение

$$\mathcal{L} = \int_0^{\bar{\beta}} \left(1-\frac{\beta}{\bar{\beta}}\right)\gamma(\beta)\,d\beta \qquad (7)$$

в котором через $\bar{\beta}$ обозначена средняя концентрация признака в смеси.

(в) Доказано, что $\mathcal{L}$ - критерий может изменяться лишь в пределах $0 \leqslant \mathcal{L} \leqslant 1-\bar{\beta}$, причем $\mathcal{L}=0$ и $\mathcal{L}=1-\bar{\beta}$ для однородных и крайне неоднородных смесей.

(г) Введено понятие о состоянии неоднородности как о паре чисел $(\bar{\beta}, \mathcal{L})$. Каждое такое состояние включает в себя множество "микросостояний", т.е. γ - распределений и в этом смысле играет роль макросостояния.

(д) В силу неравенства $0 \leqslant \mathcal{L} \leqslant 1-\bar{\beta}$ состояния неоднородности могут размещаться лишь внутри, либо на границе равнобедренного прямоугольного треугольника, имеющего смысл диаграммы состояний неоднородности. Однородные состояния находятся на катете $\mathcal{L}=0$, крайне неоднородным состояниям соответствует гипотенуза. Близость смеси к крайне неоднородному состоянию определяется значением величины $E=\mathcal{L}/(1-\bar{\beta})$, названной в диссертации стадией неоднородности. О близости смесей по неоднородности можно судить по расстоянию между точками, соответствующими этим смесям на треугольнике неоднородности. Это обстоятельство лежит в основе классификации смесей по их неоднородности.

(е) Показано, что описанные выше представления и формулы справедливы и для когерентных квантовых смесей.

В §2.2 в рамках модели с дельта-образными функциями выхода проведено моделирование некоторых ситуаций, относящихся к классическим смесям. Соответствующие результаты изложены на языке диаграмм неоднородности.

(а) Исследована смесь, составленная из двух однородных подсмесей с различными концентрациями.

(б) Исследована смесь, составленная из одной однородной подсмеси и двух несмешавшихся остатков.

(в) На примере простой модели рассчитан эффект роста $\mathcal{L}$ - критерия под действием разделительного процесса.

(г) Доказано, что при смешивании произвольного числа подсмесей с одинаковой средней концентрацией соблюдается свойство квазиаддитивности $\mathcal{L}=\left(\sum M_i\mathcal{L}_i\right)/M$, где M - полная масса образовавшейся смеси, а M_i и $\mathcal{L}_i$ - массы и критерии неоднородности составляющих подсмесей.

В §2.3 исследуется картина неоднородности смесей, составленных из кулоновских кольцеобразных состояний. В квантовых смесях (3а) и (3б) признаками служат ℓ и n_2 соответственно (вместо n_2 можно выбрать n_1), а потому роль концентраций играют величины $\beta_c = \ell/(n-1)$ и $\beta_\pi = n_2/(n-m-1)$. Индексы "c" и "$п$" указывают на причастность концентраций к сферическим и к параболическим состояниям. Сосредоточено внимание на предельном случае $\Lambda=\infty$. При этом:

(а) Все точки на диаграмме объединяются в $\bar{\beta}_c$ - кластеры, число которых равно $n-1$.

(б) Расположение $\bar{\beta}_c$ - кластеров эквидистантно и при фиксированном n зависит лишь от значений, принимаемых квантовым числом $|m|$ (и, следовательно, не зависит от того, чему равны n_1 и n_2, если исключить то ограничение, что при данных n и $|m|$ должно быть фиксированно $\nu = n_1+n_2$).

(в) При $m = 0$, независимо от n, B_c - кластер занимает положение $\overline{B}_c = 1/2$, а самому правому $\overline{B}_c$ - кластеру соответствует $m = n - 1$ (этот кластер является точечным).

В диссертации показано, что перечисленные свойство однозначно приводят к формуле

$$\overline{B}_c = \frac{1}{2} + \frac{m}{2(n-1)} \qquad (8)$$

справедливой в пределе $\Lambda = \infty$.

Для смеси (3б) картина неоднородности проста: здесь все ансамбли, независимо от значений, принимаемых n и Λ, представляют собой $\overline{B}_\pi$- кластеры с $\overline{B}_\pi = 1/2$.

В §2.4 россмотрена картино неоднородности кольцеобразных смесей осцилляторного типа. Признаками здесь служат $B_c = \ell/n$ и $B_{n_3} = n_3/(n - |m|)$. В диссертации показано, что при включении параметра Λ и дальнейшем его увеличении, в ансамблях начинается процесс образовония кластеров с данным радиальным квантовым числом n_ϱ. Так, при $n = 20$ образуется 11 клостеров, в первом из которых ($n_\varrho = 10$) одна точко, во втором ($n_\varrho = 9$) три точки, в третьем ($n_\varrho = 8$) пять точек и т.д., до последнего кластеро ($n_\varrho = 0$), в котором 21 точко. При увеличении Λ одноточечный кластер с $n_\varrho = 10$ ("странная точка") отдаляется от всех других клостеров и устремляется в верхний угол треугольника неоднородности. Самый "тяжелый" кластер $n_\varrho = 0$ при $\Lambda \longrightarrow \infty$ стремится в нижний угол. Все другие n_ϱ-кластеры стремятся к горизонтальному катету (каждый в выбранное для него место).

В отличие от кулоновского случоя в осцилляторном обратное преобразование также является содержательным. Например, при $n = 30$ существует клостер из 15 точек, имеющий вид дуги с левым концом вблизи верхнего угло треугольника; это ($t = 0$) - кластер. В правой стороне образуется"пирамидо", содержащая $\mathcal{L}$ -кластеры и некоторые $\overline{B}$ - кластеры. При включении параметра Λ, ($t = 0$)-кластер устремляется в верхний угол, "пирамида" рассасывоется и начинается процесс, приводящий к визуально наблюдаемой организации кластеров с $\ell = n - 2$, $\ell = n - 4, \ldots, \ell = |m| + 2$ (соответствующие рисунки приведены в диссертации). При $\Lambda \longrightarrow \infty$ точки, входящие в эти кластеры стремятся попость но нижний катет треугольника неоднородности. Наконец, ($\ell = n$) - кластер стремится в нижний угол.

В §2.5 объясняются закономерности, выявленные в предыдущих двух порогрофох. Доказано, что в пределе $\Lambda = \infty$ коэффициенты смеси (3)

(матрицо W) переходят в d - функцию Вигнера со значением аргумента $\theta = \pi/2$. Это позволяет вывести осимптотическое свойство симметрии - инвариантность матрицы W в пределе $\Lambda = \infty$ относительно замены $t \longleftrightarrow n_z$ и зометить, что функциональная зависимость (8) является феноменологическим проявлением указанной симметрии. Для осцилляторных смесей показано, что соответствующая им матрица W в пределе $\Lambda = \infty$ переходит в символ Кронекера $\delta_{\ell, \nu + |m|}$, т.е. смесь стоновится однородной. Этим объясняется отмеченный в §2.4 факт, что точки но диагромме состояний при $\Lambda = \infty$ скатываются на горизонтальный котет. Более того, мы предсказываем, что положения, которые занимоют эти точки при $\Lambda = \infty$ определяются выражением $\overline{B} = (\nu + |m|)/n$. Анализ диаграмм состояний подтверждает это предсказание. Поведение "странной точки" объясняется тем, что при $\overline{B} = 0$ крайне неоднородное состояние скачком преобразуется в однородное состояние (§2.1). Таким образом, на диаграмме состояний мы видим "странную" точку лишь на "пороге" однородности. Понятен также другой эффект: в любом кластере с фиксированным m есть точка, которая при $\Lambda \to \infty$ стремится к нижнему углу диагроммы состояний. Эта точка с $\nu = n - |m|$. Для сферической осцилляторной кольцеобразной смеси из цилиндрических состояний $W(\infty) = \delta_{\nu, \ell - |m|}$. Тогдо, с учетом того, что $B = \nu/(n-|m|) = (\ell - |m|)/(n-|m|)$ становится понятным, что все смеси с $\ell = |m|$ образуют кластер, который при $\Lambda \to \infty$ движется в верхний угол треугольника неоднородности.

В §2.6 рассмотрен вопрос об относительных корреляциях признаков на примере двухкомпонентной смеси. Показано, что двухкомпонентной смеси соответствуют две инклюзивные функции выхода и четыре инклюзивные функции извлечения. В соответствии с этим в такой смеси участвуют четыре типа процессов смешивания, из которых два ответственны за неоднородность смеси по каждому из признаков, а два других - за относительные корреляции. Введен критерий относительных корреляций

$$\mathcal{L}_{ik} = \int_{\Delta k} \left[\gamma_k(B_k) - \varepsilon_i(B_k)\right] dB_k \qquad (9)$$

Здесь $i \neq k$, а $\gamma_k(B_k)$ есть инклюзивная функция выходо по k-му признаку. Функция $\varepsilon_i(B_k)$ определяется выражением

$$\varepsilon_i(B_k) = \frac{\overline{B_i(B_k)}}{\overline{B_i}}\,\gamma_k(B_k)$$

и называется функцией сопутствующего извлечения. Через $\overline{B_i}(B_k)$ обозначена средняя концентрация i-го признака в подсмеси с фиксированным значением концентрации второго признака. Область Δ_K - это область, в которой подинтегральное выражение в (9) положительно. Таким образом свойства неоднородности смеси определяются матрицей неоднородности $\mathcal{L}_{ik}$, о которой говорилось в начале нашего изложения. В диссертации доказано неравенство $0 \leq \mathcal{L}_{ik} \leq \mathcal{L}_i$. Далее, вводится понятие о независимости признаков в N - ом поколении и через него формулируется утверждение о том, что абсолютная независимость признаков представима как бесконечная последовательность этапов, в каждом из которых реализуется относительная независимость в соответствующем поколении.

<u>В ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ</u> решен ряд вопросов, связанных с кулоновской аномалией в одномерье, т.е. с двухкратным вырождением дискретного спектра в одномерном атоме водорода (обозначается через Н1, определяется потенциалом $\mathcal{U} = -\alpha/|x|$). Отношение кулоновской аномалии к формализму неоднородности объясняется тем, что всякой квантовой системе с двухкратно вырожденным энергетическим спектром может быть сопоставлена квантовая смесь, находящаяся в крайне неоднородном состоянии:

$$\Psi_E = a\Psi_{E\xi_1} + b\Psi_{E\xi_2} \tag{10}$$

Здесь ξ - это наблюдаемая, фиксирующая факт вырождения, ξ_1 и ξ_2 - ее собственные значения. Крайняя неоднородность смеси выявляется после перехода от наблюдаемой ξ к концентрации $B = (\xi-\xi_1)/(\xi_2-\xi_1)$.

В §3.1 в рамках модели сингулярного осциллятора выявлен сценарий образования аномальных для одномерья двухкратно вырожденных уровней энергии. В §3.2 исследуется вопрос о добавочном интеграле движения, ответственном за смеси типа (10) в квантовом одномерье (в контексте формулы (9) речь идет о наблюдаемой ξ). Выяснено, что таковым является знак координаты x и что $\operatorname{sgn} x$ сохраняется и для Н1, если в потенциале $\mathcal{U} = -\alpha/|x|$ считать точку $x = 0$ "выколотой". В §3.3 разобран вопрос об интеграле движения $\hat{A}$ в Н1 в предположении, что точка $x = 0$ не выколота. Показано, что

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\operatorname{sgn} x\,(\hat{p}^2 - 2E)$$

Оператор $\hat{A}$ обращается в $\operatorname{sgn} x$ на собственных функциях гамильтониана Н1 (за исключением волновой функции основного состояния $E_0 = -\infty$).

В §3.4 проведена проверка результатов, относящихся к импульсному

представлению с помощью прямого вычисления Фурье-образов волновых функций и сравнения полученных таким образом ответов с результатами, установленными ранее независимо от нас в координатном представлении. В §3.5 доказано, что Н1 является суперсимметричной системой. О возможности суперсимметрии Н1 говорит двухкратное вырождение его спектра, что не раз отмечалось и другими исследователями. Однако, наличие падения на центр в Н1 лишало возможности обычными методами ввести супералгебру и потому вопрос о суперсимметрии Н1 оставался лишь недоказанной догадкой. Предложенное в диссертации решение основано на идее о переходе к импульсному представлению и дальнейшему проецированию P-оси на единичную окружность. В результате всего этого задача о Н1 переходит в задачу о плоском ротаторе, причем $\varepsilon_n = (-2E_n)^{-1} = n^2$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, а ε_n и E_n - уровни энергии ротатора и Н1 соответственно. Таким образом, уровню $E_0 = -\infty$ соответствует уровень $\varepsilon_0 = 0$ и тем самым устраняется препятствие, о котором говорилось выше. Алгебра суперсимметрии реализуется в P-пространстве (т.е. как и симметрия O(2), суперсимметрия Н1 является скрытой) зарядовыми операторами

$$Q = (1 - \mathcal{P})(-i\partial\varphi), \quad Q^+ = (1 + \mathcal{P})(-i\partial\varphi)$$

где $\mathcal{P}$ - это оператор инверсии угла $\varphi \to -\varphi$, антикоммутирующий с оператором $\partial\varphi$.

В §3.6 исследованы особенности квазиклассики Н1, порождаемые сингулярностью потенциала $\mathcal{U} = -\alpha/|x|$. Прямое применение квазиклассического правила квантования приводит к уровням энергии, которые в четыре раза превышают результат точной теории. Этот результат был получен до нас и ему было приписано следующее обоснование: изоляция областей $x > 0$ и $x < 0$ приводит к сокращению размеров Н1 в два раза, что, в свою очередь означает увеличение модуля $|E_n|$ в четыре раза. Приведенное обоснование несостоятельно, т.к. все это автоматически должно быть учтено и в точной теории. Решение проблемы в том, что как следует из соотношения

$$\frac{d\lambda}{dx} = |x|^{-1/2}\left\{2(1 - |x||E|)\right\}^{-3/2}$$

(где λ - де-бройлевская длина волны частицы), квазиклассическое приближение нарушается не только в точках поворота $x = \pm|E|^{-1}$, но и в точке $x = 0$. Замеченный факт меняет условие квантования: вместо одного условия возникают два (в соответствии с двухкратной вырожденностью) условия. Эффективно это приводит к замене $n \to 2n$ в полученном до нас квазиклассическом результате $E_n = -4/2n^2$, т.е. к восстановлению результата точной теории.

В ЗАКЛЮЧЕНИИ сформулированы основные результаты диссертации.

НА ЗАЩИТУ ВЫНОСЯТСЯ следующие из них:

1. Предложен критерий, количественно оценивающий меру неоднородности смеси.

2. Введена диаграмма состояний, позволяющая проводить сравнение смесей и, следовательно, их классификацию и трактовать смесь как единый статистический объект.

3. Сформулирована и решена задача об относительных корреляциях признаков в смеси.

4. Построена модель моноэнергетических квантовых смесей в кольцеобразных потенциалах кулоновского и осцилляторного типа.

5. С помощью диаграммы состояний выявлены некоторые феноменологические закономерности, характерные для квантовых кольцеобразных смесей и найдено их объяснение.

6. Доказано, что факт крайней неоднородности смеси, индуцируемой одномерным атомом водорода, приводит к трем необычным следствиям: наличию добавочного интеграла движения, свойству суперсимметрии и модификации квазиклассического приближения.

РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ:

1. В.Луценко, И.Луценко, В.Тер-Антонян. Критерий неоднородности одномерных статистических систем. Доклады АН Арм.ССР, том 74, 213-216, 1982.

2. В.Луценко, И.Луценко, В.Тер-Антонян. Критерий относительных корреляций признаков во многомерных статистических системах. Доклады АН Арм.ССР, том 76, 133-136, 1983.

3. И.Луценко, Л.Мардоян, Г.Погосян, А.Сисакян, В.Тер-Антонян. К спектроскопии одномерного атома водорода. ОИЯИ, Р2-87-910, 1987.

4. А.Сисакян, И.Луценко, Л.Мардоян, Г.Погосян. Обобщение межбазисного осцилляторного разложения "цилиндр-сфера" в поле кольцеобразного потенциала. ОИЯИ, Р2-89-814, 1989.

5. А.Сисакян, В.Тер-Антонян, Г.Погосян, И.Луценко. Одномерный атом водорода в квазиклассическом приближении. ОИЯИ, Р2-89-160, 1989.

6. A.N.Sissakian, I.V.Lutsenko, G.S.Pogosyan, V.M.Ter-Antonyan, Three views of the problem of degeneration in the one-dimensional quantum mechanics. 5th International Symposium on Selected Topics in Statistical Mechanics, World Scientific, Singapore, 1990.

7. I.Lutsenko, L.Mardoyan, G.Pogosyan, A.Sissakian, V.Ter-Antonyan, Non-Relativistic Coulomb Problem in One-Dimensional Quantum Mechanics. J.Phys. A22, 2739-2749, 1989.

8. И.Луценко, Г.Погосян, А.Сисакян, В.Тер-Антонян. Атом водорода в роли индикатора скрытой симметрии кольцеобразного потенциала. ТМФ, 83, 419-427, 1990.

9. И.Луценко, В.Тер-Антонян. Неоднородность классических и квантовых смесей. Общая концепция. ОИЯИ, Р2-90-109, 1990.

10. A.Sissakian, V.Ter-Antonyan, G.Pogosyan, I.Lutsenko. Supersymmetry of a One-Dimensional Hydrogen Atom. Phys. Lett. A143, 247-249, 1990.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 июня 1991 года.