ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-86-438

УДК 530.145

ИВАНОВ

Евгений Алексеевич

ГРАССМАНОВА АНАЛИТИЧНОСТЬ И ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА КАК ОСНОВА СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЙ

Специальность: 01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1986

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,

член-корреспондент АН УССР

Д.В.ВОЛКОВ

доктор физико-математических наук
старший научный сотрудник

А.М.ПЕРЕЛОМОВ

доктор физико-математических наук

профессор

Я.А.СМОРОДИНСКИЙ

Ведущая организация – Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР, Москва

Автореферат разослан "___"__________1986 г.

Защита состоится "___"__________1986 г. на заседании специализированного совета Д047.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Ученый секретарь совета
кандидат физико-математических наук

В.И.ЖУРАВЛЕВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

<u>Актуальность темы</u> определяется ведущей ролью суперсимметрии в современной физике частиц и квантовой теории поля. На основе принципа суперсимметрии удалось осуществить нетривиальное слияние внутренних симметрий с пространственно-временными и унифицировать гравитацию с полями Янга-Миллса (в расширенных супергравитациях и теории суперструны), предложить простое решение проблемы иерархий в теориях великого объединения. Замечательным достижением стало недавнее открытие обширного класса суперсимметричных моделей, свободных от ультрафиолетовых расходимостей. Все привлекательные черты суперсимметрии вобрала в себя теория суперструны, претендующая на статус "теории всего сущего".

В свете этих впечатляющих продвижений особую значимость приобретает построение явно инвариантных формулировок суперсимметричных теорий вне массовой оболочки через суперполя, свободные от сторонних ограничений. В таких формулировках наиболее полно выявляются неординарные внутренние геометрии этих теорий, становятся простыми и наглядными квантовые расчеты и доказательства конечности.

В случае $N=1$ суперсимметрии разработка суперполевого описания была, в основном, завершена несколько лет назад. Были построены геометрические формулировки всех $N=1$ теорий: материи, супергравитации, теории Янга-Миллса (внутренняя геометрия последней была вскрыта в работах автора, составивших главу I диссертации). В то же время для наиболее интересных и сложных теорий с расширенной суперсимметрией подход с использованием обычных суперполей оказался неадекватным. Возникало много лишних полей с высокими спинами; чтобы их устранить, приходилось накладывать связи или привлекать калибровочные инвариантности негеометрического характера. Более того, были доказаны "no-go" теоремы о невозможности суперполевых формулировок для ряда теорий, в частности, для суперкалибровочных теорий с $N\geq3$ ($N=3$ – барьер). Отсутствие явно инвариантного геометрического описания сильно затрудняло квантовые вычисления, не позволяло написать, например, наиболее общее самодействие $N=2$ материи вне массовой оболочки (его важно знать, имея в виду возможные феноменологические приложения) и т.д. Было ясно, что для построения адекватных суперполевых формулировок теорий с $N>1$ необходимы радикально новые идеи.

Актуальной проблемой является также разработка инвариантного подхода к теориям со спонтанно нарушенной локальной суперсимметрией в свете того простого аргумента, что суперсимметрия в природе заведомо нарушена (отсутствует вырождение по массам у бозонов и фермионов). В то время, как для глобальной суперсимметрии соответствующие методы были хорошо известны (в их основе лежит геометрия однородных пространств и суперпространств), перенос этих методов на локальный случай, т.е. случай супергравитации, осложнялся тем, что фундаментальные супергруппы супергравитаций бесконечномерны. Таким образом, возникла необходимость обобщения стандартного подхода нелинейных реализаций на бесконечнопараметрические группы и супергруппы. Такое обобщение, кроме всего прочего, должно быть согласовано с внутренними суперполевыми геометриями соответствующих теорий.

Помимо применений в четырёхмерном пространстве Минковского суперсимметрия имеет интересные приложения в пространстве двух измерений. На ее основе были построены новые нетривиальные интегрируемые системы, включающие как бозоны, так и фермионы, открыт новый класс конечных двумерных теорий – $N=4$ суперсимметричные гиперкэлеровы σ-модели. Интерес к двумерной суперсимметрии особенно возрос в связи с бурным развитием теории фермионных струн и суперструн, которые сами представляют собой род обобщенных двумерных σ-моделей. Важную роль в струнных теориях играют уравнение Лиувилля и его суперсимметричные обобщения, а также σ-модели весс-зуминовского типа. Поэтому построение новых суперрасширений этих систем и анализ их геометрической структуры в явно инвариантном суперполевом подходе является весьма актуальной задачей.

<u>Цель работы</u> состоит в построении адекватной суперполевой геометрической формулировки теорий с расширенной $N=2$ и $N=3$ суперсимметрией на основе принципа грассмановой аналитичности, понятия гармонического суперпространства и общих методов групповых реализаций в однородных пространствах. Кроме того, развиваются общие суперполевые методы нелинейных реализаций в бесконечномерных фактор-пространствах и применяются для модельно-независимого описания спонтанно нарушенной $N=1$ супергравитации и построения новых суперсимметричных расширений уравнения Лиувилля и σ-моделей весс-зуминовского типа.

<u>Научная новизна</u>. В диссертации открыто новое направление в теории суперсимметрии – описание теорий с расширенной суперсимметрией на адекватном геометрическом языке гармонических суперпространств. В основе этого описания лежит конструктивно использованная идея грассмановой аналитичности, впервые введенная в контексте расширенных суперсимметрий в данной диссертации. Впервые установлено, что все $N=2$ суперсимметричные теории: теория $N=2$ материи, $N=2$ теория Янга-Миллса, $N=2$ супергравитация, допускают явно инвариантные геометрические формулировки в аналитическом подпространстве гармонического $N=2$ суперпространства. Проведено последовательное построение таких формулировок для $N=2$ материи и $N=2$ теории Янга-Миллса. Найдена фундаментальная супергруппа $N=2$ супергравитации.

Введены гармоническое и аналитическое $N=3$ суперпространства и на их основе построена первая формулировка $N=3$ теории Янга-Миллса вне массовой оболочки. Тем самым преодолены "no-go" теоремы о невозможности такого описания.

Обнаружено радикально новое явление – бесконечность числа вспомогательных и(или) калибровочных степеней свободы у аналитических гармонических суперполей. Оно связано с присутствием дополнительных бозонных координат – гармоник на однородных пространствах групп автоморфизмов суперсимметрии и наличием бесконечных гармонических разложений по этим переменным. Именно это свойство оказывается решающим для существования явно инвариантных геометрических формулировок $N=2$ теорий и преодоления " $N=3$ барьера".

Впервые определено наиболее общее действие $N=2$ материи вне массовой оболочки на основе аналитических супермультиплетов с бесконечным числом вспомогательных полей. Предложен новый метод явного вычисления и классификации гиперкэлеровых метрик исходя из соответствующих аналитических лагранжевых плотностей.

Развита последовательная процедура квантования в гармоническом $N=2$ суперпространстве. Впервые проведены квантовые расчеты с сохранением на каждом этапе явной суперсимметрии. Дано первое общее доказательство ультрафиолетовой конечности $N=4$ гиперкэлеровых σ-моделей в $d=2$.

Новым вкладом является развитый в диссертации общий метод нелинейных реализаций локальных супергрупп в суперпространстве. С его помощью впервые получено модельно-независимое описание спонтанно нарушенных суперполевых $N=1$ супергравитаций.

Впервые построены нелинейные реализации бесконечнопараметрических конформной и суперконформных групп в двух измерениях. В их рамках предложен новый геометрический метод ковариантной редукции и с его помощью найдены неизвестные ранее интегрируемые системы с расширенной суперсимметрией: $N=2$ и $N=4$ суперсимметричные уравнения Лиувилля. Последняя система оказалась одновременно исторически первым примером суперсимметричного расширения σ-модели весс-зуминовского типа (на симметрическом пространстве $SU(2)\times SU(2)/SU(2)$).

Практическая ценность. Развитый в диссертации подход гармонического суперпространства имеет такое же (если не большее) значение для расширенных суперсимметрий, как обычный $N=1$ суперполевой подход для простой суперсимметрии. Он уже активно применяется, в частности, при изучении феноменологических следствий $N=2$ суперсимметрии и при исследовании суперсимметричных теорий в высших измерениях, получил интересные приложения в теориях суперчастицы и суперструны. По-видимому, дальнейшее развитие заложенных в нем новых идей будет идти именно по пути их распространения на струнные модели. Можно ожидать, что в рамках гармонических суперпространств удастся достичь решающего прогресса в понимании фундаментальной геометрии, лежащей в основе теории взаимодействующих суперструн. Другие возможные применения касаются расширенных супергравитаций с $N\geq 2$, где подход гармонического суперпространства может быть эффективно использован для построения адекватных геометрических формулировок и последующего изучения расходимостей. На повестке дня стоит анализ квантовых аномалий и механизмов мягкого нарушения в расширенных суперкалибровочных теориях в рамках разработанной в диссертации явно суперсимметричной процедуры квантования.

Практических следствий можно ждать и от других результатов диссертации. Развитый в ней геометрический подход к спонтанно нарушенной $N=1$ супергравитации допускает прямое обобщение на расширенные супергравитации, обещает быть полезным в теориях струн и суперструн. Нелинейные реализации бесконечнопараметрических групп в сочетании с методом ковариантной редукции дают алгоритмический способ получения новых интегрируемых двумерных систем, в том числе высших суперрасширений уравнения Лиувилля и весс-зуминовских σ-моделей,с потенциальными приложениями в струнных теориях. Найденные в диссертации посредством этого метода аналитические представления двумерных $N=2$ и $N=4$ суперсимметрий уже использовались для построения новых суперсимметричных $d=2$ σ-моделей.

ДЛЯ ЗАЩИТЫ ВЫДВИГАЮТСЯ СЛЕДУЮЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В ДИССЕРТАЦИИ:

I. Введено понятие аналитичности по грассмановым переменным. Показана конструктивность принципа сохранения грассмановой аналитичности для нахождения инвариантных геометрических формулировок теорий с расширенной суперсимметрией.

2. Введены новые концепции гармонического суперпространства и грассмановых $SU(2)$- и $SU(3)$- аналитичностей, позволившие впервые дать адекватное геометрическое описание всех $N=2$ теорий и построить

первую формулировку $N=3$ теории Янга-Миллса вне массовой оболочки.

3. Обнаружено принципиально новое явление - бесконечность числа вспомогательных и(или) калибровочных степеней свободы у аналитических гармонических суперполей. Установлена фундаментальная роль этого феномена в достижении инвариантных суперполевых формулировок $N=2$ теорий и в преодолении " $N=3$ барьера".

4. Выявлена внутренняя геометрия $N=2$ теории Янга-Миллса, обнаружено ее удивительное сходство с геометрией обычных ($N=0$) калибровочных теорий. Показано, что фундаментальным геометрическим объектом теории является аналитическая неограниченная связность, ковариантизующая сохраняющую аналитичность гармоническую производную.

5. Построено наиболее общее самодействие $N=2$ материи вне массовой оболочки на основе аналитического q^+ -гипермультиплета. Определено $N=2$ преобразование дуальности и с его помощью показано, что все известные до сих пор действия $N=2$ материи сводятся к частным классам общего q^+-действия.

6. Предложен конструктивный метод вычисления и классификации гиперкэлеровых метрик по аналитическим лагранжевым q^+-плотностям. Введено понятие гиперкэлерова потенциала.

7. Найдена фундаментальная суперпространственная группа эйнштейновской $N=2$ супергравитации.

8. Дана инвариантная геометрическая формулировка $N=3$ теории Янга-Миллса в аналитическом $N=3$ суперпространстве в терминах комплексной аналитической связности, свободной от сторонних ограничений. Преодолен " $N=3$ барьер" благодаря бесконечному числу вспомогательных полей.

9. Развита последовательная схема квантования в гармоническом суперпространстве.

I0. Впервые дано общее доказательство ультрафиолетовой конечности двумерных гиперкэлеровых $N=4$ σ-моделей.

II. Выявлена комплексная внутренняя геометрия $N=1$ теории Янга-Миллса. Показана ее глубокая общность с геометрией $N=1$ супергравитации.

I2. Методы нелинейных реализаций распространены на бесконечномерные группы супергравитаций в суперпространстве. На этой основе впервые получено модельно-независимое инвариантное описание спонтанно нарушенных конформной и минимальной эйнштейновской $N=1$ супергравитаций.

I3. Исходя из нелинейных реализаций суперконформных симметрий в двух измерениях и с использованием нового метода ковариантной редукции построены новые интегрируемые системы с расширенной суперсимметрией

рией: $N=2$ и $N=4$ суперсимметричные уравнения Лиувилля. Обнаружено, что вторая система является также $N=4$ суперсимметризацией вессзуминовской σ-модели на пространстве $SU(2)\times SU(2)/SU(2)$.

14. В рамках метода ковариантной редукции найдены неизвестные ранее аналитические представления двумерных $N=2$ и $N=4$ суперсимметрий вне массовой оболочки.

Апробация диссертации

Основные материалы диссертации докладывались на семинарах Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, отделов теоретической физики ФИАН, МИАН, ИТЭФ, ИФП, ХФТИ, ФИ ЧСАН и Карлова университета (Прага), ФИ САН (Братислава), на сессиях ОЯФ АН СССР, Всесоюзной конференции "Суперсимметрия - 85" (Харьков, 1985), а также на многих международных конференциях и симпозиумах, в том числе конференциях по теории поля в Алуште в 1982 г. и 1984 г., семинаре по проблемам высоких энергий и квантовой теории поля в Протвино в 1984 г., семинарах по теоретико-групповым методам в физике в Звенигороде в 1982 г. и в Юрмале в 1985 г., семинаре по квантовой гравитации в Москве в 1984 г., школах по теоретической физике в Варне (НРБ) в 1982 г. и в Карпачи (ПНР) в 1985 г., конференциях по физике высоких энергий в Лейпциге (ГДР) в 1984 г. и в Беркли (США) в 1986 г., рабочих совещаниях по суперсимметрии в Триесте (Италия) в 1984 г. и Кэмбридже (Англия) в 1985 г.

Публикации

По результатам диссертации опубликовано 25 работ.

Объем работы

Диссертация состоит из введения, девяти глав основного текста с четырьмя приложениями и заключения. Она содержит 268 страниц машинописного текста, 6 рисунков и библиографический список литературы из 192 названий.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан краткий очерк развития суперсимметрии, ее достижений и трудностей, обоснована актуальность и важность проведенного в диссертации исследования и обрисован круг лежащих в его основе идей. В частности, сравниваются различные подходы к построению явно инвариантных геометрических формулировок и изложена точка зрения на эту проблему, принятая в диссертации. Она состоит в том, что во главу угла должен ставиться поиск адекватного суперпространства, в котором фундаментальная (супер)группа данной теории имеет наиболее простое геометрическое представление как группа координатных либо янгмиллсовских преобразований с параметрами, заданными на этом суперпространстве и свободными от сторонних связей. В рамках такого суперпространства минимальные препотенциалы теории должны возникать естественным образом как объекты с ясным геометрическим смыслом.

В конце введения кратко изложено содержание работы.

В первой главе представлен простейший пример нетривиальных геометрий суперсимметричных теорий: геометрия, внутренне присущая $N=1$ теории Янга-Миллса. Установлено ее глубокое родство с геометрией $N=1$ супергравитации в формулировке Огиевецкого-Сокачева.

Во вводном § 1 приведены некоторые сведения о геометрических формулировках $N=1$ супергравитаций и подчеркнуто то обстоятельство, что основными объектами в них являются препотенциалы, отождествляемые с координатами определенных комплексных суперпространств.

В § 2 показано, что $N=1$ калибровочный препотенциал имеет аналогичную природу. Внутренней геометрией $N=1$ теории Янга-Миллса является комплексная геометрия вложения вещественного $N=1$ суперпространства $\mathbb{R}^{4|4}=(x^m,\theta^\mu,\bar\theta^{\dot\mu})$ в расширенное комплексное $\mathbb{C}^{4+M|2}=(x^m_L,\theta^\mu_L=\theta^\mu,\varphi^i_L),\ (i=1,\dots M)$, где φ^i_L - локальные координаты на группе G^c, комплексификации калибровочной группы G, и $M=\dim G$. $N=1$ препотенциал отождествляется с $\operatorname{Im}\varphi^i_L$, ограниченной на $\mathbb{R}^{4|4}$. Он принимает значения в однородном пространстве G^c/G, что приводит к интерпретации $N=1$ теории Янга-Миллса как обобщенной нелинейной σ-модели.

В § 3 определены соответствующие формы Картана и применены к построению геометрических величин $N=1$ теории. Показано, что всю теорию можно алгоритмически построить, зная лишь эти формы и налагая на них простые алгебраические связи.

В § 4 обсуждается, чем поучительна геометрическая формулировка $N=1$ теории Янга-Миллса в плане обобщений на $N>1$.

Во второй главе введено важное понятие грассмановой аналитичности. Суть ее в том, что в ряде случаев на суперполя, заданные в вещественных суперпространствах, можно накладывать ковариантные условия по грассмановым переменным типа условий Коши-Римана, сводящие эти суперполя к функциям на комплексных суперпространствах меньшей грассмановой размерности. Плодотворность этой концепции определяется тем, что все известные геометрические формулировки суперсимметричных теорий, в том числе построенные в диссертации, могут быть получены из требования сохранения подходящих аналитичностей при включении взаимодействия. Впервые на конструктивную роль грассмановой аналитичности в контексте расширенной $N=2$ суперсимметрии было обращено внимание в работах, составивших материал этой главы.

В § I подчеркнута потребность в грассмановой аналитичности нового типа при переходе от $N=1$ к $N=2$ случаю.

В § 2 рассмотрен простейший нетривиальный пример грассмановой $N=2$ аналитичности - $O(2)$ - аналитичность. Она связана с наличием в вещественном $N=2$ суперпространстве $\mathbb{R}^{4|8}=(x^m, \theta_{\alpha i}, \bar\theta^i_{\dot\alpha})\equiv(z^M)$ комплексного аналитического подпространства $\mathbb{C}^{4|4}=(\tilde{x}^m, \theta_{\alpha 2}+i\theta_{\alpha 1}, \bar\theta_{\dot\alpha 2}+i\bar\theta_{\dot\alpha 1})$, замкнутого относительно $N=2$ суперсимметрии и подгруппы O(2) общей $N=2$ группы автоморфизмов $SU(2)_A$. Показано, как эта аналитичность позволяет реализовать $N=2$ суперсимметрию вне массовой оболочки на обычном комплексном $N=1$ суперполе.

Использовать O(2)-аналитическое суперпространство для геометрических формулировок $N=2$ теорий, аналогичных формулировкам $N=1$ случая, не удавалось из-за отсутствия в нем полной $SU(2)_A$-симметрии, присущей большинству таких теорий. В § 3 предпринята прямолинейная попытка $SU(2)$- ковариантизации условий O(2)-аналитичности. Она немедленно приводит к известным дифференциальным связям, выделяющим гипермультиплет Файе-Сониуса. Хотя возникающая интерпретация этих связей как условий $N=1$ киральности и O(2)-аналитичности сама по себе и интересна (при ненулевом центральном заряде удается решить связи в терминах двух киральных $N=1$ суперполей вне массовой оболочки), она не помогает в поиске геометрического описания, поскольку не позволяет представить соответствующие $N=2$ суперполя как общие функции на каком-либо подпространстве в $\mathbb{R}^{4|8}$. Кроме того, при отсутствии центрального заряда эти связи содержат уравнения движения.

Подлинная $SU(2)$-ковариантизация O(2)-аналитичности была достигнута в подходе гармонического суперпространства. Этот подход разработан в главах Ш-УП, составляющих основную часть диссертации.

<u>В третьей главе</u> сформулированы основные принципы подхода и приведены необходимые детали соответствующего суперполевого формализма.

В § I дано определение гармонического $N=2$ суперпространства. Оно получается путем расширения $\mathbb{R}^{4|8}$ новыми бозонными координатами, "диадами" u^+_i, u^-_i $(u^{+i}u^-_i=1)$, принадлежащими сфере $S^2\sim SU(2)_A/U(1)$ и представляющими собой изоспинорные гармоники на этом однородном пространстве. Их назначение - связать группу $SU(2)_A$, действующую на компонентных полях, с группой $U(1)$, действующей на внешние зарядовые индексы соответствующих суперполей.

Благодаря введению диад $u^\pm_i$ становится возможной геометрическая $SU(2)$-ковариантизация O(2)- аналитичности. В общем гармоническом $N=2$ суперпространстве $\mathbb{H}\mathbb{R}^{4+2|8}=\mathbb{R}^{4|8}\otimes SU(2)_A/U(1)$ удается выделить аналитическое подпространство

$$\mathbb{A}\mathbb{R}^{4+2|4}=(x^m_A, \theta^+_\alpha, \bar\theta^+_{\dot\alpha}, u^+_i, u^-_i)\equiv(\zeta^M, u),$$

$$x^m_A=x^m-2i\theta^{(i}\sigma^m\bar\theta^{j)}u^+_i u^-_j\,,\ \theta^+_\alpha=u^+_i\theta^i_\alpha\,,\ \bar\theta^+_{\dot\alpha}=u^+_i\bar\theta^i_{\dot\alpha}\,, \qquad (\mathrm{I})$$

замкнутое относительно $N=2$ суперсимметрии и $SU(2)_A$ - симметрии (реализованной на индексах i,j). Именно на языке суперполей $\Phi^{(q)}(\zeta,u)$, заданных на $\mathbb{A}\mathbb{R}^{4+2|4}$ (q - внешний $U(1)$ - индекс), достигается явно инвариантное геометрическое описание всех $N=2$ теорий. Важнейшим моментом является существенная зависимость этих суперполей от гармонических переменных u^+_i, u^-_i. По ним производятся бесконечные гармонические разложения, в результате чего в суперполях с необходимостью присутствует бесконечное число компонент с нарастающими суперизоспинами.

В § 2 приведены основные элементы суперполевого формализма в $\mathbb{H}\mathbb{R}^{4+2|8}$ и $\mathbb{A}\mathbb{R}^{4+2|4}$. Определены дифференцирование и интегрирование на $S^2\sim SU(2)_A/U(1)$, введены важные для дальнейшего гармонические распределения $\delta^{q,-q}(u_1,u_2)$ и $1/(u^{+i}_1u^+_{2i})^n$ (гармонические аналоги распределений $\delta(x)$ и $1/x^n$), дано соответствующее обобщение интеграла Березина (оно имеет заряженную меру $d^4x_A d^2\theta^+ d^2\bar\theta^+ du\equiv d\zeta^{(-4)}du$) и грассмановой δ -функции. Важное свойство - существование обобщенного сопряжения $\widetilde{\ \ }^{*}$, относительно которого замкнуто аналитическое суперпространство $\mathbb{A}\mathbb{R}^{4+2|4}$, и которое позволяет рассматривать вещественные аналитические суперполя.

В § 3 описаны, в основном на линеаризованном уровне, базисные аналитические суперполя, используемые при построении инвариантных формулировок $N=2$ теорий. Это гипермультиплеты $N=2$ материи $q^+(\zeta,u)$ и $\omega(\zeta,u)$ (они представляют один и тот же супермультиплет в формализмах первого и второго порядков), препотенциал калибровочной $N=2$ теории $V^{(+2)}(\zeta,u)$ и компоненты аналитического репера $V^{(+2)M}(\zeta,u)$, $V^{(+2)5}(\zeta,u)$, представляющие супермультиплет эйнштейновской $N=2$ супергравитации (в ее первой формулировке). Бесконечные "хвосты" суперизоспинов в этих суперполях имеют разный смысл. В q^+ и ω это вспомогательные поля, устраняемые уравнениями движения, например

$$D^{++}q^+=0\ ,\quad D^{++}=u^{+i}\frac{\partial}{\partial u^{-i}}-2i\theta^+\sigma^m\bar\theta^+\frac{\partial}{\partial x^m_A}\,. \qquad (2)$$

В то же время в $V^{(+2)}$ и $V^{(+2)M}, V^{(+2)5}$ эти компоненты - калибровочные степени свободы, они устраняются за счет калибровочных инвариантностей, например, относительно преобразования

$$\delta V^{(+2)} = D^{++}\lambda + i\,[V^{++}, \lambda]\,, \quad \lambda = \overset{*}{\lambda} = \lambda(\zeta, u). \tag{3}$$

В калибровке Весса-Зумино остаются стандартные калибровочный и гравитационный $N=2$ мультиплеты с конечным числом полей. Найдена фундаментальная супергруппа эйнштейновской $N=2$ супергравитации. Она реализуется как "треугольная" подгруппа общековариантной группы в аналитическом суперпространстве (ζ^M, ζ^5, u):

$$\delta \zeta^M = \lambda^M(\zeta^M, u)\,, \quad \delta\zeta^5 = \lambda^5(\zeta^M, u)\,, \quad \delta u_i^{\pm} = 0. \tag{4}$$

Здесь пятая координата введена, чтобы описать гравифотон, присутствующий в гравитационном $N=2$ супермультиплете.

Глава сопровождается тремя приложениями.

В приложении А дана интерпретация суперпространств $\mathbb{HR}^{4+2|8}$ и $\mathbb{AR}^{4+2|4}$ как однородных пространств $N=2$ супергруппы Пуанкаре.

В приложении Б указана связь со стандартными формулами гармонического анализа на группе $SU(2)$.

В приложении В построены гармоническое и аналитическое суперпространства в случае ненулевого центрального заряда.

Четвертая глава посвящена построению последовательной геометрической формулировки $N=2$ теории Янга-Миллса в гармоническом суперпространстве.

В § I сравниваются геометрии $N=0, N=1, N=2$ теорий Янга-Миллса. Отмечено удивительное сходство $N=2$ и $N=0$ случаев.

В § 2 продемонстрировано, что геометрической основой $N=2$ теории является сохранение $SU(2)$-аналитических представлений $N=2$ суперсимметрии. Фундаментальная калибровочная группа реализуется через параметры, заданные на аналитическом суперпространстве (I), основным геометрическим объектом теории является аналитическое суперполе $V^{(+2)}(\zeta, u)$ с трансформационным законом (3), которое имеет смысл связности, ковариантизующей гармоническую производную D^{++}:

$$D^{++} \to \mathcal{D}^{++} = D^{++} + i\,V^{++}. \tag{5}$$

В § 3 строится дифференциальная геометрия $N=2$ теории Янга-Миллса в гармоническом $N=2$ суперпространстве. Основным объектом здесь является "мост" $\exp(i\,v(z,u))$, оператор, связывающий фундаментальное λ-представление теории, в котором аналитичность является явной, с τ-представлением, в котором параметры калибровочной группы не зависят от гармоник и существование которого обусловлено существованием обычных, не зависящих от u_i^+, u_i^-, $N=2$ суперполей. Мост выражается через $V^{(+2)}$ уравнением

$$(D^{++} + i\,V^{(+2)})\,e^{iv} = 0, \tag{6}$$

которое следует из условия сохранения $SU(2)$-аналитичности в τ-представлении. Все остальные объекты: спинорные связности и напряженности, также выражаются через $V^{(+2)}$. При этом автоматически выполняются известные связи $N=2$ теории в вещественном $N=2$ суперпространстве $\mathbb{R}^{4|8}$.

В § 4 показано, как выразить действие $N=2$ теории Янга-Миллса через $V^{(+2)}$. Получающееся выражение неполиномиально по $V^{(+2)}$ и существенно нелокально по гармоникам: оно содержит гармонические функции Грина $1/(u_1^+ u_2^+)$. В отличие от действия $N=1$ теории, оно может быть записано в замкнутом виде и не содержит спинорных производных в вершинах. В том же параграфе обсуждается соответствие с формулировкой Мезинческу и строятся минимальные связи с $N=2$ материей. В частности, показано, что добавление действия ω-гипермультиплета в присоединенном представлении приводит к действию $N=4$ теории Янга-Миллса в терминах аналитических $N=2$ суперполей.

В § 5 - заключительные замечания.

В пятой главе обсуждается описание $N=2$ материи в аналитическом $N=2$ суперпространстве.

В § I напоминаются некоторые факты об $N=1$ материи, в частности, $N=1$ преобразование дуальности, а также дан краткий обзор подходов к описанию $N=2$ материи, имевшихся до появления подхода гармонического суперпространства.

В § 2 показано, что все известные ранее представления $N=2$ материи вне массовой оболочки с конечным числом вспомогательных полей (тензорные мультиплеты, ослабленный гипермультиплет, гипермультиплет с дальнейшим ослаблением ...) имеют естественное описание на языке аналитических $N=2$ суперполей со связями. Открыты новые представления такого рода: высшие ослабленные гипермультиплеты.

В § 3 выведено наиболее общее действие аналитической $N=2$ материи в терминах q^+-гипермультиплета:

$$S = \frac{1}{\varkappa^2}\int d\zeta^{(-4)} du\, \mathcal{L}^{(+4)}(q_A^+, \overset{*}{q}{}_A^+, D^{++}q_A^+, D^{++}\overset{*}{q}{}_A^+, \ldots (D^{++})^n q_A^+, \ldots u_i^{\pm}), \tag{7}$$

где $\varkappa$ - константа связи. Аналитическая плотность $\mathcal{L}^{(+4)}$ может зависеть от произвольного числа q_A^+, любой степени их гармонических производных и может явно включать гармоники. Выражение (7) легко обобщается на случай ненулевых центральных зарядов.

В § 4 определено $N=2$ преобразование дуальности и с его помощью показано, что все действия, полученные в § 2, сводятся к частным классам общего q^+-действия (7). Последнее может поэтому рассматриваться в качестве наиболее общего действия $N=2$ материи вне массовой оболочки.

В § 5 на основании известной теоремы о том, что любое самодействие $N=2$ материи порождает гиперкэлерову σ-модель в секторе физических бозонов, предлагается использовать представление (7) для явного вычисления гиперкэлеровых метрик, общего алгоритма нахождения которых до сих пор не существовало. Действительно, $\mathcal{L}^{(+4)}$ в (7) – произвольная функция своих аргументов и этим аналогична кэлерову потенциалу $N=1$ случая, ввиду чего может быть названа "гиперкэлеровым потенциалом". Исключая вспомогательные поля в произвольной $\mathcal{L}^{(+4)}$ посредством их уравнений движения (последние сводятся к системе дифференциальных уравнений на сфере $SU(2)_A/U(1)$), гарантированно получаем некоторую гиперкэлерову метрику в лагранжиане физических бозонов. Это приводит к идее классификации гиперкэлеровых метрик по соответствующим потенциалам $\mathcal{L}^{(+4)}$. Явно указаны $\mathcal{L}^{(+4)}$ для ряда известных метрик. В частности, для метрик Тауб-НУТ и Егучи-Хансона они имеют простой вид:

$$\mathcal{L}^{(+4)}_{TN}=\overset{*}{q}{}^+D^{++}q^+ + \frac{\lambda}{2}(q^+)^2(\overset{*}{q}{}^+)^2,$$

$$\mathcal{L}^{(+4)}_{EH}=-\frac{1}{2}D^{++}\omega D^{++}\omega+(\xi^{++})^2\omega^{-2}\ ,\ \xi^{++}=\xi^{(ij)}u^+_i u^+_j\,. \tag{8}$$

В последнем случае более удобным оказывается ω -представление.

<u>В приложении</u> описана реализация конформной супергруппы $SU(2,2|2)$ в гармоническом суперпространстве.

<u>Шестая глава</u> посвящена квантованию теорий в гармоническом суперпространстве.

В § I строятся функции Грина для гипермультиплетов. В центральном базисе они выглядят весьма просто, например:

$$\langle\overset{*}{q}{}^+(1)\,q^+(2)\rangle=-\frac{1}{\Box_1}(D_1^+)^4(D_2^+)^4\delta^{12}(z_1-z_2)\frac{1}{(u_1^+u_2^+)^3}\,,$$

$$(D^+)^4\equiv\frac{1}{16}(D^{+\alpha}D^+_\alpha)(\bar D^+_{\dot\alpha}\bar D^{+\dot\alpha})\ ,\ D^+_{\alpha,\dot\alpha}=u^+_i D^i_{\alpha,\dot\alpha}\,. \tag{9}$$

В § 2 проводится квантование $N=2$ теории Янга-Миллса: закрепляется калибровка, определяются функции Грина, вводятся аналитические госты Фаддеева-Попова. Характерной чертой построенного формализма является его сходство с $N=0$ формализмом. В частности, отсутствует необходимость в "гостах для гостов".

В § 3 сформулированы правила Фейнмана в гармоническом суперпространстве. Опять оказывается удобнее работать в центральном базисе.

В § 4 приведены первые примеры явно $N=2$ суперсимметричных квантовых расчетов на основе техники гармонических суперграфиков. Наиболее важное свойство этой техники состоит в том, что квантовые поправки всегда записываются как интегралы с полной грассмановой мерой $d^8\theta$. Оно немедленно ведет к простому общему доказательству конечности гиперкэлеровых $N=4$ σ-моделей в двумерном пространстве Минковского, общее действие которых получается редукцией q^+-действия (7). Доказательство следует стандартной линии теорем об отсутствии перенормировок и базируется на размерностных соображениях.

В § 5 суммированы основные черты техники гармонических суперграфиков. Помимо свойства восстановления полной грассмановой меры, основными особенностями являются отсутствие дополнительных гармонических расходимостей, а также исчезновение нелокальностей по гармоникам при переходе на массовую поверхность. Гармонические интегралы вычисляются с помощью простых алгебраических манипуляций, и зависимость от гармоник отсутствует в конечных ответах.

<u>В седьмой главе</u> впервые построена формулировка $N=3$ теории Янга-Миллса вне массовой оболочки. Это удается сделать в рамках аналитического $N=3$ суперпространства. "$N=3$ барьер" преодолевается из-за присутствия бесконечного числа вспомогательных полей в соответствующих гармонических потенциалах.

В § I напоминаются известные факты об описании $N=3$ теории на массовой поверхности через спинорные потенциалы в обычном $N=3$ суперпространстве $\mathbb{R}^{4|12}=(x^m,\theta_{\alpha i},\bar\theta^i_{\dot\alpha})$, $(i=1,2,3)$, подчиненные связям.

В § 2 вводится гармоническое $N=3$ суперпространство $\mathbb{H}\mathbb{R}^{4+6|12}$, получаемое добавлением к $\mathbb{R}^{4|12}$ фактор-пространства $\frac{SU(3)_A}{U(1)\times U(1)}$, где $SU(3)_A$ – группа автоморфизмов $N=3$ супералгебры. Дополнительными базисными координатами являются гармоники $(u_i^{1,1},u_i^{-1,1},u_i^{0,-2})$ и сопряженные к ним $(i=1,2,3)$. В $\mathbb{H}\mathbb{R}^{4+6|12}$ имеется аналитическое подпространство

$$\mathbb{A}\mathbb{R}^{4+6|8}=(x_A^{\alpha\dot\alpha},\theta_\alpha^{1,-1},\theta_\alpha^{0,2},\bar\theta_{\dot\alpha}^{1,1},\bar\theta_{\dot\alpha}^{0,-2},u)=(\zeta,u),$$

$$\theta_\alpha^{a,b}\equiv\theta_{\alpha i}u^{a,b\,i}\ ,\ \bar\theta_{\dot\alpha}^{a,b}\equiv\bar\theta^i_{\dot\alpha}u_i^{a,b}\,, \tag{10}$$

замкнутое относительно $N=3$ суперсимметрии и группы $SU(3)_A$.

В § 3 $N=3$ теория Янга-Миллса последовательно формулируется в аналитическом $N=3$ суперпространстве (I0). Параметры фундаментальной калибровочной группы вводятся как общие функции на $\mathbb{A}\mathbb{R}^{4+6|8}$, при этом в теории возникают три аналитические связности $V^{2,0}(\zeta,u)$, $V^{1,3}(\zeta,u)$, $V^{1,-3}(\zeta,u)$ сообразно числу гармонических производных, сохраняющих $N=3$ аналитичность. Действие представляется интегралом по аналитическому суперпространству, содержит только трилинейное самодействие и является первым примером локального действия, имеющего как целое структуру черн-саймоновского члена. Следующие из него уравнения движения есть просто условия интегрируемости на внутреннем пространстве $SU(3)_A/U(1)\times U(1)$, выражающие факт существования на массовой оболочке не зависящих от гармоник $N=3$ суперполей и обеспечивающие выполнение стандартных связей $N=3$ теории в вещественной геометрии.

В § 4 детально обсуждается взаимосвязь кинематических и динамических констрэйнтов $N=3$ теории и доказывается, что на массовой оболочке предложенное описание этой теории эквивалентно стандартному.

В § 5 содержится общее обсуждение построенной формулировки $N=3$ теории под углом ее сравнения с теориями калуза-клейновского типа, указаны некоторые дальнейшие перспективы, а также намечено доказательство конечности этой теории.

В главах УШ и IX описаны применения методов однородных пространств в суперполевом подходе для описания теорий со спонтанно нарушенными локальными суперсимметриями.

<u>В восьмой главе</u> методы нелинейных реализаций конечно-параметрических групп переносятся на случай локальных супергрупп в суперпространстве, т.е. групп суперполевых супергравитаций.

В § I строится нелинейная реализация супергруппы Огиевецкого-Сокачева в $\mathbb{C}^{4|2}$, и на этой основе получено модельно-независимое описание спонтанно-нарушенной конформной $N=1$ супергравитации.

В § 2 в аналогичном контексте рассмотрен случай минимальной эйнштейновской супергравитации, группа которой выделяется из локальной суперконформной известным условием на березиниан преобразований. Подчеркнут универсальный характер развитых методов и возможность их применения в других вариантах $N=1$ супергравитаций, а также при $N>1$.

<u>Девятая глава</u> содержит приложения методов нелинейных реализаций к бесконечно-параметрическим конформной и суперконформным симметриям в двух измерениях. Предложен новый метод ковариантной редукции, устанавливающий связь этих симметрий с уравнением Лиувилля и его суперрасширениями, а также позволяющий алгоритмически строить эти расширения в явно инвариантном суперполевом виде.

В § I метод объяснен на примере конформной группы и $N=0$ уравнения Лиувилля. Он является динамической разновидностью известного

обратного эффекта Хиггса и состоит в наложении на соответствующие формы Картана определенных ковариантных связей: зануляются все формы, кроме тех, которые принадлежат подалгебре представления нулевой кривизны для данного уравнения (в случае уравнения Лиувилля это алгебра $sl(2,\mathbb{R})$).

В § 2 с помощью метода ковариантной редукции построены новые интегрируемые двумерные системы с расширенной суперсимметрией: $N=2$ и $N=4$ суперсимметричные уравнения Лиувилля. Они получаются сразу в явно инвариантной суперполевой форме, для них возникают представления нулевой кривизны и линейные задачи на супералгебрах $osp(2|2)$ и $su(1,1|2)$. На основные суперполя возникают условия неприводимости типа условий грассмановой аналитичности. Важной особенностью $N=4$ уравнения является присутствие в его бозонном секторе уравнений σ-модели весс-зуминовского типа на однородном пространстве группы автоморфизмов конформной $N=4$ супералгебры $SU(2)_+\times SU(2)_-/SU(2)$. Для этого случая выписано инвариантное действие в терминах физических компонент.

В § 3 обсуждаются возможности применения построенных моделей и их дальнейших обобщений в струнных и других теориях, представляющих практический интерес.

<u>В заключении</u> суммированы основные результаты диссертации, указаны уже имеющиеся приложения и развития этих результатов, намечены проблемы для будущих исследований.

<u>Результаты диссертации опубликованы в работах:</u>

1. Ivanov E.A. On the geometric meaning of the N=1 Yang-Mills prepotential.- Phys. Lett. B, 1982, v. 117, N 1/2, p. 59-63 (JINR preprint E2-82-427, JINR, Dubna, 1982, 8 p.) (О геометрическом смысле $N=1$ янг-миллсова препотенциала).
2. Ivanov E.A. Intrinsic geometry of the N=1 supersymmetric Yang-Mills theory.- J. Phys. A, 1983, v. 16, N 11, p. 2571-2586. (JINR preprint E2-82-858, JINR, Dubna, 1982, 19 p.) (Внутренняя геометрия $N=1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса).
3. Гальперин А., Иванов Е., Огиевецкий В. Грассманова аналитичность и расширенные суперсимметрии.- Письма в ЖЭТФ, I98I, т. 33, в. 3, с. I76-I8I.
4. Гальперин А.С., Иванов Е.А., Огиевецкий В.И. Суперполевая анатомия мультиплета Файе-Сониуса.- ЯФ, I982, т. 35, в. 3, с. 790-800.
5. Гальперин А., Иванов Е., Огиевецкий В., Сокачев Э. Гармоническое суперпространство - ключ к $N=2$ суперсимметричным теориям.- Письма в ЖЭТФ, I984, т. 40, в. 4, с. I55-I58.

6. Иванов Е.А., Калицин С., Огиевецкий В.И., Гальперин А.С., Сокачев Э. N=2 суперсимметрия в гармоническом суперпространстве.- Труды УП Международного совещания по проблемам квантовой теории поля, Алушта, 20-25 апреля 1984. Дубна, 1984, с. 196-226 (Публикация ОИЯИ, Д2-84-366).
7. Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S., Ogievetsky V., Sokatchev E. Unconstrained N=2 matter, Yang-Mills and supergravity theories in harmonic superspace.- Class Quantum Grav., 1984, v. 1, N 5, p. 469-498. (Теории $N=2$ материи, Янга-Миллса и супергравитации без связей в гармоническом суперпространстве).
8. Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S., Ogievetsky V., Sokatchev E. N=3 supersymmetric gauge theory.- Phys. Lett. B, 1985, v. 151, N 3,4, p. 215-218. (N=3 суперсимметричная калибровочная теория).
9. Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S., Ogievetsky V., Sokatchev E. Unconstrained off-shell N=3 supersymmetric Yang-Mills theory.- Class. Quantum Grav., 1985, v. 2, N 2, p. 155-166 (JINR preprint E2-84-441, JINR, Dubna, 1984, 16 p.) (N=3 суперсимметричная теория Янга-Миллса без связей вне массовой оболочки).
10. Galperin A., Ivanov E., Ogievetsky V., Sokatchev E. Harmonic supergraphs: Green functions.- Class. Quantum Grav., 1985, v. 2, N5, p. 601-616 (JINR preprint E2-85-127, JINR, Dubna, 1985, 24 p.) (Гармонические суперграфики: функции Грина).
11. Galperin A., Ivanov E., Ogievetsky V., Sokatchev E. Harmonic supergraphs: Feynman rules and examples.- Class. Quantum Grav., 1985, v. 2, N 5, p. 617-630. (JINR preprint E2-85-128, JINR, Dubna, 1985, 20 p.) (Гармонические суперграфики: правила Фейнмана и примеры).
12. Ivanov E. Harmonic superspace: a new approach to extended supersymmetry.- "Spontaneous Symmetry Breaking and Related Subjects", Ed-rs L.Michel, J.Mozrzymas, A.Pekalski, World Scientific, 1985, p. 413-445 (Гармоническое суперпространство: новый подход к расширенной суперсимметрии).
13. Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S., Ogievetsky V., Sokatchev E. Extended supersymmetry in harmonic superspace.- Proc. of XXII International Conf. on High Energy Physics, Leipzig, July 19-25, 1984.- Zeuthen, 1984, v. I, p. 37-39 (Расширенная суперсимметрия в гармоническом суперпространстве).
14. Гальперин А., Иванов Е., Калицин С., Огиевецкий В., Сокачев Э. Внутренняя геометрия $N=2$ суперсимметрии и супергравитации. Труды УП семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля,Протвино,1984.- ИФВЭ,Серпухов,1984,т.П,с.219-233.

15. Гальперин А.С., Иванов Е.А., Огиевецкий В.И., Сокачев Э.С. N=2 теории без связей в гармоническом суперпространстве.- "Проблемы ядерной физики и космических лучей". Харьков, "Вища школа", 1985, вып. 24, с.7-16.
16. Galperin A., Ivanov E., Ogievetsky V., Sokatchev E. Hyper-Kähler metrics and harmonic superspace.- Commun. Math. Phys., 1986, v. 103, N 3, p. 515-526 (JINR preprint E2-85-514, JINR, Dubna, 1985, 15 p.) (Гиперкэлеровы метрики и гармоническое суперпространство).
17. Galperin A., Ivanov E., Ogievetsky V., Townsend P.K. Eguchi-Hanson type metrics from harmonic superspace.- JINR preprint E2-85-732, JINR, Dubna, 1985, 12 p. (Метрики типа Егучи-Хансона из гармонического суперпространства).
18. Galperin A., Ivanov E., Ogievetsky V. Duality transformations and most general matter self-coupling in N=2 supersymmetry.- JINR preprint E2-86-277, JINR, Dubna, 1986, 31 p. (Преобразования дуальности и наиболее общее самодействие материи в N=2 суперсимметрии).
19. Ivanov E.A., Kapustnikov A.A. On a model independent description of spontaneously broken N=1 supergravity in superspace.- Phys. Lett. B, 1984, v. 143B, N 4,5,6, p. 379-383 (Препринт ОИЯИ Р2-84-III, ОИЯИ, Дубна, 1984, 10 с.). (О модельно-независимом описании спонтанно нарушенной N=1 супергравитации в суперпространстве).
20. Ivanov E.A., Krivonos S.O. Integrable systems as nonlinear realizations of infinite-dimensional symmetries: the Liouville equation example.- Lett. Math. Phys., 1984, v. 8, N 1, p. 39-45 (Препринт ОИЯИ Р2-83-280, ОИЯИ, Дубна, 1983, 7 с.) (Интегрируемые системы как нелинейные реализации бесконечномерных симметрий: пример уравнения Лиувилля).
21. Иванов Е.А., Кривонос С.О. Нелинейная реализация конформной группы двумерия и уравнение Лиувилля.- ТМФ, 1984, т. 58, № 2, с. 200-212.
22. Иванов Е.А., Кривонос С.О. Суперполевые расширения уравнения Лиувилля.- Труды УП Международного совещания по проблемам квантовой теории поля, Алушта, 20-25 апреля 1984 г.- Дубна, 1984, с. 257-271 (Публикация ОИЯИ Д2-84-366).
23. Ivanov E.A., Krivonos S.O. U(1)-supersymmetric extension of the Liouville equation.- Lett. Math. Phys., 1983, v. 7, N 6, p. 523-531. (JINR preprint E2-83-104, JINR, Dubna, 1983, 10 p.) (U(1)-суперсимметричное расширение уравнения Лиувилля).

24. Ivanov E.A., Krivonos S.O. N=4 super-Liouville equation.- J.Phys. A, 1984, v. 17, N 12, p. L671-L676 (Препринт ОИЯИ Р2-84-250, ОИЯИ, Дубна, 1984, 8 с.)
(N=4 - суперсимметричное уравнение Лиувилля).
25. Иванов Е.А., Кривонос С.О. N=4 суперрасширение уравнения Лиувилля с кватернионной структурой.- ТМФ, 1985, т. 63, № 2, с. 230-243.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 июля 1986 года.