ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 539.182 + 530.145.1

2-85-480

ТЕР-АНТОНЯН
Валерий Мкртычевич

КУЛОНОВЫ И ОСЦИЛЛЯТОРНЫЕ МЕЖБАЗИСНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Специальность: 01.04.02 – теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1985

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований и на кафедре теоретической физики Ереванского государственного университета.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук И.В.КОМАРОВ

доктор физико-математических наук Л.И.ПОНОМАРЕВ

доктор физико-математических наук Р.Н.ФАУСТОВ

Ведущая организация - Институт физики высоких энергий (Протвино)

Защита диссертации состоится "   "____________ 1985 года на заседании Специализированного совета Д 047.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "   "____________ 1985 года

Ученый секретарь Специализированного совета
кандидат физико-математических наук В.И.ЖУРАВЛЕВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Системы со скрытой симметрией уже полвека привлекают внимание исследователей. Основополагающий вклад в эту область внесла пионерская работа В.А.Фока о скрытой симметрии атома водорода. Эта работа в значительной мере стимулировала интерес многих теоретиков к феномену скрытой симметрии и за последние двадцать лет здесь был достигнут весьма ощутимый прогресс. Вместе с этим в математике выдвинулись на передовой рубеж два мощных направления, имеющих много точек соприкосновения с квантовой теорией скрытых симметрий - область математической физики, изучающая связь симметрии с разделением переменных, и направление, выступающее в роли связующего звена между теорией групп и теорией специальных функций. Вопросы, решению которых посвящена данная диссертация, имеют прямое отношение к указанным выше трем интенсивно развивающимся и актуальным теоретическим дисциплинам. Объектом исследования выбраны два наиболее важных с физической точки зрения потенциала со скрытой симметрией - кулоново и осцилляторное поля. Предметом исследования служат базисы и межбазисные разложения в этих системах. Базисы определяются как собственные функции, соответствующие разным полным наборам взаимно коммутирующих операторов - гамильтониана и одного из генераторов группы скрытой симметрии (либо определенной комбинации, составленной из генераторов). К базисам предъявляется еще одно требование - в них переменные должны быть разделены. Это требование сразу отбирает из широкого класса таких объектов волновые функции, наиболее часто используемые в приложениях. Межбазисные разложения (МР) определены как линейные преобразования, связывающие базисы, относящиеся к разным полным наборам, но к одному и тому же собственному значению энергии. Классическим примером МР служит известное разложение плоской волны по сферическим волнам. К настоящему времени установлены: разложения параболического и сфероидального кулонова базисов по сферическому кулонову базису в дискретном спектре; разложение резерфордова базиса по сферическому кулонову базису в непрерывном спектре; некоторые разложения в гиперсферических базисах. В то же время для кулонова потенциала переменные разделяются в сферических, параболических, сферо-конических и в вытянутых сфероидальных координатах, а для изотропного осциллятора – в сферических, декартовых, цилиндрических, сфероконических, в вытянутых и сплюснутых сфероидальных, эллиптических цилиндрических и в эллипсоидальных координатах. Эти же потенциалы в двухмерном случае можно исследовать методом разделения переменных в декартовых, полярных и в эллиптических (круговой осциллятор) и в полярных, параболических и эллиптических (двумерный атом водорода) координатах. В многомерном изотропном осцилляторе помимо декартовых координат разделение переменных возможно в произвольных гиперсферических координатах. Перечисленные базисы влекут за собой широкий класс кулоновых и осцилляторных МР, являющихся весьма эффективным инструментом исследования квантовых систем со скрытой симметрией.

Цель работы состоит в построении нетривиальных кулоновых и осцилляторных базисов и в исследовании кулоновых и осцилляторных межбазисных разложений в нерелятивистской квантовой механике.

Научная новизна и практическая ценность работы. В диссертации предложен и применен простой и эффективный метод вычисления коэффициентов межбазисных разложений, опирающийся на тот факт, что базисы упрощаются в том либо другом пределе по одной или нескольким координатам. Этот метод, названный в диссертации методом асимптотик, рекомендует при вычислении коэффициентов МР переходить сначала в межбазисных разложениях по некоторым координатам к удобным пределам, и лишь после этого производить интегрирование по оставшимся "свободным" координатам. Предельные точки должны выбираться с тем расчетом, чтобы оставалась возможность использовать условие ортогональности, способное "обернуть" разложение и выразить искомый коэффициент через интеграл перекрытия, берущийся лишь по "свободным" координатам.

Во главу угла поставлен "принцип соответствия", требующий, чтобы при $R \to 0$ и $R \to \infty$ (R – размерный параметр, входящий в определение сфероидальных и эллиптических координат) базисы, коэффициенты межбазисных разложений, рекуррентные соотношения и другие формулы переходили в соответствующие результаты, установленные независимо в рамках разделения переменных в координатах, в которых вырождаются сфероидальные и эллиптические координаты в указанных пределах.

Решен вопрос об аналитическом продолжении межбазисных разложений из области непрерывного в область дискретного энергетического

спектра. При этом впервые применена техника аналитического продолжения функций, заданных в виде интегралов по контуру от известных функций нескольких комплексных переменных.

В атоме водорода при переходе от дискретного энергетического спектра к непрерывному "сферическое" квантовое число ℓ и параболическое квантовое число β (константа разделения) ведут себя по-разному: первое остается дискретным, но пробегает бесконечное число значений, а второе – из дискретного превращается в непрерывное, причем в общем случае комплексное. В результате, чтобы при положительных энергиях получить из разложения параболического базиса по сферическому обратное разложение, нужно знать, какой набор β обеспечивает ортогональность коэффициентов разложения по квантовому числу ℓ. В диссертации развиты два подхода к решению этого вопроса. Первый из них опирается на лемму Барнса из теории функций комплексного переменного, второй – на полученные интегральные представления для коэффициентов разложения. Второй метод применен к двумерному атому водорода.

Введены два диаграммных подхода, первый из которых предназначен для вычисления коэффициентов, генерирующих разложения декартова базиса многомерного изотропного осциллятора по гиперсферическим базисам, второй – для вычисления осцилляторных функций Вигнера, т.е. матричных элементов оператора конечных вращений в f -мерном евклидовом пространстве по декартовым волновым функциям многомерного изотропного осциллятора.

Межбазисные разложения переводят информацию о группе скрытой симметрии системы на язык удобных для использования математических соотношений. Такие разложения иногда служат отправной точкой для выяснения теоретико-групповых аспектов специальных функций. В некоторых случаях межбазисные разложения обобщают известные математические результаты. Знание коэффициентов, реализующих разложения в многомерном изотропном осцилляторе, ставит на реальную почву проблему исследования трансформационных свойств гиперсферических гармоник при произвольных конечных вращениях. Часто внешнее воздействие на квантовую систему со скрытой симметрией сводится к переходу этой системы из одного базисного состояния в другое. Вероятности этих переходов даются коэффициентами межбазисных разложений. Характерна и такая ситуация: система со скрытой симметрией выступает в роли "составляющего блока" в более сложной исследуемой системе (система во внешних полях, проблема трех тел, плазменные задачи, ридберговские состояния и т.д.), причем "внеблочная" часть играет роль возмущения. В такой ситуации межбазисные разложения дают уникальную возможность для построения теории возмущений, обходящей технически очень сложную проблему предварительной диагонализации, связанной со случайной вырожденностью невозмущенного энергетического спектра (автоматический учет скрытой симметрии во всех порядках теории возмущений).

<u>Для защиты выдвигаются следующие основные результаты, полученные в диссертации</u>:

I. Найден сфероидальный базис атома водорода и изотропного осциллятора, эллиптический базис двухмерного атома водорода и кругового осциллятора. Все перечисленные базисы удовлетворяют "принципу соответствия".

2. Доказано специфическое для атома водорода и изотропного осциллятора произвольной размерности свойство ортогональности радиальных волновых функций по орбитальному моменту. Выявлена природа этого свойства ортогональности.

3. Решена проблема разложения сфероидального базиса атома водорода по его сферическому и параболическому базису. Коэффициенты этих разложений выражены через коэффициенты, входящие в определение сфероидального базиса атома водорода. Развит матричный подход к проблеме разложения сфероидального базиса атома водорода по параболическому. Вычислены сфероидальные поправки к сферическому и параболическому базису атома водорода.

4. Решена проблема разложений сферического базиса атома водорода и полярного базиса двухмерного атома водорода по параболическим базисам этих систем. Найден метод, позволяющий совершать аналитическое продолжение в указанных разложениях из области $E>0$ в область $E<0$.

5. Установлены разложения в фундаментальных базисах двухмерного атома водорода и кругового осциллятора. Найдены разложения эллиптического базиса двухмерного атома водорода и кругового осциллятора по их фундаментальным базисам. Получены рекуррентные соотношения, определяющие коэффициенты межбазисных разложений в двухмерном атоме водорода и круговом осцилляторе. Вычислены эллиптические поправки к фундаментальным базисам этих систем.

6. Выведено разложение декартова базиса заряженной частицы, движущейся в однородном магнитном поле по полярному базису, соответствующему той же калибровке.

7. Вычислены коэффициенты, связывающие декартов базис многомерного изотропного осциллятора с его произвольным гиперсферическим базисом и декартовым базисом, повернутым относительно первого произ-

вольным образом. Для обеих проблем развита наглядная диаграммная техника вычислений.

<u>Апробация работы</u>. Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры теоретической физики и кафедры физики атомного ядра и элементарных частиц ЕГУ, кафедры квантовой механики ЛГУ, в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, на сессиях Отделения ядерной физики АН СССР, в НИИЯФ МГУ, в ИФВЭ (Протвино), в ИАЭ им.Курчатова.

<u>Публикации</u>. По теме диссертации опубликовано 23 работы.

<u>Структура и объем диссертации</u>. Диссертация содержит введение, пять глав, заключение, математическое дополнение, приложение; в ней 228 страниц машинописного текста, включая 30 таблиц, II рисунков и список литературы из I63 названий.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

<u>Во введении</u> обоснована актуальность и практическая ценность работы, прослежены наиболее важные этапы развития теории квантовых систем со скрытой симметрией, приведено краткое содержание диссертации.

<u>В первой главе</u> (§§ I-I0) исследована проблема МР в атоме водорода. В §I методом асимптотик получено разложение параболического базиса атома водорода по сферическому. В §2 для сфероидального базиса атома водорода выведена формула

$$\Psi(\xi,\eta,\varphi;R)=f(\xi,\eta,\varphi;R)\sum_{s=0}^{n-|m|-1}\sum_{t=0}^{n-|m|-1}a_s(R)\,b_t(R)\,(\xi-1)^s(1-\eta)^t. \qquad (I)$$

Функция $f(\xi,\eta,\varphi;R)$ представляет из себя произведение нормировочной постоянной $C(R)$ на фактор, определяющий поведение базиса (I) в пределах $\xi\to 1$, $\eta\to\pm 1$ и $\xi\to\infty$. Коэффициенты a_s и b_t удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям, из которых определяются собственные значения сфероидальной константы разделения. В §3 развита общая техника предельных переходов $R\to 0$, $R\to\infty$ в трехчленных рекуррентных соотношениях для коэффициентов a_s и b_t. В §4 найдена зависимость функции $f(\xi,\eta,\varphi;R)$ от коэффициентов a_s и b_t и доказано, что в пределах $R\to 0$ и $R\to\infty$ сфероидальный базис переходит в сферический и параболический соответственно. В §5 найдены точные формулы, выражающие коэффициенты, входящие в разложение сфероидального базиса атома водорода (в дискретном спектре) по сферическому и параболическому базисам, через коэффициенты a_s и b_t и исследованы пределы $R \to 0$ и $R \to \infty$ в этих разложениях. В §6 доказано условие ортогональности

$$\int\limits_0^\infty r^{f-3} R_{nl}(r) R_{nl'}(r)\, dr = \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{\partial E_n}{\partial l}\right)_{n_r} \frac{\delta_{ll'}}{2l+f-2},$$

в котором $f \geqslant 3$ – размерность пространства, l – глобальный момент, n_r – радиальное квантовое число, R_{nl} и E_n – радиальная волновая функция и энергия f-мерного атома водорода либо изотропного осциллятора. В §7 сформулирован матричный подход к решению проблемы разложения сфероидального базиса по сферическому и параболическому. Получены трехчленные рекуррентные соотношения, которые вместе с некоторыми дополнительными условиями (нормировка, симметрия) составляют единую систему уравнений, позволяющих с точностью до произвольного фазового множителя определить коэффициенты в разложениях сфероидального базиса атома водорода по сферическому и параболическому базисам. Найдены сфероидальные поправки к сферическому и параболическому базисам в рамках теории возмущений по степеням R и $1/R$ соответственно. В §8 включены результаты вычислений для $n = 0,2,1,3$. В §9 исследовано разложение параболического базиса по сферическому в непрерывном спектре (β – константа разложения в параболических координатах):

$$\Psi_{k\beta m} = \sum_{l=|m|}^{\infty} W_{k\beta}^{lm}\, \Psi_{klm}. \qquad (2)$$

Найдена формула, связывающая коэффициенты $W_{k\beta}^{lm}$ с обобщенной гипергеометрической функцией ${}_3F_2$ от единичного аргумента; показано, что коэффициенты $W_{k\beta}^{lm}$ являются аналитическим продолжением в комплексную плоскость коэффициентов Клебша-Гордана, входящих в разложение, выведенное в §1. Доказано свойство ортогональности

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_{k\beta}^{l'm}\, W_{k\beta}^{lm}\, d\beta = \delta_{ll'},$$

позволяющее "обернуть" преобразование (2). В §10 произведено аналитическое продолжение разложения (2) в область дискретного спектра. В этом же параграфе из разложения (2) в некоторых предельных случаях получены известные результаты теории специальных функций и доказана формула

$$W_{0\beta}^{lm} = (-1)^{l-m} \cdot \sqrt{4\pi}\; Y_{lm}(\arccos 2\beta, 0),$$

выражающая коэффициент $W_{0\beta}^{lm}$ через сферическую функцию.

Во второй главе (§§ 11-18) построена теория двухмерного атома водорода (ДАВ) в эллиптических координатах. Найдены взаимные разложения фундаментальных базисов, т.е. базисов, каждый из которых является собственной функцией гамильтониана и одного из генераторов группы скрытой симметрии ДАВ в дискретном спектре. Решена проблема разложения эллиптического базиса ДАВ по его полярному и параболическому базису в дискретном спектре. Установлена связь между последними базисами в области непрерывного спектра. Фундаментальные базисы ДАВ реализуются разделением переменных в полярной и двух параболических системах координат, ($2x = u^2 - v^2$, $y = u \cdot v$, $2y = \bar{u}^2 - \bar{v}^2$, $x = \bar{u} \cdot \bar{v}$; x, y – декартовы координаты). В §11 с помощью метода асимптотик доказано, что разложения в фундаментальных базисах реализуются d – функциями Вигнера при значении аргумента $\theta = \pi/2$. Рассмотрены также разложения, связывающие между собой фундаментальные базисы ДАВ, имеющие определенную четность (в эти базисы при $R \to 0$ и $R \to \infty$ переходит эллиптический базис ДАВ). Показано, что соответствующие коэффициенты выражаются через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_3F_2$ от единичного аргумента. В §12 показано, что разделение переменных в эллиптических координатах приводит к двум базисам ДАВ в дискретном спектре, имеющим определенную четность относительно преобразования $\eta \to -\eta$ либо $\xi \to -\xi$:

$$\Psi^{(+)}(\xi,\eta;R) = f^{(+)}(\xi,\eta;R) \sum_{s=0}^{N}\sum_{t=0}^{N} a_{2s}(R)\, a_{2t}(R) \left(\cos\frac{\eta}{2}\right)^{2s} \left(\operatorname{ch}\frac{\xi}{2}\right)^{2t}$$

$$\Psi^{(-)}(\xi,\eta;R) = f^{(-)}(\xi,\eta;R) \sum_{s=0}^{N}\sum_{t=0}^{N} b_{2s+1}(R)\, b_{2t+1}(R) \left(\cos\frac{\eta}{2}\right)^{2s} \left(\operatorname{ch}\frac{\xi}{2}\right)^{2t}.$$

Здесь N – главное квантовое число ($E_N = -2/(2N+1)^2$), а коэффициенты $a(R)$ и $b(R)$ удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям, из которых также определяются собственные значения эллиптической константы разделения $Q^{(\pm)}(R)$. В этом же параграфе исследованы пределы $R \to 0$ и $R \to \infty$. В §13 рассмотрены разложения указанных двух базисов по полярному и параболическому с данной четностью. Найдены точные формулы, выражающие коэффициенты этих разложений через коэффициенты a_{2s} и b_{2s+1}, входящие в эллиптический базис ДАВ. Исследованы пределы $R\to 0$ и $R\to\infty$ в этих формулах. В §14 получен явный вид эллиптического интеграла ДАВ:

$$\hat{Q}\Psi^{(\pm)}(\xi,\eta;R)=Q^{(\pm)}(R)\Psi^{(\pm)}(\xi,\eta;R)$$

$$\hat{Q}=\frac{1}{ch^2\xi-\cos^2\eta}\left(\cos^2\eta\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+ch^2\xi\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)-\frac{R\,ch\xi\cdot\cos\eta}{ch\xi+\cos\eta}.$$

С помощью этого интеграла движения в рамках матричной механики установлены трехчленные рекуррентные соотношения для коэффициентов, реализующих разложения эллиптического базиса ДАВ по его полярному и параболическому базисам. В §15 исследованы пределы $R\to 0$ и $R\to\infty$ в указанных коэффициентах, и в рамках теории возмущений вычислены эллиптические поправки к полярному и параболическому базисам ДАВ.

В §16 выведено разложение

$$\Psi_K(u,v)=\frac{1}{\sqrt{K}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{K}\right)\right\}\Psi_{Km}(r,\varphi).$$

Функция $\Psi_K(u,v)$ описывает процесс рассеяния на двухмерном кулоновском центре. Показано, что это разложение является аналитическим продолжением разложения параболического базиса ДАВ по полярному из дискретного спектра в непрерывный. В §17 исследованы разложения параболического базиса по полярному в непрерывном спектре в общем случае:

$$\Psi^{(\pm)}_{K\beta}(u,v)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}W^{(\pm)}_{K\beta m}\,\Psi_{Km}(r,\varphi). \qquad (3)$$

Здесь β – параболическая константа разделения. Коэффициенты разложения (3) выражены через обобщенные гипергеометрические функции ${}_3F_2$ от единичного аргумента. Выведено интегральное представление для коэффициентов $W^{(\pm)}_{K\beta m}$:

$$W^{(\pm)}_{K\beta m}=E^{(\pm)}_{K\beta m}\,C^{(\pm)}_{K\beta}\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^{\alpha}(1+\cos\varphi)^{\gamma}\begin{Bmatrix}\cos|m|\varphi\\ \sin|m|\varphi\end{Bmatrix}d\varphi, \qquad (4)$$

в которых $E^{(\pm)}_{K\beta m}$ – известная функция от K, β и m, $C^{(\pm)}_{K\beta}$ – параболическая нормировочная постоянная, а параметры α и γ определяются выражениями

$$\alpha=\frac{i}{2K}(1+\beta)-\frac{1}{4},\quad \gamma=\frac{i}{2K}(1-\beta)-\frac{1}{4}.$$

С помощью интегрального представления (4) вычислены параболические нормировочные постоянные и доказано условие ортонормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overset{*}{W}{}^{(\pm)}_{K\beta m'}W^{(\pm)}_{K\beta m}\,d\beta=\frac{1}{2}\left(\delta_{mm'}\pm\delta_{m,-m'}\right),$$

позволяющее разложить полярный базис по параболическому. В §18 развита техника аналитического продолжения разложения (3) в область дискретного спектра.

<u>В третьей главе</u> (§§19-23) построена теория квантового кругового осциллятора в эллиптических координатах, получены разложения фундаментальных базисов, решена проблема разложения эллиптического базиса кругового осциллятора по его полярному и декартову базисам. Найдено разложение декартова базиса заряженной частицы, движущейся в однородном магнитном поле по ее цилиндрическому базису. В круговом осцилляторе (КО) роль фундаментальных базисов играют решения, получающиеся разделением переменных в полярных и двух повернутых друг относительно друга на прямой угол декартовых системах координат (x , y и $\bar{x}$, $\bar{y}$). В §19 изучены разложения фундаментальных базисов КО и доказано, что они реализуются d – функциями Вигнера от значения аргумента $\theta=\pi/2$, как это имело место в аналогичных разложениях в ДАВ. В том же параграфе получены разложения в фундаментальных базисах, имеющих определенные четности относительно преобразований $\varphi\to-\varphi$ и $\varphi\to\varphi+\pi$ (в такие базисы переходит эллиптический базис КО при $R\to 0$ и $R\to\infty$). Коэффициенты, индуцирующие эти разложения, выражены через обобщенные гипергеометрические функции ${}_3F_2$ от единичного аргумента. В §20 решено уравнение Шредингера для КО в эллиптических координатах и установлено наличие следующих четырех типов базисов:

$$\Psi_1(\xi,\eta;R)=f_1(\xi,\eta;R)\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=0}^{n}a_{2s}(R^2)a_{2t}(R^2)(\cos\eta)^{2s}(ch\xi)^{2t}$$

$$\Psi_2(\xi,\eta;R)=f_2(\xi,\eta;R)\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=0}^{n}a_{2s+1}(R^2)a_{2t+1}(R^2)(\cos\eta)^{2s+1}(ch\xi)^{2t+1}$$

$$\Psi_3(\xi,\eta;R)=f_3(\xi,\eta;R)\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=0}^{n}b_{2s}(R^2)b_{2t}(R^2)(\cos\eta)^{2s}(ch\xi)^{2t}$$

$$\Psi_4(\xi,\eta;R)=f_4(\xi,\eta;R)\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=0}^{n}b_{2s+1}(R^2)b_{2t+1}(R^2)(\cos\eta)^{2s+1}\cdot(ch\xi)^{2t+1}.$$

Здесь n связано с главным квантовым числом N ($E_N = N+1$) формулами $N=2n$, $N=2n+1$, $N=2n+1$ и $N=2n+2$ соответственно. Коэффициенты $a(R^2)$ и $b(R^2)$ удовлетворяют определенным (явный вид приведен в диссертации) трехчленным рекуррентным соотношениям, из которых выводятся и собственные значения эллиптической константы разделения $Q(R^2)$ КО. Там же исследованы предельные переходы $R \to 0$ и $R \to \infty$ в этих рекуррентных соотношениях и в эллиптическом базисе. В §21 получены формулы, выражающие коэффициенты, входящие в разложения эллиптического базиса КО по его декартову и полярному базису и рассмотрены пределы $R \to 0$ и $R \to \infty$. В §22 получен явный вид эллиптического интеграла движения КО:

$$\hat{Q} = \frac{1}{ch 2\xi - \cos 2\eta}\left(\cos 2\eta \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + ch 2\xi \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) - \frac{R^4}{64} ch 2\xi \cos 2\eta .$$

С помощью этого интеграла движения выведены трехчленные рекуррентные соотношения, определяющие коэффициенты разложений эллиптического базиса КО по полярному и декартову базису и зависимость эллиптической константы разделения Q от R^2. Вычислены эллиптические поправки к полярному и декартову базису КО и получен явный вид константы $Q(R^2)$ при малых и больших значениях параметра R. В §23 исследовано разложение декартова базиса заряженной частицы в однородном магнитном поле $\vec{H} = (0,0,H)$ по полярному базису этой же задачи. После приведения обоих базисов к единой "полярной" калибровке, использования метода асимптотик и теоремы сложения (9), доказано, что это разложение имеет вид

$$\Psi_{n y_0}(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{n} \bar{H}_{n-m}\left(\frac{y_0}{a}\right) \Psi_{n-\frac{m+|m|}{2}, m}(\tau, \varphi),$$

где n - квантовое число, нумерующее уровни энергии $E_n = \hbar\omega_H (n+\frac{1}{2})$, $\omega_H = e|H|/\mu c$, $a = (\hbar/\mu\omega_H)^{1/2}$, $y_0 = a^2 p_x/\hbar$, а e и μ - заряд и масса электрона. Через $\bar{H}_n(x)$ обозначена нормированная на единицу функция Эрмита.

<u>В четвертой главе</u> (§§24-29) изложены вопросы, касающиеся базисов и МР в изотропном осцилляторе (ИО). В №24 в рамках метода асимптотик вычислен коэффициент, индуцирующий разложение цилиндрического базиса ИО по сферическому. Показано, что с точностью до постоянной отмеченный коэффициент совпадает с обобщенной гиперсферической функцией ${}_3F_2$:

$$W_{n n_3}^{\ell m} = Const \cdot {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -\frac{n-\ell}{2}, -\frac{n_3}{2}, -\frac{n_3-1}{2} \\ \frac{\ell+|m|-n_3}{2}+1, \frac{\ell-m-n_3}{2}+1 \end{matrix} \middle| 1 \right\}.$$

Здесь n_3 - декартово квантовое число, n - главное квантовое число, ℓ и m - сферические квантовые числа. Выяснено, что этот коэффициент выражается через коэффициент Клебша - Гордана группы $SU(2)$, аналитически продолженный на четвертьцелые значения момента. В §25 задача об ИО исследована в вытянутых ξ, η, φ и сплюснутых $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\varphi}$ координатах и установлено, что как вытянутый, так и сплюснутый сфероидальный базисы ИО "расщепляются" на два подбазиса в зависимости от четности разности $n-m$. Вытянутые сфероидальные подбазисы имеют вид

$$\Psi^{(+)}(\xi,\eta,\varphi;R) = f^{(+)}(\xi,\eta,\varphi;R) \sum_{s=0}^{n-|m|} \sum_{t=0}^{n-|m|} a_s(R^2)\, a_t(R^2)\, \xi^s \cdot \eta^t$$

$$\Psi^{(-)}(\xi,\eta,\varphi;R) = f^{(-)}(\xi,\eta,\varphi;R) \sum_{s=0}^{n-|m|-1} \sum_{t=0}^{n-|m|-1} a_{s+1}(R^2)\, a_{t+1}(R^2)\, \xi^s \cdot \eta^t,$$

где $f^{(\pm)}$ - функция, явная зависимость которой от переменных ξ, η и φ известна, суммирование в верхнем и нижнем выражениях ведется по четным и нечетным s и t соответственно. Коэффициенты a_s удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям, из которых определяются также собственные значения константы разделения $Q(R^2)$ в вытянутых сфероидальных координатах. Сплюснутый сфероидальный базис ИО получается из вытянутого заменой $\xi \to i\bar{\xi}$, $R \to -i\bar{R}$. В §26 проанализировано поведение вытянутого сфероидального базиса ИО при $R \to 0$ и $R \to \infty$ и установлено, что в этих пределах он вырождается в сферический и цилиндрический базисы ИО соответственно. В §27 рассмотрены разложения вытянутого сфероидального базиса ИО по его сферическому и цилиндрическому базисам, получены точные формулы, связывающие коэффициенты этих разложений с коэффициентами a_s, определяющими явный вид сфероидального базиса ИО. В §28 развит матричный подход к разложению цилиндрического базиса ИО по сферическому и установлены трехчленные рекуррентные соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты, входящие в это разложение. В §29 установлен явный вид сфероидального интеграла движения ИО

$$\hat{Q} = \frac{1}{\xi^2-\eta^2}\left\{(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\xi}\right]-(\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\right]\right\} - \frac{\xi^2+\eta^2-2}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{R^4}{16}(\xi^2-1)(1-\eta^2)+\frac{ER^2}{2},$$

где E – энергия ИО. С помощью этого интеграла движения получены трехчленные рекуррентные соотношения, реализующие разложения сфероидального базиса ИО по сферическому и цилиндрическому базисам и в рамках теории возмущений вычислены сфероидальные поправки к последним двум базисам.

В пятой главе (§§30–34) исследованы МР в многомерном изотропном осцилляторе (МИО). В §30 с помощью метода асимптотик установлено интегральное представление

$$W_{N\vec{\ell}\vec{n}} = Const\cdot\int d\Omega_f\, Y_{\vec{\ell}}(\vec{\theta})\,\hat{x}_1^{n_1}\hat{x}_2^{n_2}\cdots\hat{x}_f^{n_f}$$

для коэффициентов $W_{N\vec{\ell}\vec{n}}$, определяющих разложение декартова базиса МИО по произвольному гиперсферическому. Здесь n_i – декартовы квантовые числа, $\vec{n}=(n_1\cdots n_f)$, f – размерность пространства, $\vec{\ell}=(\ell_1,\cdots\ell_{f-1})$, ℓ_1 – глобальный момент, $\ell_2,\cdots\ell_{f-1}$ – гипермоменты, $N=n_1+n_2+\cdots+n_f$, $d\Omega_f$ – элемент телесного угла, x_i – декартовы координаты, $\hat{x}_i=x_i/r$, $Y_{\vec{\ell}}(\vec{\theta})$ – гиперсферическая гармоника. Явный вид функций $\hat{x}_i(\vec{\theta})$ и $Y_{\vec{\ell}}(\vec{\theta})$, а также формула, связывающая элемент телесного угла $d\Omega_f$ с произведением $d\theta_1\cdots d\theta_{f-1}$, определяются типом гиперсферического дерева. В §31 вычислены вклады, вносимые каждой из четырех конфигураций ячеек, характерных для произвольного гиперсферического дерева. В §32 решена задача о вычислении коэффициента $W_{N\vec{\ell}\vec{n}}$ по известным вкладам от отдельных ячеек. Введено представление о "дереве разложения", соответствующем гиперсферическому дереву, выяснены структурные элементы, определяющие "дерево разложения" и доказано, что для любого "дерева разложения"

$$W_{N\vec{\ell}\vec{n}} = (-1)^{\frac{N-\ell_1}{2}}\, 2^{-\frac{p}{2}}\prod_{i=1}^{f-1}(-1)^{Q_i}\, C^{c_i,\gamma_i}_{a_i,\alpha_i;b_i,\beta_i}.$$

Входящие в эту формулу параметры однозначно определяются структурой "дерева перехода" и "внешними" декартовыми квантовыми числами, а под знаком произведения записаны коэффициенты Клебша – Гордана. В §33 введено понятие об осцилляторной функции Вигнера (ОФВ). Так

назван матричный элемент оператора $\hat{G}(f)$ конечных f-мерных вращений, построенный по декартову базису МИО. С помощью параметризации оператора $\hat{G}(f)$ определенным образом подобранной последовательностью плоскостных вращений на $f(f-1)/2$ углов Эйлера выведена редукционная процедура вычисления ОФВ. В §34 развита диаграммная техника вычисления ОФВ.

Заключение диссертации содержит перечень выдвигаемых к защите результатов.

В математическое дополнение включены некоторые формулы, использованные в основном тексте. Таблицы и рисунки выделены в приложении.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. L.G.Mardoyan, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan. Spheroidal analysis of the hydrogen atom. – J.Phys.A: Math. Gen., 1983, 16, p. 711-728.
   Сфероидальный анализ атома водорода. – Дубна, 1982. – 18 с. (Препринт/ Объед. ин-т ядер. исслед.: Р2-82-249).
2. М.Г.Арутюнян, Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян. К соотношению между параболическими и сферическими волновыми функциями атома водорода. – Изв. АН АрмССР, Физика, 1972, 13, с. 152-154.
3. Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян. Связь между сферическими и параболическими кулоновыми волновыми функциями в непрерывном спектре. – Дубна, 1980, – 12 с. (Препринт/Объед. ин-т ядер. исслед.: Р2-80-318).
4. Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян. К разложению сфероидального базиса атома водорода по сферическому. – Изв. АН АрмССР, Физика, 1984, 19, с. 3-9.
5. L.G.Mardoyan, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan. Spheroidal corrections to the spherical and parabolic basis of the hydrogen atom.
   Сфероидальные поправки к сферическому и параболическому базисам атома водорода. – Дубна, 1984, – 4 с. (Препринт/Объед. ин-т ядер. исслед.: Е2-84-516).
6. Г.М.Арутюнян, Л.С.Давтян, Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян. Связь между волновыми функциями двухмерных квантовых систем со скрытой симметрией. – Ереван, 1979, – 24 с. (Препринт/Проб. Лаб.Радиац. Физ.: 79-17).

7. Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян. Двухмерный атом водорода. Эллиптический базис. - ТМФ, 1984, 61, с. 99-117.
8. Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян. Межбазисные разложения в двухмерном атоме водорода. - ТМФ, 1985, 63, 406-416.
9. Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян. К эллиптическому базису двухмерного атома водорода. - Дубна, 1984, - 4 с.(Препринт/Объед. ин-т ядер. исслед.: Р2-84-110).
10. Г.М.Арутюнян, М.Г.Арутюнян, Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян. Связь между волновыми функциями простейших квантовых систем со скрытой симметрией. - Ереван, 1977, - 18 с.(Препринт / Проб. Лаб. Радиац. Физ.: 77-10).
11. L.G.Mardoyan, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan. Hidden symmetry, separation of variable and interbasis expansions in the two-dimensional hydrogen atom. - J.Phys. A: Math. Gen., 1985, 18, p. 455-466.
Скрытая симметрия, разделение переменных и межбазисные разложения в двухмерном атоме водорода. - Дубна, 1983, - 18 с. (Препринт/Объед. ин-т ядер. исслед.: Р2-83-899).
12. Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян, Г.Т.Торосян. Связь между декартовыми и полярными волновыми функциями кругового осциллятора. - Ереван, 1977, - 10 с. (Препринт/Проб. Лаб. Радиац. Физ.: 77-04).
13. Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян. Эллиптический базис кругового осциллятора. - Дубна, 1984, - 11 с. (Препринт/Объед. ин-т ядер. исслед.: Р2-84-211).
14. Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян. Связь между декартовыми и полярными волновыми функциями кругового осциллятора и динамическая симметрия O(3). - Изв. АН АрмССР, Физика, 1978, 13, с. 235-237.
15. L.G.Mardoyan, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan. Interbasis Expansions in a Circular Oscillator. - Nuovo Cim.A: 1985, 86, No. 4, 324-336.
16. Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян. Связь между декартовыми и полярными волновыми функциями нерелятивистской заряженной частицы в однородном магнитном поле. - ТМФ, 1979, 40, 140-143.
17. L.G.Mardoyan, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan. On the elliptic basis of a circular oscillator.
К эллиптическому базису кругового осциллятора. - Дубна, 1984, - 14 с. (Препринт/Объед. ин-т ядер. исслед.: Р2-84-517).

18. Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян. Коэффициенты преобразования между декартовыми, цилиндрическими и сферическими волновыми функциями изотропного осциллятора. - Дубна, 1978, - 21 с. (Сообщения/Объед. ин-т ядер. исслед.: Р2-11962).
19. Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян. Изотропный осциллятор: трехчленные соотношения для коэффициентов разложений сфероидального базиса по сферическому и цилиндрическому. - Дубна, 1985, - 8 с. (Сообщения/Объед. ин-т ядер. исслед.: Р2-85-139).
20. Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян. Изотропный осциллятор: сфероидальные волновые функции. - Дубна, 1985, - 16 с. (Сообщения/Объед. ин-т ядер. исслед.: Р2-85-141).
21. Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян. Изотропный осциллятор: разложение сфероидального базиса по сферическому и цилиндрическому. - Дубна, 1985, - 12 с. (Сообщения/Объед. ин-т ядер. исслед.: Р2-85-140).
22. Г.С.Погосян, Я.А.Смородинский, В.М.Тер-Антонян. Многомерный изотропный осциллятор: переходы от декартова базиса к гиперсферическим. - Дубна, 1982, - 11 с. (Сообщения/Объед. ин-т ядер. исслед.: Р2-82-118).
23. G.S.Pogosyan, Ya.A.Smorodinsky, V.M.Ter-Antonyan. Oscillator Wigner Functions. - J.Phys. A: Math. Gen., 1981, 14, p. 769-776.
Осцилляторные функции Вигнера. - Дубна, 1980, - 15 с. (Препринт/Объед. ин-т ядер. исслед.: Р2-80-87).

Рукопись поступила в издательский отдел
21 июня 1985 года