

П-286

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2 - 8822

ПЕСТОВ
Айвенг Борисович

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
В СФЕРИЧЕСКОМ МИРЕ ДЕ СИТТЕРА

Специальность 01.04.02 - теоретическая
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Дубна 1975

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики
Объединенного института ядерных исследований.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук
профессор

Н.А. ЧЕРНИКОВ,

кандидат физико-математических наук

Н.С. ШАВОХИНА.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук

Б.А. АРБУЗОВ,

доктор физико-математических наук

Б.М. БАРБАШОВ.

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Институт
физики АН БССР, г. Минск.

Автореферат разослан " " _____ 1975 года.

Защита диссертации состоится " " _____ 1975 года
на заседании Ученого совета Лаборатории теоретической физики
Объединенного института ядерных исследований.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета

Р.А. АСАНОВ

2 - 8822

ПЕСТОВ
Айвенг Борисович

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
В СФЕРИЧЕСКОМ МИРЕ ДЕ СИТТЕРА

Специальность 01.04.02 - теоретическая
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Выяснение роли гравитационного поля в теории элементарных частиц и, в частности, включение этого объекта в теорию квантовых полей является принципиальной необходимостью. Исследования в этой области только начинают развиваться, и поэтому даже построение квантовой теории полей, отличных от гравитационного, на фоне риманова мира представляет существенное продвижение на пути к решению указанной проблемы. Гравитационное поле при таком подходе выступает, согласно Эйнштейну, как внешнее классическое поле.

Задача квантования полей на фоне риманова мира была впервые поставлена Н.А.Черниковым и для случаев скалярного и спинорного полей решена Н.А.Черниковым, Э.А.Тагировым, Н.С.Ша-вохиной /1,2,3/.

В представляемой диссертации решается задача квантования электромагнитного поля на фоне римановых миров. Диссертация состоит из введения, трех глав и приложения. Во введении дан краткий обзор рассматриваемой задачи и полученных результатов.

В первой главе устанавливается глубокая связь между уравнениями Дирака и уравнениями Максвелла, определяется скалярное произведение в пространстве решений уравнений Максвелла, на основе этого скалярного произведения формулируются общие правила квантования электромагнитного поля в римановых мирах, доказываются конформная инвариантность этих правил. Выражением конформной инвариантности правил квантования является конформная инвариантность поведения фотонов.

Понятие спинорной связности возникло при решении следующей задачи: записать уравнения Дирака в общей теории относительности. Как известно, эта проблема была решена В.А.Фоком и Д.Д.Иваненко /4-12/. Последовательное рассмотрение уравнений Дирака в ри-

мановых мирах с сохранением и развитием точки зрения Э.Картана на спинор как на вполне определенный геометрический объект было проведено Н.А.Черниковым и Н.С.Шавохиной^{/2,3,13/}. В первом параграфе главы показано, что спинорная связность Фока-Иваненко Ω_α , изученная в работах^{/2,3,13/}, играет не меньшую роль и при записи уравнений Максвелла в общей теории относительности. Как показано в диссертации, уравнения Максвелла в римановых мирах можно записать в виде

$$H^\alpha \check{D}_\alpha F = 0, \quad (I)$$

где $\check{D}_\alpha F = e_\alpha F + \Omega_\alpha F - F \Omega_\alpha$, т.е. в виде уравнения Дирака. Таким образом установлено, что электромагнитное и спинорное поля, при всем их различии, имеют и общее основание.

Конформное векторное поле Киллинга K^α , как известно, удовлетворяет уравнениям

$$D_\alpha K_\beta + D_\beta K_\alpha = 2\eta_{\alpha\beta} J.$$

Эти уравнения имеют нетривиальное решение в том и только в том случае, когда риманов мир допускает группу конформных преобразований. Во втором параграфе доказано, что оператор \hat{K} , превращающий бивектор $F_{\alpha\beta}$ в бивектор $-i\hbar\{K^\mu D_\mu F_{\alpha\beta} + F_{\alpha\mu} D_\beta K^\mu + F_{\mu\beta} D_\alpha K^\mu\} = -i\hbar F_{\alpha\beta}$ и векторный потенциал A_α в векторный потенциал $-i\hbar\{K^\mu D_\mu A_\alpha + A_\mu D_\alpha K^\mu\} = -i\hbar A'_\alpha$, действует в пространстве решений уравнений Максвелла. Это есть оператор конформного момента импульса электромагнитного поля.

В третьем и четвертом параграфах определяется антисимметричное скалярное произведение

$$(A, B) = \int_{\Sigma} (B^\nu A_{\nu\mu} - A^\nu B_{\nu\mu}) d\sigma^\mu \quad (2)$$

в пространстве решений уравнений Максвелла, доказывается его калибровочная инвариантность и устанавливаются следующие свойства:

$$(A', B) = (B', A), \quad (3)$$

$$(B', A) = \int_{\Sigma} K^\nu N_{\nu\mu} d\sigma^\mu. \quad (4)$$

Здесь $A_{\nu\mu}$, $B_{\nu\mu}$ - пара решений уравнений Максвелла, имеющих потенциалы A_ν , B_ν ,

$$N_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} A_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} + A_{\mu\alpha} B_{\nu\beta} \eta^{\alpha\beta} + A_{\nu\alpha} B_{\mu\beta} \eta^{\alpha\beta},$$

K^α - конформный вектор Киллинга. Следствием (4) является равенство

$$\frac{1}{2i\hbar} (A, \hat{K}A) = \int_{\Sigma} K^\mu T_{\mu\nu} d\sigma^\nu, \quad (5)$$

связывающее среднее значение оператора \hat{K} относительно скалярного произведения (2), с выражением конформного момента импульса поля через тензор энергии-импульса.

Квантование электромагнитного поля даже в плоском случае с самого начала вызвало большие трудности, так как оказалось, что к электромагнитному полю процедура канонического квантования непосредственно не применима. В известных работах Дирака, Паули, Гейзенберга, Фока, Ферми эти трудности преодолевались тем или иным способом. В пятом параграфе излагается наш подход к проблеме

квантования электромагнитного поля. Он имеет основанием введенное выше скалярное произведение (A, B) в пространстве решений уравнений Максвелла и выражается правилами квантования, пригодными в любом римановом мире и, конечно, в том числе и в плоском мире.

Конформная инвариантность поведения фотонов означает, что фотоны ведут себя в мире с некоторой метрикой $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ так же, как и в мире с метрикой

$$ds^{*2} = B^2(x^0, x^1, x^2, x^3) ds^2.$$

Для доказательства достаточно убедиться в конформной инвариантности уравнения (I), скалярного произведения (A, B) и интеграла (4). Это доказательство дано в шестом параграфе. Конформная инвариантность тесно связана с автомодельностью глубоконоупругих процессов, обоснованной Н.Н.Боголюбовым, В.С.Владимировым, А.Н.Тавхелидзе /I4, I5/.

В седьмом, заключительном, параграфе первой главы с новых позиций, изложенных в пятом параграфе, рассмотрена хорошо известная кулоновская калибровка квантовой теории электромагнитного поля.

Во второй главе общие принципы квантовой теории электромагнитного поля реализуются на примере конформно-статических римановых миров. Статический риманов мир можно представить как прямое произведение временной оси T и трехмерного риманова пространства V_3 . Для сравнения заметим, что плоский мир можно представить как прямое произведение оси времени T и евклидова пространства

E_3 . Таким образом, рассмотрение квантовой теории электромагнитного поля в таких мирах является важным и интересным хотя бы

потому, что приводит к выяснению того, как влияет замена евклидова пространства на риманово.

Кроме того, ввиду доказанной конформной инвариантности поведения фотонов наряду со статическими римановыми мирами мы охватываем и конформно-статические римановы миры Фридмана.

В первом параграфе получены уравнения для поперечной составляющей векторного потенциала.

Во втором параграфе исследованы свойства оператора

$$\hat{P} = * d,$$

который позволяет дать квантовомеханическое описание поляризованных состояний электромагнитного поля. При этом установлено, что наличие у электромагнитного поля двух состояний поляризации является следствием таких свойств пространства, как ориентируемость и инвариантность относительно изометрических отражений.

В третьем параграфе найдены собственные значения и собственные векторы оператора \hat{P} для случая трехмерной сферы, что позволило получить весь спектр частот электромагнитного поля в сферическом пространстве. Минимальная частота оказалась отличной от нуля и равной $\nu_{min} = \frac{2C}{\lambda}$, где C - скорость света,

λ - абсолютная длина (радиус 3-сферы). Интересно, что для безмассовой скалярной частицы $\nu_{min} = \frac{C}{\lambda}$ /I/, а для нейтрино $\nu_{min} = \frac{3C}{2\lambda}$ /I6/. Здесь легко усматривается зависимость ν_{min} от спина.

Вторая глава завершается (§ 4) построением кулоновской калибровки квантовой теории электромагнитного поля в конформно-статических римановых мирах. Скалярное произведение (а, следовательно, и правила квантования) выражается через поперечную составляющую векторного потенциала. Показано, что перестановочная

функция поперечной составляющей вторично квантованного векторного потенциала дает решение задачи Коши для определяющих ее уравнений. Эти уравнения решены разделением переменных, что позволило ввести полную счетную совокупность операторов рождения и уничтожения фотонов. Найдено выражение для вторично квантованного оператора канонического момента импульса, определяемого векторным полем $\frac{\partial}{\partial t}$, через операторы рождения и уничтожения фотонов. По существу, этот оператор является оператором энергии. Его значение состоит в том, что он позволяет однозначно определить вакуумное состояние электромагнитного поля.

В третьей главе диссертации последовательно построена квантовая теория электромагнитного поля в сферическом мире де Ситтера. Среди римановых миров сферический мир де Ситтера представляет особый интерес. Сферический мир, наряду с плоским миром, допускает десятипараметрическую группу изометрий. В таком мире та или иная физическая система оказывается как бы помещенной в сферический ящик. К искусственному приему помещения изучаемой системы в кубический ящик нередко прибегают для того, чтобы от операторов с непрерывным спектром перейти к операторам с дискретным спектром. При этом ввиду условий периодичности, накладываемых на полевые функции, имеют дело с 3-мерным тором, локальная геометрия которого остается евклидовой. Весь же мир оказывается прямым произведением этого тора на временную ось. Но такой мир допускает всего лишь 4-параметрическую группу изометрий. В сферическом же мире группа изометрий, как уже говорилось, имеет десять параметров. Таким образом, сферический мир приводит к методу инвариантного ящика, который еще в скалярном и спинорном случаях был выдвинут и разработан Н.А.Черниковым, Э.А.Тагировым, Н.С.Ша-

вохиной^{/1,17/}. Здесь же этот метод распространяется на электромагнитное поле.

Изучение уравнений атомной физики в мире де Ситтера было начато в 1935 году П.Дираком^{/18/}. В этой работе он предложил как уравнение для описания поведения электронов и позитронов, так и уравнения электромагнитного поля.

В первом параграфе главы, применяя к уравнению (I) спинорную технику, развитую в работе^{/17/} для уравнений Дирака, мы приходим к особой форме уравнений электромагнитного поля в сферическом мире де Ситтера, согласующихся с уравнениями, указанными Дираком. Особая форма уравнений Максвелла обусловлена тем, что все величины относятся к внешнему базису dx , тогда как в общем случае они относятся к внутреннему базису f .

Сферический мир де Ситтера является частным случаем канонично-статических миров. Поэтому все результаты, полученные во второй главе, относятся и к миру де Ситтера.

Особая форма этих результатов, изложенных во втором, третьем и четвертом параграфах третьей главы, определяется тем, что все величины относятся к внешнему базису dx , а не к внутреннему базису f .

В диссертации широко используются ортогональный репер, внешние дифференциальные формы. Эти понятия еще только начинают применяться в теоретической физике, в работах разных авторов нет общего согласия в обозначениях, и, кроме того, разбрасывать необходимые сведения о них по всей диссертации нам казалось нецелесообразным. Поэтому мы сочли нужным написать приложение, в котором все необходимые сведения представлены как единое целое.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах /19-24/.

Л и т е р а т у р а

- I. H.A.Chernikov, M.A.Tajirov. Ann.Inst.Henri Poincare, 9, 109-141, 1968;
Препринт ОИЯИ P2-3777, Дубна, 1968.
2. H.A.Черников, H.C.Шавохина. Препринт ОИЯИ, P2-6109, Дубна, 1971.
3. H.A.Черников. Материалы III совещания по нелокальной теории поля, ОИЯИ, 2-7161, Дубна, 1973.
4. A.П.Котельников, В.А.Фок. Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.
5. V.Fock. Zeithr. f. Phys. 57, 261-277, 1929.
6. В.А.Фок. Журнал Русского физ.-хим.общ., часть физ., т.62, 1930.
7. Д.Д.Иваненко. Известия АН СССР, 73, 1929.
8. V.Fock, D.Ivanenko. Z.Phys. 54, 796, 1928.
9. V.Fock, D.Ivanenko. C.R.Paris, 188, 1470, 1929.
10. V.Fock, D.Ivanenko. Z.Phys. 30, 648, 1929.
11. A.A.Соколов, Д.Д.Иваненко. Квантовая теория поля, ГИТТЛ, М.-Л., 1952.
12. D.Ivanenko. Gravitation and Unified picture of matter, Attid,ouvegno, S.Relativity, Firenze, 1965.
13. H.C.Шавохина. ТМФ, 10,3,412-423, 1972.
14. H.H.Боголюбов, В.С.Владимиров, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ, 12, 1 3-17, 1972.
15. H.H.Боголюбов, В.С.Владимиров, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ, 12,3, 305-330, 1972.
16. H.A.Черников, H.C.Шавохина. ТМФ, 16,1, 77-89, 1973;
Препринт ОИЯИ, P2-6351, Дубна, 1972.

17. H.A.Черников, H.C.Шавохина. ТМФ 15, 1, 91-99, 1973;
Препринт ОИЯИ, P2-6173, Дубна, 1971.
18. P.A.M.Dirac. Ann.Math., 36, 3, 657-669, 1935.
19. A.Б.Пестов. Препринт ОИЯИ, P2-5798, Дубна, 1971.
20. A.Б.Пестов. В сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц", вып. 5, М., Атомиздат, 1974.
21. A.Б.Пестов, H.A.Черников, H.C.Шавохина. Препринт ОИЯИ, P2-7829, Дубна, 1974.
22. A.Б.Пестов. Препринт ОИЯИ, P2-8070, Дубна, 1974.
23. A.Б.Пестов, H.A.Черников, H.C.Шавохина. Препринт ОИЯИ, P2-8370, Дубна, 1974.
24. A.Б.Пестов. Препринт ОИЯИ, P2-8418, Дубна, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 апреля 1975 года.