ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-85-40

УДК 530.145

ЗЛАТЕВ
Стоян Иванов

ПРОБЛЕМА НУЛЕВЫХ МОД В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СОЛИТОНА

Специальность: 01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1985

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор В.А.Матвеев

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
старший научный сотрудник Ю.С.Вернов

доктор физико-математических наук
профессор Р.Н.Фаустов

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного университета.

Автореферат разослан "12" февраля 1985 г.

Защита диссертации состоится "27" марта 1985 г. на заседании специализированного Совета К047.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук В.И.Журавлев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Интерес к методам описания протяженных объектов в рамках локальной квантовой теории поля усилился в последнее время в связи с проблемой описания свойств адронов и, в частности, в связи с вопросом о невылетании кварков. Для ряда вполне интегрируемых систем квантовые объекты, соответствующие солитонным классическим решениям полевых уравнений, исследуются при помощи квантового метода обратной задачи (см., например, /1/). Иной метод, не предполагающий полной интегрируемости системы *, основан на квазиклассическом разложении (разложении по степеням постоянной Планка $\hbar$) физических величин, характеризующих квантовый солитон /2,3/. Развитие последовательной схемы теории возмущений, позволяющей, в принципе, вычислять квантовые поправки любого порядка, осложняется тем, что спектр возбуждений поля около выделенного солитонного решения содержит возбуждения с нулевой частотой (так называемая проблема нулевых мод). Применение метода коллективных координат Н.Н.Боголюбова /4,5/ позволяет явно учесть симметрию и избежать появления нулевых мод /6-10/. Вместе с тем, было предложено несколько схем теории возмущений в окрестности солитонного решения, не использующих коллективные координаты /11-13,2,14/. В таких схемах нулевые моды не исключены полностью, а решение порожденных ими проблем ищется на основе соотношений, обусловленных симметрией задачи /12,15-17/. Актуальность темы диссертации определяется необходимостью построения схем теории возмущений для нахождения квантовых поправок к величинам, характеризующим классические частицеподобные решения.

Цель работы. Исследование однозначности членов квазиклассического разложения при квантовании солитонных решений на базе функциональных методов без использования коллективных координат. Исследование инфракрасных особенностей в третьих квантовых поправках к амплитуде солитон-солитонного перехода и к массе солитона.

* В связи с этим мы будем называть частицеподобное решение солитонным, а соответствующий протяженный объект – солитоном, не подразумевая непременно полной интегрируемости системы.

Научная новизна и практическая ценность. В диссертации на базе операторных тождеств дана строгая формулировка утверждения о сокращении вкладов трансляционной моды в случае, когда последняя является нормируемой функцией на пространстве-времени. Подробно рассмотрена связь между проблемой однозначности членов квазиклассического разложения и вопросом о сокращении инфракрасных расходимостей. Впервые с этой точки зрения изучены третьи квантовые поправки к амплитуде солитон-солитонного перехода и к массе солитона. Полученные в диссертации результаты могут быть полезны при исследовании высших поправок к массе солитона.

Апробация диссертации. Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на семинарах ЛТФ ОИЯИ, ОТФ ИЯИ АН СССР, на УП Международном совещании по проблемам квантовой теории поля (Алушта, 1984 г.), на Международном семинаре "Кварки-84" (Тбилиси, 1984 г.).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 5 статей.

Объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и двух приложений, содержит 96 страниц машинописного текста; библиографический список литературы включает II4 названий.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дана постановка задачи и указано ее место среди остальных проблем в этой области.

В первой главе рассматривается проблема, связанная с произволом в определении пропагатора как элемента диаграммной техники при наличии нормируемой нулевой моды.

В § I, имеющем вводный характер, дано описание модели самодействующего скалярного поля в двумерном пространстве-времени с функционалом действия ($\hbar = c = 1$)

$$S = \int dt \int dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{g^2}V(g\varphi)\right], \tag{I}$$

на примере которой в диссертации рассматривается проблема нулевых мод. Предполагается, что $V(\varphi)$ обладает по крайней мере двумя вырожденными минимумами, так что уравнение поля обладает солитонным (частицеподобным) решением

$$\varphi_{кл}(t,x;a,v) \equiv \varphi_{кл}(\tau,z;a,0) = \frac{1}{g}\phi(z-a), \tag{2}$$

где

$$\tau = \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}}, \quad z = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}},$$

v – скорость солитона; a – параметр, определяющий положение солитона в некоторый фиксированный момент времени. При разложении поля в окрестности солитонного решения $\varphi_{кл}$ оператор /I2/

$$\hat{h} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V''(\phi(z-a)), \tag{3}$$

определяющий спектр возбуждений, обладает нулевым собственным значением. Соответствующая функция нулевой моды

$$\psi(z) = \frac{-1}{N}\phi'(z-a); \quad N^2 = \int dz(\phi'(z))^2, \tag{4}$$

является также собственной функцией оператора

$$H = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \hat{h}; \tag{5}$$

при этом, если H определен, например /I3/, на пространстве функций, периодических по τ с периодом T, то ψ является нормируемой собственной функцией H. Вследствие этого уравнение для функции Грина

$$HG(\tau,z;\tau',z') = \delta(\tau-\tau')\delta(z-z') \tag{6}$$

не имеет решений, а функция G, удовлетворяющая уравнению

$$HG(\tau,z;\tau',z') = \delta(\tau-\tau')\delta(z-z') - \frac{1}{T}\psi(z)\psi(z') \tag{7}$$

при преобразовании

$$G(\tau,z;\tau',z') \to G(\tau,z;\tau',z') + \alpha\psi(z)\psi(z'), \tag{8}$$

где α – произвольный параметр, переходит снова в решение уравнения (7).

Продемонстрирована связь между нарушением непрерывной симметрии классическим решением и наличием нулевых мод.

В § 2 на примере квантовомеханической системы с одной степенью свободы получен ряд соотношений, позволяющих доказать независимость членов квазиклассического разложения от произвольного вклада нулевой моды в пропагатор.

В § 3 при помощи этих соотношений и системы основных операторных тождеств /I5/ доказана однозначность членов подходящим образом определённого квазиклассического разложения амплитуды перехода в квантовомеханической задаче. Обобщение квазиклассического петлевого разложения, соответствующее введению дополнительной вершины взаимодействия, полностью совпадает с тем, что получается при использовании трюка Фаддеева-Попова /18/ или метода коллективных координат Боголюбова /5/.

В § 4 проблема, связанная с наличием у оператора H нулевого собственного значения, рассмотрена в случае средних по односолитонным полям от трансляционно-инвариантных функционалов. Пусть $B[\eta]$ – функционал, полученный при помощи подстановки

$$\varphi(\tau,z) = \varphi_{кл}(t,z;\alpha,0) + \eta(\tau,z) \tag{9}$$

из некоторого функционала $\mathcal{B}[\varphi]$, инвариантного относительно трансляций

$$\varphi(\tau,z) \to \varphi(\tau,z-b), \tag{10}$$

а среднее $\langle B\rangle$ определяется соотношением

$$\langle B\rangle = exp\{-\frac{i}{2}\int G\frac{\delta}{\delta\eta}\frac{\delta}{\delta\eta}\}(1+\frac{g}{NT}\int\psi'\eta)\,exp\{-\frac{i}{g^2}\Gamma[g\eta]\}B[\eta]\Big|_{\eta=0}, \tag{11}$$

где

$$\Gamma[\eta] = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{-T/2}^{T/2}d\tau\int dz\, V_n(z)\eta^n(\tau,z), \tag{12}$$

$$V_n(z) = \frac{d^n}{d\varphi^n}V(\varphi)\Big|_{\varphi=\Phi(z-\alpha)}, \quad n=3,4,\ldots \tag{13}$$

и G удовлетворяет уравнению (7). Тогда члены квазиклассического разложения среднего $\langle B\rangle$ оказываются инвариантными относительно преобразований (8). Дано доказательство этого утверждения на базе операторных тождеств.

<u>Вторая глава</u> посвящена вопросу о компенсации вкладов трансляционной и лоренцевой нулевых мод.

В § 1 рассмотрен вклад трансляционной моды $\psi(z)$ и лоренцевой моды $\tau\psi(z)$ во вторую квантовую поправку $g^2\widetilde{W}_2$ к амплитуде солитон-солитонного перехода. Ряд, определяющий квантовые поправки к квазиклассическому приближению, записывается в виде /12,2/

$$\widetilde{W} \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g^{2n}\widetilde{W}_{2n} = exp\{-\frac{i}{2}\int\widetilde{G}\frac{\delta}{\delta\eta}\frac{\delta}{\delta\eta}\}\,exp\{-\frac{i}{g^2}\Gamma[g\eta]\}\Big|_{\eta=0}. \tag{14}$$

Здесь $\widetilde{G}$ удовлетворяет * уравнению (6). С целью контроля над расходимостями объемного типа область интегрирования по τ в каждой вершине ограничена интервалом $[-T/2, T/2]$. Функция $\widetilde{G}$ определена с точностью до симметричной билинейной комбинации нулевых мод /15,2/ $K^{(\alpha\gamma\delta)}$:

$$\widetilde{G} = \widetilde{G}^{(0)} + K^{(\alpha\gamma\delta)}, \tag{15}$$

где

$$K^{(\alpha\gamma\delta)}(\tau,z;\tau',z') = \alpha\psi(z)\psi(z') + \gamma\tau\tau'\psi(z)\psi(z') + \delta\cdot(\tau+\tau')\psi(z)\psi(z'), \tag{16}$$

$$\widetilde{G}^{(0)} = \widetilde{G}_0^{(0)} + \widetilde{G}_c, \tag{17}$$

$$\widetilde{G}_0^{(0)} = \frac{1}{2}|\tau-\tau'|\,\psi(z)\psi(z'), \tag{18}$$

G_c – вклад остального спектра оператора $\hat{h}$ (кроме нулевого собственного значения). Величина $\widetilde{W}_2$ зависит от α, γ и δ, при этом

$$\Delta\widetilde{W}_2 = \widetilde{W}_2^{(\alpha\gamma\delta)} - \widetilde{W}_2^{(0)} = A_1\alpha + A_2\alpha^2 + C_1\gamma + C_2\gamma^2 + B_{110}\alpha\gamma + D_2\delta^2, \tag{19}$$

где A_1, A_2, C_1, C_2, B_{110}, D_2 – некоторые функции T (для них получены явные выражения).

В § 2, в предположении, что α, γ и δ в (16) зависят от T, получены асимптотические условия для α, γ и δ при $T\to\infty$, обеспечивающие однозначность второй квантовой поправки к массе солитона. Ограничения на допустимое асимптотическое поведение коэффициентов билинейной формы K будут более слабыми, если α и γ подчинены линейному соотношению

$$\alpha(T) + \frac{T^2}{4}\gamma(T) = 0. \tag{20}$$

Благодаря частичной взаимной компенсации вкладов трансляционной и лоренцевой нулевых мод вторая поправка к массе солитона, определяемая

* Если поля определены на всем пространстве-времени, функция нулевой моды принадлежит непрерывному спектру H, и решение уравнения (6) существует /12/.

по асимптотическому поведению солитонной функции распространения /2/, совпадает с поправкой, найденной при помощи других методов.

<u>В третьей главе</u> рассматривается проблема инфракрасных особенностей в членах петлевого разложения амплитуды солитон-солитонного перехода.

В § I показано, что если пропагатор имеет вид (I7), некоторые диаграммы обладают инфракрасными особенностями. Предложен способ классификации диаграмм по типу особенностей.

В § 2 описан метод анализа инфракрасных особенностей в членах петлевого разложения амплитуды. Положив

$$\exp \Lambda[g,\eta] = \exp\left\{-\frac{i}{2}\int \tilde{G}_c \frac{\delta}{\delta\eta}\frac{\delta}{\delta\eta}\right\} \exp\left\{-\frac{i}{g^2}\Gamma[g\eta]\right\} \tag{21}$$

и перейдя к приведенному вершинному функционалу (см., например, /I9/)

$$\bar{\Lambda}[g,\eta] = \exp\left\{-\frac{i}{2}\int \tilde{G}_0^{(0)} \frac{\delta}{\delta\eta}\frac{\delta}{\delta\eta}\right\}\Lambda[g,\eta], \tag{22}$$

имеем

$$\tilde{W} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\exp\left\{-\frac{i}{2}\sum_{i\neq k}\int \tilde{G}_0^{(0)}\frac{\delta}{\delta\eta_i}\frac{\delta}{\delta\eta_k}\right\}\bar{\Lambda}[g,\eta_1]\ldots\Lambda[g,\eta_n]\Big|_{\substack{\eta_j=0\\ j=1,2,\ldots n}} = \tag{23}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\exp\left\{\frac{i}{4\pi}\sum_{i\neq k}\int d\nu\, \nu^{-2}\frac{\delta}{\delta\zeta_i(\nu)}\frac{\delta}{\delta\zeta_k(-\nu)}\right\}\mathcal{M}[g,\zeta_1]\ldots\mathcal{M}[g,\zeta_n]\Big|_{\substack{\zeta_j=0,\\ j=1,\ldots n}}$$

где

$$\mathcal{M}[g,\zeta] = \bar{\Lambda}[g,\eta]\Big|_{\eta(\tau,\tau)=\psi(\tau)\int d\nu\,\zeta(\nu)e^{i\nu\tau}}, \tag{24}$$

$$\nu^{-2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(\nu-i0)^2}+\frac{1}{(\nu+i0)^2}\right].$$

Установлены некоторые свойства тех полных приведенных вершинных функций определенного порядка, т.е. коэффициентных функций двойного ряда

$$\mathcal{M}[g,\zeta] = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{j=J_m}^{\infty} g^{m+2j}\int M_{m,m+2j}(\nu_1,\ldots,\nu_m;T)\times \tag{25}$$

$$\times\,\zeta(\nu_1)\ldots\zeta(\nu_m)\,d\nu_1\ldots d\nu_m\,; \quad J_0=1,\ J_1=J_2=0,\ J_m=-1,\ m=3,4,\ldots,$$

которые дают вклад в трехпетлевой член разложения амплитуды.

В § 3 рассмотрены трехпетлевые диаграммы (диаграммы порядка g^4) в разложении амплитуды. Установлено, что имеет место лишь частичная компенсация инфракрасных особенностей отдельных диаграмм. Расходимости инфракрасного типа существуют при любых постоянных (не зависящих от T) α, γ и δ.

В § 4 рассмотрена связь между частичным сокращением инфракрасных особенностей и асимптотическими соотношениями, существование которых обусловлено трансляционной симметрией задачи.

<u>В четвертой главе</u> обсуждается проблема инфракрасных особенностей в рамках подхода /I3/, основанного на выделении группового объема.

В § I показано, что, несмотря на явную трансляционную инвариантность подхода /I3/, отдельные диаграммы могут иметь аномальное поведение при $T\to\infty$, что является проявлением инфракрасных особенностей.

В § 2 рассмотрены диаграммы порядка g^4, определяющие третью квантовую поправку к массе солитона. Выделены те из них, которые обладают инфракрасными особенностями. При помощи асимптотического разложения этих диаграмм по обратным степеням полного времени показано, что особенности полностью сокращаются благодаря тождествам, существование которых является следствием трансляционной симметрии.

<u>В заключении</u> диссертации перечислены основные результаты.

<u>В приложении I</u> приведен способ вычисления "средних" от функционалов некоторого специального вида в квантовомеханической задаче, рассмотренной в главе I.

<u>В приложении 2</u> дано доказательство одного вспомогательного утверждения, которое использовано в § 4 третьей главы.

<u>Основные результаты, полученные в диссертации:</u>

I. На примере одномерной квантовомеханической модели развит метод операторных тождеств, позволяющий формализовать доказательство утверждения о точном сокращении вкладов нулевой моды в любом порядке квазиклассического разложения. Проведенный анализ естественным образом приводит к необходимости введения новых вершин и соответствующих им диаграмм, отвечающих модифицированной теории возмущений.

2. Сформулированы операторные тождества, и на их основе дано доказательство сокращения вкладов нулевой моды в любом порядке квазиклассического разложения соответствующим образом определенного среднего по односолитонным полям от трансляционно-инвариантного функционала.

3. Изучена зависимость двухпетлевой поправки к амплитуде солитон-солитонного перехода от коэффициентов билинейной комбинации трансляционной и лоренцевой нулевых мод в функции Грина. Получены асимптотические условия для этих коэффициентов при $T\to\infty$. Показано, что имеет место частичная взаимная компенсация вкладов нулевых мод, если коэффициенты удовлетворяют определенному условию.

4. Показано, что двухпетлевая поправка к массе солитона, определяемая по асимптотическому поведению солитонной функции распространения, совпадает с второй квантовой поправкой, найденной при помощи других методов.

5. Проведен анализ инфракрасных особенностей в выражении для трехпетлевой поправки к амплитуде солитон-солитонного перехода при использовании полного времени T в качестве "естественного" параметра инфракрасной регуляризации. Показано, что для определенного класса пропагаторов в сумме трехпетлевых диаграмм без внешних линий особенности сокращаются лишь частично. Получены выражения для старших расходящихся членов в асимптотическом разложении третьей поправки к амплитуде солитон-солитонного перехода при $T \to \infty$.

6. В рамках метода, основанного на выделении группового объема, показано, что инфракрасные особенности в выражении для третьей квантовой поправки к массе солитона полностью сокращаются.

7. Показано, что сокращение инфракрасных особенностей в третьей поправке к массе солитона, так же как и сокращение вкладов трансляционной моды в средние от трансляционно-инвариантных функционалов, обусловлено существованием некоторой системы тождеств, отражающих исходную трансляционную симметрию задачи.

Литература

I. Изергин А.Г., Корепин В.Е. - ЭЧАЯ, I982, т.I3, вып.3, с.50I-54I.
2. Faddeev L.D., Korepin V.E. - Phys.Rep., 1978, v. 42C, No.1, p.1-87.
3. Rajaraman R. Solitons and instantons. An introduction to solitons and instantons in quantum field theory. - Amsterdam - New-York - Oxford: North Holland, 1982, 409 p.
4. Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В. - ЖЭТФ, I949, т.I9, вып.3, с.256-268.
5. Боголюбов Н.Н. Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантованным полем. - В кн.: "Избранные труды", т.2, с.499-520. Киев: "Наукова думка", I970, 520 с.
6. Gervais J.L., Jevicki A., Sakita B. - Phys.Rev., 1975, v. D12, No.4, p.1038-1051.
7. Christ N.H., Lee T.D. - Phys.Rev., 1975, v. D12, No.6, p.1606-1627.
8. Tomboulis E. - Phys.Rev., 1975, v. D12, No.6, p.1678-1683.
9. Разумов А.В. - ТМФ, I977, т.30, № I, с.I8-27.
I0. Свешников К.А. - ТМФ, I983, т.55, № 3, с.36I-384.
II. Creutz M. - Phys.Rev., 1975, v. D12, No.10, p.3126-3144.
I2. Faddeev L.D., Korepin V.E. - Phys.Lett., 1976, v. 63B, No.4, p.435-438.
I3. Jevicki A. - Nucl.Phys., 1976, v. B117, No.2, p.365-376.

I4. Verschelde H., Phariseau P. - Z.Phys., 1984, v. C23, No.2, p.181-190.
I5. Matveev V.A. - Nucl.Phys., 1977, v. B121, No.3, p.403-412.
I6. Babelon O. - Nucl.Phys., 1977, v. B131, No.4/5, p.519-524.
I7. Златев С.И., Матвеев В.А., Чечелашвили Г.А. Проблема компенсации нулевых мод в квантовой теории солитона. - Сообщение ОИЯИ, Р2-80-504. Дубна: ОИЯИ, I980, II с.
I8. Faddeev L.D., Popov V.N. - Phys.Lett., 1967, v. 25B, No.1, p.29-30.
I9. Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. - Л: ЛГУ, I976.

<u>Результаты диссертации опубликованы в работах</u>:

I. Златев С.И., Матвеев В.А., Чечелашвили Г.А. Проблема нулевых мод в квантовой теории солитонов. - ТМФ, I982, т.50, № 3, с.323-332.
2. Златев С.И., Матвеев В.А. Компенсация нулевых мод в задаче о квантовых поправках к массе солитона. - Сообщение ОИЯИ, Р2-82-244. Дубна: ОИЯИ, I982, I2 с.
3. Златев С.И., Матвеев В.А. Проблема инфракрасных расходимостей при квантовании солитонов. - ТМФ, I985, т.62, № I, с.45-50; Препринт Р2-84-I86. Дубна: ОИЯИ, I984, 22 с.
4. Златев С.И., Матвеев В.А. Операторные тождества в задаче о сокращении нулевых мод. - Сообщение ОИЯИ, Р2-84-530. Дубна: ОИЯИ, I984, I2 с.
5. Златев С.И., Матвеев В.А., Чечелашвили Г.А. Исследование инфракрасных особенностей в поправках к массе солитона. - Сообщение ОИЯИ, Р2-84-683. Дубна: ОИЯИ, I984, II с.

Рукопись поступила в издательский отдел
2I января I985 года.