ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-84-679

КРИВОНОС
Сергей Олегович

СУПЕРПОЛЕВЫЕ РАСШИРЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Специальность: 01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1984

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
старший научный сотрудник Е.А.Иванов

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
старший научный сотрудник И.Я.Арефьева

доктор физико-математических наук
старший научный сотрудник М.В.Савельев

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Физико-технический институт АН УССР, г.Харьков .

Автореферат разослан "   " ____ 198 г.

Защита диссертации состоится "   " ____ 198 г.
на заседании специализированного совета К 047.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета В.И.Журавлев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

<u>Актуальность проблемы</u>. Начиная с 1971 года, когда были окончательно сформулированы основные этапы метода обратной задачи, число известных вполне интегрируемых нелинейных уравнений постоянно растет. При этом интенсивно изучаются как чисто бозонные уравнения и системы, так и системы с участием фермионов, обладающие простой либо расширенной суперсимметрией.

Среди нелинейных уравнений уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^+ \partial x^-} = m^2 e^{-2u(x)}$$

и его $N=1$ суперсимметричное расширение привлекают в последнее время особое внимание. Этот интерес в значительной мере обусловлен работами Полякова /1/, указавшего на тесную связь этих уравнений с теорией релятивистских бозонной и фермионной струн. Кроме того, как было показано Виттеном /2/, Лезновым и Савельевым /3/, уравнение Лиувилля и его многокомпонентные обобщения (двумерные цепочки Тода) возникают при использовании цилиндрически-симметричной подстановки в самодуальном секторе теории Янга-Миллса и, следовательно, отражают специфические особенности реалистичных четырехмерных теорий.

Все это стимулирует интерес к поиску высших ($N \geqslant 2$) суперсимметричных обобщений уравнения Лиувилля. Можно думать, что такие системы отвечают более сложным моделям суперструн с дополнительными внутренними степенями свободы, а также описывают определенные классы решений теории супергравитации и суперкалибровочных теорий в $d=4$. Однако построение $N \geqslant 2$ суперрасширений уравнения Лиувилля в значительной мере затруднено из-за присутствия в бозонном секторе теории, наряду с полем, удовлетворяющим уравнению Лиувилля, дополнительных физических бозонных полей, требуемых расширенной суперсимметрией. При этом возникает непростой вопрос: какие же уравнения на новые поля должны сопутствовать исходному уравнению при его суперобобщении. Тем самым становится актуальной задача отыскания подходящего метода, который бы позволил при минимуме исходных предпосылок достаточно алгоритмично строить $N \geqslant 2$ суперрасширения уравнения Лиувилля.

<u>Цель работы</u> - развитие метода построения высших ($N \geqslant 2$) суперсимметричных расширений уравнения Лиувилля, получение таких суперрасширений и изучение их свойств.

<u>Научная новизна работы</u>. Предложен новый самосогласованный метод

построения ($N \geq 2$) суперсимметричных расширений уравнения Лиувилля. Среди всевозможных $O(N)$ суперрасширений выявлены наиболее физически интересные $N = 2$ и $N = 4$ случаи. Впервые построены $N = 2$ и $N = 4$ суперрасширения уравнения Лиувилля и детально изучены их группы симметрии. Показано, что в бозонном секторе $N = 4$ уравнения Лиувилля присутствует триплет физических полей, удовлетворяющих уравнениям нелинейной σ – модели с весс-зуминовским действием.

Найдены неизвестные ранее общее решение $N = 1$ уравнения Лиувилля в суперполях и общее решение $N = 2$ уравнения Лиувилля.

Выявлен геометрический смысл условий неприводимости расширенных $N = 2$ и $N = 4$ суперполей как кинематической части связей, выделяющих геодезические гиперповерхности в исходных фактор-пространствах.

Построены преобразования Бэклунда для $N = 2$ и $N = 4$ уравнений Лиувилля и выяснен их геометрический смысл.

Практическая ценность работы. Развитый в диссертации суперполевой метод построения расширенных суперсимметричных обобщений уравнения Лиувилля обеспечивает глубокое понимание групповой структуры этих систем. Предложенный метод, при удачном выборе соответствующих групп инвариантности, может быть применен и к другим вполне интегрируемым системам. Построенный в диссертации $N = 4$ лиувиллевский супермультиплет дает новую реализацию группы симметрии $SU(2)$ – суперструны /4/.

Последовательное квантование $N = 4$ уравнения Лиувилля могло бы привести к новому варианту $SU(2)$-суперструны. Известный в настоящее время вариант такой суперструны /4/ содержит нефизические степени свободы при любой размерности пространства-времени.

Еще одна область применения результатов диссертации – интенсивно обсуждаемая в последнее время σ – модель с весс-зуминовским действием /5/. $N = 4$ уравнение Лиувилля, содержащее в чисто бозонном секторе такую σ – модель, дает ее своеобразную $N = 4$ суперсимметризацию с примечательными свойствами.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 6 работ.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались на семинарах Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, на Международном совещании по теоретико-групповым методам в физике в г.Звенигороде, 1982 г., на УП Международном совещании по нелокальным теориям поля в г.Алуште, 1984 г., представлялись на XXII Международную конференцию по физике высоких энергий в г.Лейпциге, ГДР, 1984 г.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав основного содержания, заключения, двух приложений и списка литературы,

содержащего 73 наименования. Каждая глава снабжена аннотацией. Общий объем диссертации – 109 страниц.

Во введении обсуждается значение вопросов, рассмотренных в диссертации, кратко излагаются содержание работы и полученные результаты.

В первой главе приводятся необходимые математические сведения о методе обратной задачи рассеяния на языке дифференциальных форм (§1) и о методе нелинейных реализаций (§2). В §3 рассмотрены основные трудности, возникающие при обобщении метода нелинейных реализаций на случай бесконечномерных алгебр и супералгебр. При таком обобщении в теории возникает бесконечное число голдстоуновских полей. Адекватный метод действия состоит в наложении на формы Картана дополнительных ковариантных условий, т.н. обратный эффект Хиггса /6/. При этом удается выразить бесконечный набор голдстонионов через несколько существенных полей теории, число которых легко установить из анализа коммутационных соотношений соответствующей алгебры. Здесь также анализируется оставшийся произвол в теории и возможность наложения более сильных связей ковариантной редукции к геодезическим подпространствам исходного группового пространства, при которой на существенные поля возникают динамические уравнения.

Во второй главе используемый в диссертации метод описания уравнения Лиувилля и его суперрасширений объяснен на примере обычного ($N=0$) уравнения Лиувилля.

В §1 кратко изложены основные сведения о конформной группе двумерного пространства-времени, обладающей исключительными особенностями. Нелинейная реализация двумерной конформной группы построена во втором параграфе. Показано, что существует два возможных типа условий ковариантной редукции: к алгебре $s\ell(2,R)$ и к алгебре группы Пуанкаре $\mathcal{P}(1,1)$, приводящих к уравнению Лиувилля и свободному уравнению соответственно. В §3 построена линейная задача для уравнения Лиувилля на алгебре $s\ell(2,R)$. Выявлен смысл спектрального параметра как правого константного поворота фактор-пространства элементом из подгруппы стабильности. Изложен также метод построения общего решения уравнения Лиувилля в данном подходе. Обобщение схемы на случай комплексного уравнения Лиувилля (§4)

$$\partial^2_{+-} u(x) = m^2 e^{-2u(x)} \cos\varphi(x)$$

$$\partial^2_{+-} \varphi(x) = m^2 e^{-2u(x)} \sin\varphi(x)$$

приводит к необходимости расширения исходного двумерного пространства-времени путем его комплексификации. Показано, что условия ковариантной редукции в нелинейной реализации комплексифицированной конформной группы двумерия, действующей в этом расширенном пространстве, приводят к комплексному уравнению Лиувилля в обычном $d=2$ пространстве Минковского из-за появления условий Коши-Римана по дополнительным координатам. Группа симметрии этого уравнения оказывается нетривиальным образом реализованной на координатах обычного пространства-времени и полях $u(x), \varphi(x)$.

<u>Третья глава</u> посвящена изложению основных свойств расширенных суперсимметрий в двумерии.

Среди возможных $O(N)$-суперсимметричных расширений конформной группы двумерия $(\S 1)$ не все соответствуют физически интересным системам. Анализ безмассовых представлений соответствующих плоских супергрупп (§2) показывает, что требование минимальности, т.е. наличия в мультиплетах полей с лоренцевым весом $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$, приводит к трем возможностям $N=1$, $N=2$ и $N=4$ расширенных суперсимметрий, с супералгебрами $\mathbb{K}_{\pm}(1|1)$, $\mathbb{K}_{\pm}(1|2)$, $\mathbb{K}^{A}_{\pm}(1|2)$ соответственно. Нелинейная реализация простейшего варианта с $N=1$ суперконформной группой после ковариантной редукции к супералгебре $osp(1|2)$ естественным образом приводит к $N=1$ суперсимметричному уравнению Лиувилля

$$\nabla_+ \nabla_- u = i m e^{-u},$$

для которого построено представление нулевой кривизны на $osp(1|2)$ и найдено общее решение в неограниченных суперполях:

$$e^{-u} = \frac{\nabla_+\left(\frac{\nabla_+ \alpha}{\sqrt{\partial_+ \alpha}}\right) \nabla_-\left(\frac{\nabla_- \omega}{\sqrt{\partial_- \omega}}\right)}{\left(m^2 \alpha - \omega + m \frac{\nabla_- \omega \nabla_+ \alpha}{\sqrt{\partial_- \omega \partial_+ \alpha}}\right)},$$

где α и ω — редуцированные суперполя

$$\alpha = \alpha(x^+, \theta^+),$$
$$\omega = \omega(x^-, \theta^-).$$

<u>В четвертой главе</u> диссертации построено $N=2$ суперрасширение уравнения Лиувилля и изучены его свойства.

В §1 строится нелинейная реализация соответствующей супергруппы $\mathbb{K}_{\pm}(1|2)$ и получено $N=2$ суперуравнение Лиувилля:

$$\bar{\mathcal{D}}^+ \mathcal{D}^- v = -2 i m e^{-v^+},$$

где $v = u + i\varphi$. В рамках подхода на существенное $N=2$ комплексное суперполе v автоматически, как следствие ковариантной редукции, возникают дополнительные условия грассмановой аналитичности

$$\mathcal{D}^+ v = 0, \quad \bar{\mathcal{D}}^- v = 0,$$

редуцирующие исходное $N=2$ суперполе к $N=1$ суперполям. При этом резко упрощается компонентный состав суперполя v (§2):

$$v = u(\xi^+, \xi^-) + i\varphi(\xi^+, \xi^-) + \bar{\theta}^+ \psi_+(\xi^+, \xi^-) + \theta^- \bar{\psi}_-(\xi^+, \xi^-) + \bar{\theta}^+ \theta^- \Phi(\xi^+, \xi^-),$$
$$\xi^+ = x^+ - i\bar{\theta}^+\theta^+, \quad \xi^- = x^- + i\bar{\theta}^-\theta^-.$$

Явная инвариантность построения относительно $N=2$ суперконформной группы позволяет легко найти трансформационные свойства полей и координат (§3). В §4 построена линейная задача для $N=2$ уравнения Лиувилля на супералгебре $osp(2|2)$. Показано, что в данном случае спектральный параметр - комплексный, в соответствии со структурой группы стабильности $H = SO(1,1) \times SO(2)$. В §5 найдено общее решение $N=2$ уравнения Лиувилля в компонентах.

<u>В пятой главе</u> построено $N=4$ суперрасширение уравнения Лиувилля.

В §1 изучена нелинейная реализация $N=4$ суперконформной группы с алгеброй $\mathbb{K}^{A}_{\pm}(1|2)$ /4/ и получено $N=4$ суперуравнение Лиувилля

$$\mathcal{D}_-^{\alpha} (q\, \mathcal{D}_+^{\gamma}\, q^{-1})_{\gamma}^{\ \beta} = 0$$
$$\mathcal{D}_+^{\alpha} (q^{-1}\, \bar{\mathcal{D}}_{-\gamma}\, q)_{\beta}^{\ \gamma} = -4im\, (\bar{q})_{\beta}^{\ \alpha}.$$

Здесь

$$q_{\alpha}^{\ \beta} \equiv \left(e^{-u - i\varphi\cdot\sigma}\right)_{\alpha}^{\ \beta}; \quad (\bar{q})_{\alpha}^{\ \beta} = -\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\delta}(q)_{\delta}^{\ \gamma}.$$

В результате ковариантной редукции на существенное кватернионное суперполе теории $(q)_{\alpha}^{\ \beta}$ возникают также условия гипермультиплетности

$$\mathcal{D}_-^{(\alpha} q_{\gamma}^{\ \beta)} = 0, \quad \ddot{\bar{\mathcal{D}}}_{+(\alpha} q_{\gamma)}^{\ \beta} = 0.$$

§2 посвящен компонентному анализу $N=4$ уравнения Лиувилля и условий редукции. Показано, что на массовой оболочке содержится 4 + 4 независимых компоненты и 8 + 8 вне ее. В бозонном секторе модели, наряду с дилатоном $u(x)$, удовлетворяющим уравнению Лиувилля, присутствуют три скалярных поля $\varphi^k(x)$, параметризующих однородное пространство $SU_+(2) \times SU_-(2)/SU(2)$. В пределе исключенных фермионных компонент эти поля удовлетворяют уравнениям нелинейной σ-модели с весс-зуминовским членом, широко обсуждающимся в последнее время /5/.

В §3 изучены трансформационные свойства координат и полей модели при действии $N=4$ суперконформной группы.

В §4 построена линейная задача на супералгебре $su(1,1|2)$.

В шестой главе получены преобразования Бэклунда для рассмотренных суперрасширений уравнения Лиувилля.

В §I изложен общий метод построения преобразований Бэклунда в данном подходе в приложении к $N=0$ уравнению Лиувилля.

В §2 построены преобразования Бэклунда для $N=1$, $N=2$, $N=4$ суперрасширений уравнения Лиувилля. Выяснен также смысл появляющегося дополнительного спинорного поля как параметра правого сдвига элемента фактор-пространства.

В заключении отмечены наиболее интересные особенности $N=2$ и $N=4$ суперрасширений уравнения Лиувилля и обсуждаются некоторые еще не решенные проблемы.

В приложения вынесен ряд технических вопросов.

Основные результаты, полученные в диссертации:

I. Разработан новый метод построения интегрируемых уравнений, основанный на нелинейных реализациях бесконечномерных (супер)групп симметрии.

2. С помощью предложенного метода построены, в явно ковариантной суперполевой форме, новые суперсимметричные интегрируемые системы: $N=2$ и $N=4$ суперрасширения уравнения Лиувилля.

3. Найдены бесконечномерные группы инвариантности $N=I$, $N=2$ и $N=4$ суперуравнений Лиувилля.

4. Получено общее решение $N=2$ уравнения Лиувилля в компонентах и суперполях. Найдена суперполевая форма общего решения $N=I$ уравнения Лиувилля.

5. Найдена бесконечномерная группа симметрии комплексного $N=0$ уравнения Лиувилля.

6. Выведены преобразования Бэклунда для $N=2$ и $N=4$ суперрасширений уравнения Лиувилля.

Результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

Иванов Е.А., Кривонос С.О. Нелинейная реализация конформной группы двумерия и уравнение Лиувилля. ТМФ, I984, т.58, №2, стр.200-2I2; Preprint JINR,E2-83-286, Dubna, 1983.

Ivanov E.A., Krivonos C.O. Integrable systems as nonlinear realizations of infinite-dimensional symmetries: the Liouville equations example. (Интегрируемые системы как нелинейные реализации бесконечномерных симметрий: пример уравнения Лиувилля). Lett.Math.Phys, 1984, v.8,p.39-45; препринт ОИЯИ,Р2-83-280, Дубна,I983.

Ivanov E.A., Krivonos S.O., U(1)-supersymmetric extension of the Liouville equation. (U(I) -суперрасширение уравнения Лиувилля). Lett.Math.Phys., 1983, v.7, p.523-531; preprint JINR, E2-83-104, Dubna, 1983.

Иванов Е.А., Кривонос С.О. Суперполевые расширения уравнения Лиувилля.В сб.:Труды УП Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта,I984. Д2-84-366, стр.257-27I, Дубна, I984.

Ivanov E.A., Krivonos S.O. N=4 super-Liouville equation. (N=4 суперсимметричное уравнение Лиувилля). J.Phys. A: Math.Gen., Lett. to the Editor, 1984, v.17, p.L671-L676; препринт ОИЯИ, P2-84-250, Дубна, I984.

Ivanov E.A., Krivonos S.O. N=4 superextension of the Liouville equation with quaternionic structure ($N=4$ суперрасширение уравнения Лиувилля с кватернионной структурой), Preprint JINR, E2-84-290, Dubna, 1984.

Литература

1. Polyakov A.M. Quantum geometry of bosonic strings. Phys.Lett., 1981, v.B103, N 3, p.207-210;
   Polyakov A.M. Quantum geometry of fermionic strings. Phys.Lett., 1981, v. B103, N 3, p.211-213.
2. Witten E. An interpretation of classical Yang-Mills theory. Phys.Lett., 1978, v.77B, N 4,5, p.394-398.
3. Лезнов А.Н., Савельев М.В. Точные цилиндрически-симметричные решения классических уравнений калибровочных теорий для произвольных компактных групп Ли. часть I, I980, ЭЧАЯ, т.II, в.I, стр.40-9I; часть П, I98I, ЭЧАЯ, т.I2, в.I, стр.I25-I6I.
4. Ademollo M., et al. Dual string model with non-Abelian colour and flavour symmetries. Nucl.Phys., 1976, v.114B, N 2,p.297-316.
5. Wess J., Zumino B. Consequences of anomalous Ward identities. Phys.Lett., 1971, v.37B, N 1, p.95-97;
   Witten E. Non-Abelian bosonization in two dimensions. Comm.Math. Phys., 1984, v.92, N 4, p.455-472.
6. Иванов Е.А., Огиевецкий В.И. Обратный эффект Хиггса в нелинейных реализациях. ТМФ, 1975, т.25, № 2, стр.I64-I77.

Рукопись поступила в издательский отдел
I9 октября I984 года