ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 531.314,530.182

2-87-60

ГЕРДЖИКОВ

Владимир Стефанов

ПОРОЖДАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ СОЛИТОННОГО ТИПА, СВЯЗАННЫХ С ПОЛУПРОСТЫМИ АЛГЕБРАМИ ЛИ

Специальность: 01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1987

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
член-корреспондент АН СССР

ЗАХАРОВ
Владимир Евгеньевич

доктор физико-математических наук,
профессор

ЖИДКОВ
Евгений Петрович

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник

САВЕЛЬЕВ
Михаил Владимирович

Ведущая организация - Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР, Москва.

Автореферат разослан " " ________________ 1987 г.

Защита состоится " " ________________ 1987 г. на заседании специализированного совета Д047.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Ученый секретарь совета
кандидат физико-математических наук

В.И. Журавлев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы определяется важным значением метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), открытого М. Гарднером, Дж. Грином, М. Крускалом, Р. Миурой и П. Лаксом для исследования нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ) математической физики. Сильный толчок к дальнейшему развитию МОЗР и расширению сферы его применимости дали пионерские работы В.Е.Захарова, Л.Д.Фаддеева и А.Б.Шабата, см. /1-4/. Они не только исчерпывающе исследовали такие важные для физики уравнения, как уравнения Кортевега - де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) и уравнение синус-Гордона, но и дали их интерпретацию как бесконечномерных вполне интегрируемых гамильтоновых систем.

В последующий, сравнительно короткий период было найдено большое число точно решаемых НЭУ солитонного типа и установлен ряд их основных свойств: а) возможность их представления в виде условия совместности двух линейных задач $[L, M] = 0$ (представление Лакса); б) возможность явного вычисления солитонных решений, обладающих устойчивостью и частицеподобными свойствами; в) наличие бесконечного числа законов сохранения; г) существование гамильтоновой формулировки, а для многих из них и явное выражение для переменных действие - угол. В результате усилий большого числа исследователей в настоящее время каждое из этих свойств можно вывести многими способами. Из них мы упомянем наиболее эффективные: рекуррентный подход, развитый в работе /5/ для построения представлений Лакса исходя из данной линейной задачи L; метод одевания Захарова - Шабата для вычисления солитонных решений; метод, основанный на формулах следов для вычисления законов сохранения, и др. Эти методы, разработанные сначала на примерах систем типа Штурма - Лиувилля и Захарова - Шабата, были быстро перенесены и на ряд других вспомогательных линейных задач L, в том числе и разностных; мероморфные пучки общего вида исследовались в /6/.

Важным инструментом для систематизации этих НЭУ явилось понятие калибровочной эквивалентности, введенное В.Е.Захаровым, А.В.Михайловым и Л.А. Тахтаджяном. Оно позволило установить эквивалентность между целыми классами НЭУ, в том числе и эквивалентность НУШ и уравнения ферромагнетика Гейзенберга (ФГ). В настоящее время вскрыта глубокая внутренняя симметрия этих НЭУ, позволившая связать их с бесконечномерными алгебрами типа Каца - Муди, см. /3,4/.

Особое место в этом круге идей занимает идея об интерпретации МОЗР как обобщенного преобразования Фурье, которая возникла в /5/ на примере системы Захарова – Шабата L_0. В этой же работе были построены интегродифференциальные операторы Λ_0^+, Λ_0^-, порождающие класс соответствующих НЭУ, и их собственные функции $\Psi_0^{\pm}(x,\lambda)$, $\Phi_0^{\pm}(x,\lambda)$ – "квадраты" решений Йоста L_0. Дальнейшее развитие этой идеи связано с более глубоким исследованием отображения $\mathcal{F}_0$: $\mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{T}_0$, где $\mathcal{M}_0$ – класс допустимых потенциалов L_0, а $\mathcal{T}_0$ –минимальный набор данных рассеяния. Так, в /7/ впервые получено соотношение полноты для систем $\{\Psi_0^{\pm}(x,\lambda)\}$ и $\{\Phi_0^{\pm}(x,\lambda)\}$; улучшенный метод доказательства этого соотношения привел к построению спектральной теории операторов Λ_0^+, Λ_0^- /8/ и к выяснению того факта, что отображение $\mathcal{F}_0$ непосредственно связано со спектральными разложениями порождающих операторов Λ_0^+ и Λ_0^-. На базе полученных в /8,9/ разложений для потенциала L_0 и его вариации по системам $\{\Psi_0^{\pm}\}$, $\{\Phi_0^{\pm}\}$ удалось на единой основе вывести ряд основных свойств НЭУ и выяснить фундаментальную роль порождающих операторов $\Lambda_0^{\pm}$ в теории этих уравнений. Так, операторы $\Lambda_0^{\pm}$ порождают: I) класс НЭУ и их представлений Лакса; 2) законы сохранения НЭУ; 3) иерархию гамильтоновых структур НЭУ; и, наконец, при этом становится очевидной интерпретация МОЗР как обобщенного преобразования Фурье.

Развитый в /8,9/ метод разложений по "квадратам" решений L_0, однако, не является калибровочно-ковариантным. Существенно использовался также тот факт, что L_0 – линейный 2x2 матричный оператор первого порядка (т.е. связан с алгеброй $sl(2)$) и следующие отсюда свойства аналитичности столбцов решений Йоста L_0.

В то же время было установлено /I,3,4,IO–I2/, что ряд важных НЭУ, таких, как уравнения n – волн, киральных полей, ряд обобщений НУШ и ФГ допускают представления Лакса $[L, M] = 0$ или $[\tilde{L}, \tilde{M}] = 0$, где L – естественное обобщение системы Захарова – Шабата на полупростые алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с рангом $r > 1$, а $\tilde{L}$ – системы, калибровочно-эквивалентные L (см. формулы (I) и (2) ниже). Напрашивалась мысль, что метод разложений по "квадратам" решений обобщается и для этих систем.

Другой круг вопросов связан с выяснением того, насколько свойства НЭУ зависят от выбора конкретного представления $V^{(\omega)}$ алгебры $\mathfrak{g}$. Нетрудно убедиться, например, что явный вид НЭУ не зависит от $V^{(\omega)}$. В то же время при анализе обратной задачи рассеяния (т.е. отображения $\mathcal{F} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{T}$) и при выводе солитонных решений существенно использовались только простейшие представления $\mathfrak{g}$.

Цель работы: исследовать прямую и обратную задачи рассеяния для обобщенных систем Захарова – Шабата L в зависимости от выбора представления $V^{(\omega)}$ алгебры $\mathfrak{g}$. Построить калибровочно-ковариантную формулировку теории порождающих операторов $\Lambda_{\pm}$ и на ее основе вывести единым образом свойства I)-4) для НЭУ типа НУШ, интегрируемых при помощи L; выделить новые физически интересные примеры НЭУ. Пользуясь явной ковариантностью формулировки, получить результаты I)-4) для НЭУ типа ФГ, связанных с калибровочно-эквивалентными системами $\tilde{L}$. Изучить возможности дальнейших обобщений метода.

Научная новизна диссертации заключается в применении спектральных разложений порождающих операторов для исследования фундаментальных свойств НЭУ солитонного типа, связанных с полупростыми алгебрами Ли. При этом впервые предложена калибровочно-ковариантная формулировка этих разложений и исследована зависимость формулировки обратной задачи рассеяния от выбора представления $V^{(\omega)}$ алгебры $\mathfrak{g}$.

Построены системы присоединенных решений $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$, связанных с L и обобщающих "квадраты" решений $\{\Psi_0^{\pm}\}$, $\{\Phi_0^{\pm}\}$. Вычислены порождающие операторы $\Lambda_{\pm}$, для которых $\{\Psi\}$, $\{\Phi\}$ являются собственными функциями.

Доказано свойство полноты присоединенных решений $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$. Получены разложения для потенциала L и его вариации по системам $\{\Psi\}$, $\{\Phi\}$. Из них и из соответствующих формул обращения следует с очевидностью интерпретация МОЗР как обобщенного преобразования Фурье.

Спектральные разложения порождающих операторов использованы для вывода фундаментальных свойств НЭУ типа n – волн и НУШ, интегрируемых при помощи L.

Впервые построены спектральные разложения для калибровочно-эквивалентных порождающих операторов $\tilde{\Lambda}_{\pm}$ и с их помощью сформулированы фундаментальные свойства НЭУ типа ФГ.

Показана применимость метода разложений по присоединенным решениям для полиномиальных обобщений L, для некоторых разностных аналогов L, а также в случаях, когда $\mathfrak{g}$ является простой супералгеброй Ли.

Практическая ценность. Проведено детальное исследование фундаментальных свойств и найдены новые примеры НЭУ типа n – волн, НУШ и ФГ на однородных и симметрических пространствах. Единым образом, исходя из спектральной теории операторов $\Lambda_{\pm}$, $\tilde{\Lambda}_{\pm}$, описаны их представления Лакса, законы сохранения и иерархии гамильтоновых структур. Это позволило глубже понять ряд сугубо нелинейных процессов в оптике, физике сверхпроводимости, физике плазмы и т.п., которые, как хорошо известно, описываются вышеупомянутыми уравнениями; эти же уравнения играют важную роль и как модели классической теории поля в дифференциальной геометрии и т.д., см. /1-4/. Результаты, вошедшие в диссертацию, цитируются в более чем 60 работах, посвященных НЭУ солитонного типа, в том числе и в монографиях /2,3/.

ДЛЯ ЗАЩИТЫ ВЫДВИГАЮТСЯ СЛЕДУЮЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В ДИССЕРТАЦИИ:

1. Для обобщенных систем Захарова - Шабата L, связанных с полупростыми алгебрами Ли, решены прямая и обратная задачи рассеяния при любом выборе представления $V^{(\omega)}$ алгебры $\mathfrak{g}$. Впервые выделен минимальный набор данных рассеяния $\mathcal{T}$, не зависящий от выбора представления $V^{(\omega)}$.

2. Впервые предложен калибровочно-ковариантный подход при изучении отображения $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{T}$, где $\mathcal{M}$ - класс допустимых потенциалов в L. Доказано, что отображение $\mathcal{F}$ эквивалентно построению разложений по системам $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$ присоединенных решений L.

3. Построена функция Грина $G(x,y,\lambda)$, с помощью которой доказано соотношение полноты для систем $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$. Намечена спектральная теория порождающих операторов Λ_+ и Λ_-, для которых $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$ являются собственными функциями.

4. Впервые спектральные разложения порождающих операторов $\Lambda_\pm$ использованы для вывода таких фундаментальных свойств НЭУ, как: а) описание класса НЭУ, связанных с данной линейной задачей L; б) построение плотностей интегралов движения НЭУ; в) построение иерархий гамильтоновых структур НЭУ. Таким образом, продемонстрирована фундаментальная роль порождающих операторов $\Lambda_\pm$ при описании и исследовании НЭУ.

5. Впервые построены спектральные разложения для порождающих операторов $\bar{\Lambda}_\pm$, связанных с системами $\bar{L}$, калибровочно-эквивалентных L. Предложен способ вычисления операторов $\bar{\Lambda}_\pm$ и с их помощью сформулированы фундаментальные свойства калибровочно-эквивалентных НЭУ.

6. Доказана применимость метода разложений по присоединенным решениям для полиномиальных обобщений L, а также для некоторых разностных аналогов L. Вычислены соответствующие порождающие операторы и сформулированы основные свойства соответствующих нелинейных и разностных эволюционных уравнений. Таким образом, установлено, что

интерпретация МОЗР как обобщенного преобразования Фурье носит общий характер.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах в Лаборатории теоретической физики и Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, проблемной группы теории элементарных частиц Института ядерных исследований и ядерной энергетики в Софии, отдела квантовой теории поля МИАН СССР (Москва), Отделов теоретической физики ИФВЭ (Протвино), ЛОМИ АН СССР (Ленинград), ИТФ АН СССР (Москва); на международных конференциях по математической физике в Лозанне в 1979 г. и "Солитоны-82" в Эдинбурге в 1982 г.; на международных совещаниях по нелинейным эволюционным уравнениям и динамическим системам в Триесте в 1981 г. и в Галиполи в 1985 г. (Италия); на международных семинарах по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля в Протвино в 1979 и 1980 г.; на международных симпозиумах по специальным проблемам в калибровочных теориях в Аренсхопе в 1984 (ГДР) и по избранным проблемам статистической механики в Дубне в 1984 г. и др.

Публикации: по результатам диссертации опубликовано 20 работ.

Объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, пяти приложений и списка литературы. Она содержит 349 страниц машинописного текста, 7 рисунков. Список литературы состоит из 242 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит краткий обзор литературы, постановку и актуальность задач, рассмотренных в диссертации, а также ее краткое содержание по главам.

Первая глава посвящена исследованию прямой и обратной задач рассеяния для естественного обобщения системы Захарова - Шабата:

$$L\Psi(x,\lambda) \equiv \left[i\frac{d}{dx} + q(x) - \lambda J \right]\Psi(x,\lambda) = 0,$$

$$J = \mathrm{const}, \quad \lim_{x\to\pm\infty} q(x) = 0, \quad J, q(x) \in \mathfrak{g}, \qquad (1)$$

где потенциал $q(x)$ принадлежит пространству комплекснозначных функций типа Шварца $\mathcal{S}_{\mathfrak{g},J}$ вида $q(x) = [J, q_1(x)]$, а J - постоянный вещественный элемент подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В основном тексте исследуются отдельно три разных случая: а) J - регулярный элемент $\mathfrak{h}$, и L не имеет дискретного спектра; б) J - нерегулярный элемент $\mathfrak{h}$, и L не имеет дискретного спектра; в) J - регулярный элемент $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} \simeq sl(n)$ и L имеет конечное число простых дискретных собственных значений. Для краткости ниже мы ограничимся только случаем а).

Параграф I носит вспомогательный характер. В нем вводятся необходимые обозначения и собраны основные сведения из теории полупростых алгебр Ли.

В § 2 при любом выборе неприводимого представления $V^{(\omega)}$ построены фундаментальные решения $\chi^{\pm}(x,\lambda)$ системы (I), обладающие свойствами аналитичности по спектральному параметру λ. Способ их построения естественным образом обобщает метод Захарова – Манакова – Шабата, предложенный для типичного представления $V^{(\omega_1)}$ алгебры $sl(n)$, и основывается на изучении разложений Гаусса для соответствующей матрицы перехода $T(\lambda)$. Доказано, что функции $\mathcal{D}_j^{\pm}(\lambda) = \langle \omega_j^{\pm} | T(\lambda) | \omega_j^{\pm} \rangle$ аналитичны по λ при $\operatorname{Im}\lambda \gtrless 0$ соответственно, а их нули определяют дискретный спектр системы L. При этом матрицу перехода $T(\lambda)$ следует рассматривать в j-м фундаментальном представлении $V^{(\omega_j)}$ алгебры $\mathfrak{g}$, а $|\omega_j^{+}\rangle$ ($|\omega_j^{-}\rangle$) – старший (младший) весовой вектор в этом представлении. Все построения этого параграфа легко переносятся и на систему:

$$\tilde{L}\tilde{\Psi}(x,\lambda) = \Big[i\frac{d}{dx} - \lambda S(x) \Big] \tilde{\Psi}(x,\lambda) = 0,$$

$$S(x) = \Psi_0^{-1}(x)\, J\, \Psi_0(x), \qquad \Psi_0(x) = \Psi(x,\lambda=0), \tag{2}$$

калибровочно-эквивалентную (I); при этом на $S(x)$ накладывается естественное для ферромагнетиков условие $\lim\limits_{x\to\pm\infty} S(x) = J$.

В § 3 построено ядро резольвенты системы (I). Выявлен характер особенностей $\chi^{\pm}(x,\lambda)$ в окрестностях точек дискретного спектра L и их зависимость от выбора представления $V^{(\omega)}$. Доказано соотношение полноты для собственных функций (I).

В § 4 построен минимальный набор данных рассеяния $\mathcal{T}$, не зависящий от выбора представления $V^{(\omega)}$. Получены дисперсионные соотношения для $\mathcal{D}_j^{\pm}(\lambda)$, причем их скачок на вещественной оси выражен явно через элементы $\mathcal{T}$. Это позволяет по заданному $\mathcal{T}$ восстановить функции $\mathcal{D}_j^{\pm}(\lambda)$ во всей их области аналитичности. Дальнейший анализ показывает, что по $\mathcal{T}$ однозначно восстанавливается как $T(\lambda)$, так и соответствующий потенциал $q(x)$.

Вторая глава посвящена более подробному изучению отображения $\mathcal{F}: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{T}$. В § 5 показано, что $\mathcal{F}$ связано с разложениями по присоединенным решениям системы (I):

$$\{\Psi\} = \{ \mathbb{P}_0 e_{\alpha}^{+}(x,\lambda),\ \mathbb{P}_0 e_{-\alpha}^{-}(x,\lambda),\ \alpha>0,\ \lambda\in\mathbb{R} \},$$

$$\{\Phi\} = \{ \mathbb{P}_0 e_{-\alpha}^{+}(x,\lambda),\ \mathbb{P}_0 e_{\alpha}^{-}(x,\lambda),\ \alpha>0,\ \lambda\in\mathbb{R} \},$$

$$e_{\alpha}^{\pm}(x,\lambda) = (\chi^{\pm} E_{\alpha} \chi^{\pm\,-1})(x,\lambda), \quad h_j^{\pm}(x,\lambda) = (\chi^{\pm} H_j \chi^{\pm\,-1})(x,\lambda), \tag{3}$$

где проектор $\mathbb{P}_0 = ad_J^{-1} \cdot ad_J \cdot$, а E_{α}, H_j, $\alpha \in \Delta$, $j = 1,\dots,r$ – базис Картана – Вейля и система корней алгебры $\mathfrak{g}$. Построена функция Грина $G(x,y,\lambda)$, с помощью которой доказано соотношение полноты для систем $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$ в пространстве $\mathcal{S}_{\mathfrak{g},J}$. Явно вычислены порождающие операторы $\Lambda_{\pm}$:

$$(\Lambda_{\pm} z)(x) = ad_J^{-1} \cdot \Big\{ i\frac{dz}{dx} + \mathbb{P}_0 [q(x), z(x)] + i\Big[q(x), (\mathbb{1}-\mathbb{P}_0)\int_{\pm\infty}^{x} dy\, [q(y), z(y)]\Big]\Big\}, \quad \forall z \in \mathcal{S}_{\mathfrak{g},J}, \tag{4}$$

для которых $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$ являются собственными функциями.

В § 6 получены разложения для потенциала $q(x)$ и его вариации $\delta q(x)$ по системе $\{\Psi\}$:

$$ad_J^{-1}[B, q(x)] = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{\alpha>0} \mathbb{P}_0 \{ \rho_{B,-\alpha}^{+}(\lambda)\, e_{\alpha}^{+}(x,\lambda) - \rho_{B,\alpha}^{-}(\lambda)\, e_{-\alpha}^{-}(x,\lambda) \}, \tag{5}$$

$$ad_J^{-1}\delta q(x) = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{\alpha>0} \mathbb{P}_0 \{ \delta'\rho_{-\alpha}^{+}(\lambda)\, e_{\alpha}^{+}(x,\lambda) - \delta'\rho_{\alpha}^{-}(\lambda)\, e_{-\alpha}^{-}(x,\lambda) \}, \tag{6}$$

и аналогичные им разложения по системе $\{\Phi\}$; через B в (5) обозначен регулярный элемент $\mathfrak{h}$. Справедливы также формулы обращения:

$$\rho_{B,\mp\alpha}^{\pm}(\lambda) = [\![ad_J^{-1}[B,q],\, e_{\mp\alpha}^{\pm}(x,\lambda)]\!], \quad \delta'\rho_{\mp\alpha}^{\pm}(\lambda) = [\![ad_J^{-1}\delta q(x),\, e_{\mp\alpha}^{\pm}(x,\lambda)]\!], \tag{7}$$

$$[\![X, Y]\!] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \langle X, [J, Y] \rangle, \quad \forall\, X, Y \in \mathcal{S}_{\mathfrak{g},J}, \tag{8}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ – форма Киллинга на $\mathfrak{g}$. Доказано, что набор коэффициентов разложения $\mathcal{T}' \equiv \{ \rho_{B,-\alpha}^{+}(\lambda),\ \rho_{B,\alpha}^{-}(\lambda) \}$ эквивалентен набору $\mathcal{T}$. Получены свойства биортогональности присоединенных решений $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$ по отношению к кососкалярному произведению (8), из которых следует линейная независимость систем $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$.

В § 7 построены основы спектральной теории порождающих операторов $\Lambda_{\pm}$. Показано, что введенная в § 6 функция $G(x,y,\lambda)$ тесно связана с ядрами резольвент операторов Λ_{+} и Λ_{-}; таким образом, разложения (5) и (6) имеют смысл спектральных разложений для оператора Λ_+ . Кососкалярное произведение (8) снабжает пространство $\mathcal{S}_{\mathfrak{g},J}$ невырожденной метрикой, относительно которой Λ_+ и Λ_- сопряжены друг другу:

$$[\![X, \Lambda_+ Y]\!] = [\![\Lambda_- X, Y]\!] \ . \tag{9}$$

Третья глава посвящена использованию разложений (5) и (6) для вывода фундаментальных свойств соответствующих НЭУ. Несмотря на обилие различных способов и подходов к их выводу мы убеждаемся, что в их основу можно положить спектральную теорию порождающих операторов. При этом становится очевидной интерпретация МОЗР как обобщенного преобразования Фурье.

В § 8 получено описание класса НЭУ солитонного типа, связанных с L . Доказана теорема: для того, чтобы $q(x,t)$ удовлетворяло НЭУ:

$$i\, ad_J^{-1} \cdot q_t + \sum_{k=1}^{r} f_k(\Lambda_+) [H_j^\vee, ad_J^{-1} \cdot q(x,t)] = 0, \tag{I0}$$

где $f_k(\lambda)$ –мероморфные функции λ , необходимо и достаточно, чтобы данные рассеяния $\mathcal{T}$ удовлетворяли соответствующим линейным уравнениям по t . Это уточняет результаты других авторов /2,5,II/, которые могли доказать только необходимость этого условия.

В следующем § 9 получены компактные выражения для плотностей интегралов движения $d_j^{(k)}$ через порождающие операторы; их порождающими функционалами являются функции $\mathcal{D}_j^{\pm}(\lambda)$:

$$\mathcal{D}_j^{\pm}(\lambda) = \sum_{k=1}^{r} d_j^{(k)} \cdot \lambda^{-k}, \qquad \lambda \gg 1,$$

$$\frac{2 d_j^{(k)}}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{x} dy \, \langle [J, q(y)], \Lambda_+^k [H_j^\vee, ad_J^{-1} q(y)] \rangle, \tag{II}$$

$$\frac{2 \delta d_j^{(k)}}{(\alpha_j, \alpha_j)} = -i [\![ad_J^{-1} \cdot \delta q(x), \Lambda_+^{k-1} [H_j^\vee, ad_J^{-1} \cdot q(x)]]\!] ,$$

где α_j , $j = 1,2, \ldots,$ – система простых корней алгебры $\mathfrak{g}$, а $\{H_j^\vee\}$ – базис в $\mathfrak{h}$, сопряженный к $\{H_j\}$: $\langle H_k, H_j^\vee \rangle = \delta_{jk}$.

В § I0 выведены компактные формулы для представлений Лакса через порождающие операторы. Приводится также простой вывод обобщенных соотношений Вронского, лежащих в основе метода Ф. Калоджеро и А. Дегаспериса /2/.

В § II доказана гамильтоновость НЭУ (I0). Роль фазового пространства играет многообразие $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}_{\mathfrak{g},J}$ всех допустимых потенциалов $q(x)$. Показано , что на $\mathcal{M}$ можно ввести иерархию попарно совместных гамильтоновых структур:

$$\Omega^{(m)} = [\![ad_J^{-1} \cdot \delta q(x) \wedge \Lambda^m ad_J^{-1} \cdot \delta q(x)]\!] , \quad \Lambda = \tfrac{1}{2}(\Lambda_+ + \Lambda_-), \quad m = 0, \pm 1, \ldots , \tag{I2}$$

которые тоже порождаются степенями Λ . Доказано, что полученные

в § 9 интегралы движения находятся в инволюции по отношению к любой из 2-форм иерархии $\Omega^{(m)}$. Найдены выражения для $\Omega^{(m)}$ в терминах данных рассеяния.

Последний § I2 этой главы посвящен простейшим редукциям и примерам НЭУ. Наиболее важными на наш взгляд являются примеры НУШ на симметрических пространствах /I0–I2/:

$$i [J, q_t] + q_{xx} - q^3(x,t) = 0, \qquad J^2 = \mathbb{1}; \tag{I3}$$

найдены новые примеры НУШ, получающихся из (I3) дополнительной редукцией под действием автоморфизмов из группы Вейля алгебры $\mathfrak{g}$. Найдены ограничения, которые эти редукции накладывают на данные рассеяния, законы дисперсии и на гамильтоновы структуры $\Omega^{(m)}$.

В IУ главе результаты, полученные выше для систем L, переформируются для калибровочно-эквивалентных ей систем $\tilde{L}$ (2). Калибровочно-ковариантная формулировка, предложенная в предыдущих главах, существенно облегчает решение этой задачи.

В § I3 построены системы присоединенных решений $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$, связанные с $\tilde{L}$, и доказано их свойство полноты. Получены формулы разложения для потенциала $[B, S(x)]$ и его вариации $\delta S(x)$:

$$ad_S^{-1} \cdot [B, S(x)] = \frac{i}{2\pi} \bar{\mathbb{P}}_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \sum_{\alpha > 0} \{ \bar{\rho}_{B,-\alpha}^{+}(\lambda) \bar{e}_{\alpha}^{+}(x,\lambda) - \bar{\rho}_{B,\alpha}^{-}(\lambda) \bar{e}_{-\alpha}^{-}(x,\lambda) \}, \tag{I4}$$

$$ad_S^{-1} \cdot \delta S(x) = \frac{i}{2\pi} \bar{\mathbb{P}}_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \sum_{\alpha > 0} \{ \delta' \bar{\rho}_{-\alpha}^{+}(\lambda) \bar{e}_{\alpha}^{+}(x,\lambda) - \delta' \bar{\rho}_{\alpha}^{-}(\lambda) \bar{e}_{-\alpha}^{-}(x,\lambda) \}, \tag{I5}$$

где $\bar{e}_{\alpha}^{\pm}(x,\lambda) = \psi_0^{-1}(x) e_{\alpha}^{\pm}(x,\lambda) \psi_0(x)$, проектор $\bar{\mathbb{P}}_0 = ad_S^{-1} \cdot ad_S \cdot$; а соответствующие формулы обращения имеют вид:

$$\bar{\rho}_{B,\mp\alpha}^{\pm}(\lambda) = \lambda [\![ad_S^{-1} [B,S], \bar{e}_{\mp\alpha}^{\pm}(x,\lambda)]\!]_S , \quad \delta' \bar{\rho}_{\mp\alpha}^{\pm}(\lambda) = \lambda [\![ad_S^{-1} \delta S(x), \bar{e}_{\mp\alpha}^{\pm}(x,\lambda)]\!]_S \tag{I6}$$

$$[\![\bar{X}, \bar{Y}]\!]_S = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \langle \bar{X}(x), [S(x), \bar{Y}(x)] \rangle , \quad \bar{X}, \bar{Y} \in \bar{\mathcal{S}}_{\mathfrak{g},S} = Ad\, \psi_0^{-1}(x) \cdot \mathcal{S}_{\mathfrak{g},J} . \tag{I7}$$

Соответствующие порождающие операторы $\bar{\Lambda}_{\pm}$ получаются из $\Lambda_{\pm}$ калибровочным преобразованием

$$\bar{\Lambda}_{\pm} = \psi_0^{-1}(x) \Lambda_{\pm} \psi_0(x). \tag{I8}$$

К сожалению, однако, эта формула непригодна для непосредственного вывода основных результатов для калибровочно-эквивалентных НЭУ. Дело в том, что естественными переменными для НЭУ, связанных с $\tilde{L}$, является $S(x)$. В то же время в правую часть (I8) входят величины $q(x)$ и $\psi_0(x)$, связанные с $S(x)$ неявно при помощи соотношений:

$$i\frac{d\psi_0}{dx} + q(x)\psi_0(x) = 0, \qquad S(x) = \psi_0^{-1}(x) J \psi_0(x). \tag{I9}$$

Преодолению этой трудности посвящен § I4, где предложен способ явного вычисления оператора $\bar\Lambda_\pm$ в терминах только $S(x)$.

В § I5 с помощью $\bar\Lambda_\pm$ сформулированы основные свойства НЭУ, связанных с L. Доказано, что класс этих НЭУ имеет вид

$$ad_S^{-1}\cdot S_t + \sum_{k=1}^{r} f_k(\bar\Lambda_\pm)\, ad_S^{-1}\cdot [H_k^V, S(x,t)] = 0. \tag{20}$$

При этом становится очевидной эквивалентность НЭУ (20) и (I0).

Порождающими функционалами законов сохранения НЭУ (20) являются $\bar{\mathcal{D}}_j^\pm(\lambda) = \mathcal{D}_j^\pm(\lambda)/\mathcal{D}_j^\pm(0)$. Получены явные выражения для $d_j^{(k)}$ и $\delta d_j^{(k)}$ в терминах $\bar\Lambda_\pm$ и $S(x)$:

$$\begin{gathered} \frac{2d_j^{(k)}}{(\alpha_j,\alpha_j)} = -\frac{i}{k}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{x}dy \left\langle S_y,\ \bar\Lambda_+^{k+1} ad_S^{-1}\cdot [H_j^V, S(y)]\right\rangle, \\ \frac{2\delta d_j^{(k)}}{(\alpha_j,\alpha_j)} = \left[\!\left[ad_S^{-1}\cdot \delta S(x),\ \bar\Lambda_+^{k+1}\cdot ad_S^{-1}\cdot [H_j^V, S(x)]\right]\!\right]_S. \end{gathered} \tag{2I}$$

Показано, что НЭУ допускают иерархию гамильтоновых структур:

$$\bar\Omega^{(m)} = \left[\!\left[ad_S^{-1}\cdot \delta S(x) \wedge \bar\Lambda^m ad_S^{-1}\cdot \delta S(x)\right]\!\right]_S, \quad \bar\Lambda = \tfrac{1}{2}(\bar\Lambda_+ + \bar\Lambda_-), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{22}$$

Специальное внимание уделено связи между иерархиями (I2) и (22):

$$\bar\Omega^{(m+2)} = \Omega^{(m)} - 8i\sum_{k,\ell=1}^{r} \frac{(\alpha_k,\alpha_\ell)}{(\alpha_k,\alpha_k)(\alpha_\ell,\alpha_\ell)}\, \delta d_\ell^{(m+1)} \wedge \delta \ln \mathcal{D}^+(0), \tag{23}$$

которая является естественным обобщением результатов П.П. Кулиша и И.Г. Реймана, установленных для $\mathfrak{g} \simeq sl(2)$.

В § I6 приведены примеры НЭУ, калибровочно-эквивалентных уравнениям из § I2. Мы упомянем только один из них, а именно: в случае $\mathfrak{g} \simeq sl(3)$ и $J = diag\,(1,0,-1)$ уравнению трех волн калибровочно-эквивалентно уравнение:

$$S_t + c\left(S^2\right)_x = 0, \qquad c = const, \tag{24}$$

с дополнительным условием $S(x,t) = S^3(x,t)$.

В § I7 на примере системы ВКИШ:

$$\frac{d\psi_0'}{d\xi} = \lambda\left(iQ_0(\xi) + \sigma_3\right)\psi_0'(\xi,\lambda), \qquad Q_0(\xi) = \begin{pmatrix} 0, & Q_0^+(\xi) \\ -Q_0^{+*}(\xi), & 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

продемонстрирована возможность построения спектральных разложений для операторов $\Lambda_\pm$, обобщающих $\Lambda_\pm$ и позволяющих описать преобразования Бэклунда соответствующих НЭУ. Это требует модификации подхода в /8/, связанной с особенностями системы (25) по сравнению с эквивалентными ей системами L_0 и (2) с $\mathfrak{g} \simeq sl(2)$.

Следующий § I8 содержит основные свойства НЭУ, связанных с (25). Построенный в нем симплектический базис $\{\mathcal{P}(x,\lambda), \mathcal{Q}(x,\lambda)\}$ позволяет просто и эффективно вычислить переменные типа действие – угол для этих НЭУ, а также проанализировать связь между соответствующими иерархиями симплектических форм.

<u>Последняя глава (У)</u> имеет целью выяснить возможность переноса метода разложений по присоединенным решениям и на другие вспомогательные линейные задачи, такие, как полиномиальное обобщение (I):

$$\left[i\frac{d}{dx} + \sum_{k=0}^{N-1}\lambda^k q_k(x) - \lambda^N J\right]\psi(x,\lambda) = 0 \tag{26}$$

и разностные приближения к (I) вида

$$\psi_{n+1}(z) = \begin{pmatrix} z\,1, & q_n \\ r_n, & \frac{1}{z}\,1 \end{pmatrix}\psi_n(z), \tag{27}$$

где z играет роль спектрального параметра, а q_n, r_n – прямоугольные матричные последовательности, стремящиеся к 0 при $n \to \pm\infty$.

В § I9 на примере системы (26) при $N = 2$ и $\mathfrak{g} \simeq sl(2)$ продемонстрированы особенности, возникающие при определении присоединенных решений и при вычислении соответствующих порождающих операторов. Эти результаты использованы в § 20 для описания соответствующего класса НЭУ, среди которых – ряд известных и интересных моделей теории поля.

В § 2I преодолены трудности при построении в ковариантном виде систем присоединенных решений и Λ– операторов для системы (27). При этом естественно возникает факторизация Λ – операторов. Получены разложения для $Q_n = \begin{pmatrix} 0 & q_n \\ r_n & 0 \end{pmatrix}$ и δQ_n, которые в § 22 использованы для исследования соответствующих разностных эволюционных уравнений. Построено также ядро резольвенты (27) и показано, что его "диагональ" порождает представления Лакса этих уравнений.

<u>В заключении</u> обсуждаются возможности и трудности при обобщении развитого в диссертации метода на случай систем (I) с ненулевыми граничными условиями на $q(x)$, а также на случай, когда $\mathfrak{g}$ является простой суперaлгеброй Ли.

В § 23 исследована многокомпонентная система НУШ:

$$i q_t + q_{xx} - 2 q q^{\dagger} q + q(x,t)\mu + \bar{\mu} q(x,t) = 0,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} q(x,t) = q_{\pm}, \quad \mu = q_+^{\dagger} q_+ = q_-^{\dagger} q_-, \quad \bar{\mu} = q_+ q_+^{\dagger} = q_- q_-^{\dagger} \qquad (28)$$

с ненулевыми граничными условиями. В этом случае непрерывный спектр задачи L усложняется: возникают пороговые особенности, которые существенно влияют на свойства соответствующих НЭУ, в том числе и на их гамильтоновы структуры. Существенно меняются также свойства аналитичности решений Йоста, а гамильтониан $H_{НУШ}$ уравнения (28) уже не содержится в главной серии законов сохранений. Кратко обсуждаются вопросы построения теории Λ -операторов, которая должна основываться на детальном изучении пороговых особенностей соответствующей функции Грина $G(x,y,\lambda)$.

В § 24 приведен список (возможно, неполный) вспомогательных линейных задач, для которых изучены, в той или иной степени, порождающие операторы. Перспективной, на наш взгляд, является задача об обобщении развитого в диссертации метода на простые супералгебры Ли. В качестве интересного примера приводится семейство суперсимметричных обобщений НУШ, связанное с исключительными супералгебрами $D(2,1;\alpha)$.

Важной задачей также является объединение идей о группе редукций, предложенной А.В.Михайловым с подходом Λ -оператора.

Литература

1. В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
2. F.Calogero, A. Degasperis. Spectral transform and solitons. I. Amsterdam, North Holland, 1982.
3. Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
4. А.Н. Лезнов, М.В. Савельев. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1986.
5. M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell, H. Segur.–Stud. Appl. Math. 1974, 53, p. 249.
6. В.К. Мельников.–Функц. анализ, 1981, 15, с. 43.
7. D. Kaup.–J. Math. Annal, Appl. 1976, 54, p. 849.
8. В.С. Герджиков, Е.Х. Христов.–Матем. заметки, 1980, 28, с. 501; Болгарский физ. ж. 1980, 7, с. 28, 119.
9. D. Kaup, A. Newell.–Adv. Math. 1979, 31, p. 67.

10. С.В. Манаков.–ЖЭТФ, 1976, 65, с. 172.
11. A. Fordy, P.P. Kulish.–Commun. Math. Phys. 1983, 89, p. 427.
12. V.G. Makhan'kov, O.K. Pashaev.–Phys. Lett., 1983, 95A, p. 95.

РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ:

1. В.С. Герджиков. Калибровочно эквивалентные разностные эволюционные уравнения. Труды III Нац. конференции по физике, София, 1983 г.
2. В.С. Герджиков, М.И. Иванов. Гамильтонова структура разностных многокомпонентных нелинейных уравнений Шредингера. ТМФ, 1982, 52, с. 89.
3. В.С. Герджиков, М.И. Иванов. Диагональ резольвенты и представления Лакса для разностных эволюционных уравнений. Сообщение ОИЯИ, Р5-82-412, Дубна, 1982.
4. В.С. Герджиков, М.И. Иванов. Квадратичный пучок общего вида и нелинейные эволюционные уравнения. I. Разложения по "квадратам" решений – обобщенные преобразования Фурье. Болг. физ. ж. 1983, 10, с. 13.
5. В.С. Герджиков, М.И. Иванов. Квадратичный пучок общего вида и нелинейные эволюционные уравнения. II. Иерархии гамильтоновых структур. Болг. физ. ж. 1983, 10, с. 130.
6. В.С. Герджиков, М.И. Иванов, П.П. Кулиш. Полная интегрируемость разностных эволюционных уравнений. Труды международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. ИФВЭ, Протвино, 1980, с. 289.
7. В.С. Герджиков, П.П. Кулиш. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с несамосопряженным оператором Дирака. Болг. физ. ж. 1978, 5, с. 337.
8. В.С. Герджиков, П.П. Кулиш. Способ вывода преобразования Бэклунда в формализме обратной задачи рассеяния. ТМФ 1979, 39, с. 69.
9. В.С. Герджиков, П.П. Кулиш. Разложения по "квадратам" собственных функций матричной линейной системы $n \times n$. Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР, 1981, 101, с. 46.
10. В.С. Герджиков, П.П. Кулиш. О многокомпонентном нелинейном уравнении Шредингера в случае ненулевых граничных условий. Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР, 1983, 131, с. 34.
11. V.S. Gerdjikov. On the spectral theory of the integro- differential operator, generating nonlinear evolution equations.

(О спектральной теории интегродифференциального оператора порождающего нелинейные эволюционные уравнения).
Lett. Math. Phys. 1982, 6, p. 315.

12. V.S. Gerdjikov. Gauge covariant formulation of the generalised Fourier transforms for the soliton equations.
(Калибровочно ковариантная формулировка обобщенных преобразований Фурье для солитонных уравнений). Труды ХУШ международного симпозиума "Специальные вопросы калибровочных полевых теорий", Аренсхоп (ГДР), с. 3-23, 1984.

13. V.S. Gerdjikov. Generalised Fourier transforms for the soliton equations. Gauge covariant formulation.
(Обобщенные преобразования Фурье для солитонных уравнений. Калибровочно-ковариантная формулировка).
Inverse Problems, 1986, 2, p. 51.

14. V.S. Gerdjikov, M.I. Ivanov. Block discrete Zakharov – – Shabat system. I. Generalised Fourier expansions.
(Блочная дискретная система Захарова – Шабата. I. Обобщенные преобразования Фкрье). Сообщение ОИЯИ Е2-81-811, Дубна, 1981.

15. V.S. Gerdjikov, M.I. Ivanov. Block discrete Zakharov-Shabat system. II. Hamiltonian structures.
(Блочная дискретная система Захарова – Шабата. П. Гамильтоновы структуры). Сообщение ОИЯИ Е2-81-812, Дубна, 1981.

16. V.S. Gerdjikov, M.I. Ivanov, P.P. Kulsh. Expansions over the "squared solutions and difference evolution equations.
(Разложения по "квадратам" решений и разностные эволюционные уравнения).
J. Math. Phys., 1984, 25, p. 25.

17. V.S. Gerdjikov, P.P. Kulish. The generating operator for the n x n linear system.
(Порождающий оператор для линейной системы $n \times n$)
Physica D, 1981, 3D, p. 549.

18. V.S. Gerdjikov, A.B. Yanovski. Gauge covariant formulation of the generating operator. II. Systems on Homogeneous spaces.
(Калибровочно-ковариантная формулировка порождающего оператора. П. Системы на однородных пространствах).
Phys. Lett. A., 1985, 110A, p. 53.

19. V.S. Gerdjikov, A.B. Yanovski. Gauge covariant formulation of the generating operator. I.
(Калибровочно-ковариантная формулировка порождающего оператора I.).
Commun. Math. Phys. 1986, 103, p. 549.

20. M. Boiti, F. Pempinelli, V.S. Gerdjikov. The WKIS system: Backlund transformations, generalised Fourier transforms and all that.
(Система ВКИШ: Преобразования Бэклунда, обобщенные преобразования Фурье и все такое).
Prog. Theor. Phys., 1986, 75. p. 1111.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 февраля 1987 года.