

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

---

Л-476

УДК 530.535

2-84-535

ЛЕОНОВИЧ  
Анатолий Александрович

КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ  
И КУЛОНОВСКАЯ ПРОБЛЕМА  
В ТЕОРИИ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

Специальность: 01.04.02 - теоретическая  
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Дубна 1984

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики  
Объединенного института ядерных исследований.

Научные руководители:  
доктор физико-математических наук  
профессор

Б.М. БАРБАШОВ

кандидат физико-математических наук  
старший научный сотрудник

А.Б. ПЕСТОВ

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук  
профессор

В.Н. ПОНОМАРЕВ

доктор физико-математических наук  
старший научный сотрудник

А.Т. ФИЛИППОВ

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Институт  
физики высоких энергий, г. Серпухов.

Автореферат разослан " " \_\_\_\_\_ 1984 года

Защита диссертации состоится " " \_\_\_\_\_ 1984 года  
на заседании Специализированного совета КО47.01.01  
Лаборатории теоретической физики Объединенного института  
ядерных исследований, г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ

Ученый секретарь Совета  
кандидат физико-математических наук

В.И. ЖУРАВЛЕВ

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Принципы симметрии, инвариантности и законы сохранения играют исключительно важную роль в современной физике, являются базисом всех фундаментальных физических теорий: квантовой электродинамики, общей теории относительности, единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий, квантовой хромодинамики /1/.

Известно, сколь плодотворным оказалось изучение приближенных симметрий в физике элементарных частиц. Обычно в качестве приближенных рассматриваются внутренние симметрии. Однако уравнения свободных полей со спином 0, 1/2 и 1 и широкий класс взаимодействий этих полей инвариантны относительно конформных преобразований координат в пространстве-времени Минковского, если пренебречь массами этих полей /2/.

С конформной инвариантностью тесно связана масштабная инвариантность или автомодельность глубоководных процессов. Она проявляется в том, что асимптотическое поведение этих процессов не зависит от масс участвующих в них частиц. Применение конформной группы и группы Вейля в теоретической физике оказалось чрезвычайно плодотворным.

При построении теории квантованных полей в римановом пространстве-времени соображения, связанные с конформной инвариантностью, также весьма существенны. Конформная инвариантность, играющая важную роль в кинетической теории релятивистского газа Черникова, была возведена им в принцип /3/. В настоящее время на повестку дня ставится вопрос о построении конформно-инвариантной теории тензорных и спинорных полей высших рангов в искривленном пространстве-времени /4/.

В соответствии с принципом конформной инвариантности уравнения движения для частиц с нулевой массой должны быть конформно-инвариантными, а след тензора энергии-импульса должен равняться нулю. Такие физически важные уравнения, как уравнения Максвелла, Янга-Миллса, уравнение Дирака, при  $M = 0$  конформно-инвариантны. Пенроузом было предложено конформно-инвариантное уравнение для скалярного поля в 4-мерном римановом пространстве-времени. В дальнейшем это уравнение изучалось и обобщалось в работах Черникова и сотрудников /5/. Представляются весьма важными и своевременными поиски конформно-

инвариантных уравнений для тензорных и спинорных полей высших рангов.

Для экспериментального изучения поведения частиц с высшими спинами во внешнем поле наибольший интерес представляют экзотические атомы <sup>16-7/</sup>. В экзотическом атоме один из электронов замещен более тяжелой отрицательно заряженной частицей, например,  $M^-$ ,  $\Pi^-$ ,  $K^-$ ,  $\bar{p}$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Xi^-$ ,  $\Omega^-$ . Как известно, экзотические атомы, образованные  $M^-$ -мезонами, антипротонами,  $\Sigma^-$  - гиперонами, наблюдались экспериментально. Кулоновские силы могут удерживать около ядра и  $\Omega^-$ -гипероны, и даже ядра легких элементов, например, антидейтерия.

Экзотический атом имеет много свойств атома водорода. Для бесспиновой частицы энергия определяется из решений уравнения Клейна-Фока, для частицы со спином  $1/2$  используется уравнение Дирака. Возникает вопрос о математической модели водородоподобной системы с орбитальной частицей спина  $1$  и  $3/2$ . Уравнения Прока и Рарити - Швингера не годятся для этой цели в силу известных причин. Таким образом, поиск других формулировок теории частиц со спином  $1$  и  $3/2$  не только обоснован, но и необходим.

Все это вместе взятое определяет актуальность темы диссертации, представляющей собой, с одной стороны, дальнейшее развитие принципа конформной инвариантности в теории поля путем построения новых конформно-инвариантных уравнений для тензорных полей, а с другой - исследование релятивистской кулоновской проблемы для заряженных полей со спином  $1$  и  $3/2$  в рамках уравнения типа Фейнмана - Гелл-Манна.

#### Цель работ:

1. Построение конформно-инвариантной теории тензорных полей в римановом пространстве-времени и исследование дифференциальных тождеств и законов сохранения в теории поля;

2. Точное решение в рамках уравнения типа Фейнмана - Гелл-Манна релятивистской кулоновской проблемы для заряженных полей со спином  $1$  и  $3/2$ .

Научная новизна работ. Установлена связь между симметризацией тензора энергии-импульса и некоммутативностью операции ковариантного дифференцирования. При этом предложен простой и удобный безвариационный способ нахождения симметричного тензора энергии-импульса и обобщенного тензора Эйнштейна для произвольных лагранжианов.

С помощью производной Ли получены в явном виде дифференциальные тождества и уравнения движения для гравитационных лагранжианов с произвольной зависимостью от тензора кривизны.

Предложена конформно-инвариантная теория вектора, бивектора и симметричного тензора второго ранга в римановом пространстве-времени произвольной размерности.

Исследованы дифференциальные уравнения первого порядка на множестве антисимметричных тензорных полей. Показано, что антисимметричные тензорные поля могут быть источником нелинейных тензорных полей типа Янга-Миллса. Доказана теорема о сохранении тензорного тока вероятности. Построена инвариантная схема квантования антисимметричных тензорных полей и получено в явном виде выражение для перестановочной функции.

Исследована релятивистская кулоновская проблема для полей со спином  $1$  и  $3/2$  в рамках уравнений, аналогичных уравнению Фейнмана - Гелл-Манна. Получена точная спектральная формула для уровней энергии.

#### Практическая ценность работ.

1. Предложенный в главе I способ получения симметричного тензора энергии-импульса в теории поля, основанный на некоммутативности операции ковариантного дифференцирования, представляется весьма перспективным как в плане своих приложений, так и обобщений.

Эффективность подхода продемонстрирована на примерах теорий с высшими производными и гравитационных лагранжианов с произвольной зависимостью от тензора кривизны. Кроме того, этот подход применим к спинорам, спин-тензорам и полям Янга - Миллса.

Установленная в главе I связь между симметризацией тензора энергии-импульса и некоммутативностью ковариантного дифференцирования должна иметь, очевидно, нетривиальные следствия ввиду исключительной важности тензора энергии-импульса <sup>18/</sup>.

2. Построенная в главе 2 конформно-инвариантная теория вектора, бивектора и симметричного тензора второго ранга в римановом пространстве-времени произвольной размерности допускает развитие в следующих направлениях.

Возможно построение конформно-инвариантного оператора второго порядка на множестве антисимметричных тензорных полей.

Представляется важным построение конформно-инвариантного уравнения для тензора кручения в связи с тем, что это поле переносит максимальный спин  $2$  и играет важную роль в обобщениях теории Эйнштейна <sup>19/</sup>.

В плане реализации различных конформно-инвариантных формулировок теории спина  $2$  возможно построение конформно-инвариантного урав-



нения для тензора четвертого ранга с алгебраическими свойствами симметрии тензора конформной кривизны Вейля.

Предложенный в главе II подход позволяет строить конформно-инвариантные уравнения первого порядка для спин-тензорных полей. Существует конформно-инвариантный дифференциальный оператор первого порядка на множестве спин-форм, обобщающий оператор Дирака для спинора.

3. В главе III исследовались различные аспекты дифференциальных уравнений первого порядка, определенных на множестве антисимметричных тензорных полей. В последнее время эти уравнения изучаются в связи с их замечательными геометрическими, теоретико-групповыми и топологическими свойствами и возможными физическими применениями.

В плане дальнейшего изучения уравнений следует отметить необходимость исследования конформной инвариантности и связанных с ними тензорных полей типа Янга - Миллса.

4. Полученное точное решение релятивистской кулоновской проблемы для заряженных частиц со спином I и 3/2 представляет интерес в связи с экспериментальными поисками экзотических атомов, интенсивно проводимых в последнее время.

Апробация работ. Результаты диссертации докладывались на семинарах Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, сессиях ОИЯФ АН СССР 1981 и 1983 гг, на 4-ом и 5-ом Рабочих совещаниях "Гравитация и электромагнетизм" (Минск, 1982 и 1983 гг), на Всесоюзной конференции по теории атомов и атомных спектров (Минск, 1983), на VI Советской гравитационной конференции (Москва, 1984 г.).

Публикации. По результатам диссертации опубликовано девять статей.

#### СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, четырех глав основного содержания, приложения, заключения и библиографического списка литературы из 104 названий. Общий объем диссертации - 72 страницы машинописного текста.

Во введении обсуждается значение вопросов, рассмотренных в диссертации, дан обзор литературы. Кратко излагается содержание диссертации и основных полученных в ней результатов.

Глава I. "Дифференциальные тождества и законы сохранения в теории поля и в общей теории относительности" посвящена исследованию лагранжевых теорий с помощью производных Ли.

В § I установлена связь между симметризацией тензора энергии-импульса и некоммутативностью ковариантного дифференцирования. Предложен простой и удобный алгебраический способ нахождения по заданному лагранжиану симметричного тензора энергии-импульса, применимый ко всем полям, в том числе и к спинорному полю.

В § 2 получены дифференциальные тождества, уравнения движения и симметричный тензор энергии-импульса для теорий с высшими производными. Дан краткий обзор применений теорий с высшими производными.

В § 3 выведен обобщенный тензор Эйнштейна для гравитационных лагранжианов с произвольной зависимостью от тензоров Римана. Рассмотрены конформно-инвариантные гравитационные уравнения. Указан путь вывода обобщенного тензора Эйнштейна для лагранжиана, зависящего от любого числа ковариантных производных тензора кривизны. Обсуждается значение гравитационных лагранжианов, более общих, чем эйнштейновский.

В § 4 получены в явном виде дифференциальные тождества в геометриях Римана, Римана - Картана и в пространствах произвольной аффинной связности для лагранжианов, зависящих от тензора кривизны. Рассмотрены топологические инварианты в пространствах любой четной размерности. Кратко обсуждаются теории гравитации с неримановой геометрией.

Глава II. "Конформно-инвариантная теория тензорных полей в римановом пространстве" посвящена построению конформно-инвариантных уравнений.

В § I рассмотрен принцип конформной инвариантности в теории поля. На примере уравнения Пенроуза - Черникова - Тагирова для скалярного поля введены основные понятия и определения.

В § 2 предложено конформно-инвариантное уравнение второго порядка для векторного поля в римановом пространстве произвольной размерности. В случае 4-мерного пространства-времени предложенное уравнение переходит в уравнение Максвелла. Построен оператор конформного момента импульса  $/IO/$ , действующий в пространстве решений этого уравнения. Показано, что тензор энергии-импульса имеет нулевой след, что находится в соответствии с принципом конформной инвариантности.

В § 3 развитый аппарат применяется для построения конформно-инвариантной теории антисимметричного тензора второго ранга. Предложенные конформно-инвариантные уравнения второго порядка для вектора и бивектора являются градиентно инвариантными при размерности пространства-времени  $n = 4$  и  $n = 6$  соответственно.

В § 4 аналогичным образом строится конформно-инвариантное уравнение для симметричного тензора второго ранга, которое при  $n=4$  может служить основой для развития конформно-инвариантной теории спина 2, отличной от конформной гравитации. Построен оператор конформного момента импульса и симметричный тензор энергии-импульса.

Искомое уравнение для  $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$  имеет вид

$$\Delta A_{\mu\nu} = \nabla^\alpha \nabla_\alpha A_{\mu\nu} + c(\nabla_\mu \nabla_\nu A_{\alpha\beta} + \nabla_\nu \nabla_\alpha A_{\beta\mu}) + d g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla^\beta A_{\alpha\beta} + e R A_{\mu\nu} + f g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} + h R_{\alpha\mu\beta\nu} A^{\alpha\beta} = 0,$$

где

$$\bar{A}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - \frac{1}{n} g_{\mu\nu} A, \quad A = g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}, \quad g^{\mu\nu} \bar{A}_{\mu\nu} = 0,$$

$$b=1, \quad c = -\frac{4}{n+2}, \quad d = \frac{8}{(n+2)n}, \quad e = \frac{n-2}{4(n-1)}, \quad f = \frac{2}{n}, \quad h = -2,$$

$R$  - скалярная кривизна,  $R_{\mu\nu}$  - тензор Риччи,  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  - тензор Римана.

Принципиальной особенностью предложенных уравнений является наличие слагаемых с кривизной, обеспечивающих конформную инвариантность.

В главе III "Дифференциальные уравнения первого порядка на множестве антисимметричных тензорных полей" исследуются релятивистские тензорные волновые уравнения, определяемые операторами внешнего дифференцирования и ко-дифференцирования.

В § 1 изучаются дифференциальные уравнения первого порядка для антисимметричных тензорных полей. Введены основные понятия и определения и дан обзор применений антисимметричных тензорных полей.

В § 2 получено точное решение задачи о движении тензорной частицы в поле плоской электромагнитной волны.

В § 3 показано, что поле, подчиняющееся релятивистскому тензорному волновому уравнению, может быть источником нелинейных тензорных полей типа Янга - Миллса. Доказана теорема о сохранении тензорного тока вероятности.

В § 4 решена задача Коши, построена инвариантная схема квантования и получено в явном виде выражение для перестановочной функции.

В главе IV "Аналог уравнения Фейнмана - Гелл-Манна и точное ре-

шение релятивистской кулоновской проблемы для заряженных частиц со спином 1, 3/2" исследуется кулоновская задача для полей со спином 1 и 3/2.

В § 1 в рамках уравнения типа Фейнмана - Гелл-Манна получено точное решение релятивистской кулоновской задачи для заряженной частицы спина 1. Волновой функцией частицы спина 1 служит самодуальный антисимметричный тензор второго ранга. Найденный спектр имеет триплетную структуру  $\epsilon = m \left[ 1 + \frac{d^2}{(n^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{(n^2 + \frac{1}{2})^2 - d^2 + \lambda^2}} \right]^2$ , где  $\lambda$  - корни кубического уравнения  $\lambda^3 - 2\lambda^2 + d^2 - 4\sqrt{(n^2 + \frac{1}{2})} \lambda - 2d^2 = 0$ ,  $n' = 0, 1, 2, \dots$ ,  $d = Ze^2$ .

В § 2 решены задачи о движении тензорной частицы спина 1 в поле плоской электромагнитной волны и в однородном магнитном поле.

В § 3 получено точное решение релятивистской кулоновской проблемы для заряженной частицы спина 3/2. Волновой функцией такой частицы служит симметричный спинор 3-го ранга, реализующий представление группы Лоренца  $(0, 3/2)$  и подчиняющийся уравнению типа Фейнмана - Гелл-Манна. Принципиальным отличием найденного кулоновского спектра от спектров уравнений Дирака и Клейна - Фока является его квадратичная структура. Обсуждается возможность использования полученных результатов для расчета электромагнитных спектров экзотических атомов с  $\Sigma^-$  - гипероном, который представляет собой единственную стабильную относительно сильных взаимодействий частицу спина 3/2.

В приложении установлена простая связь между конформно-и калибровочно-инвариантным уравнением 4-го порядка для симметричного тензора второго ранга в пространстве-времени Минковского (линеаризованная конформная гравитация) и двумя уравнениями второго порядка, каждое из которых обладает одной из указанных симметрий.

Заключение содержит обсуждение результатов, возможные применения и дальнейшее развитие проведенных в диссертации исследований. Обсуждаются некоторые еще не решенные проблемы.

Для защиты выдвигаются следующие основные результаты, полученные в диссертации

I. Установлена глубокая связь между симметризацией тензора энергии-импульса и некоммутативностью ковариантного дифференцирования. Предложен простой способ получения симметричного тензора энергии-импульса, дифференциальных тождеств и законов сохранения в теории поля с помощью производной Ли. Получены в явном виде дифференциальные тождества для произвольных гравитационных лагранжианов в геометриях Римана, Римана - Картана и в пространствах произвольной аффинной связности.

2. Предложены конформно-инвариантные уравнения второго порядка для вектора, бивектора и симметричного тензора второго ранга в римановом пространстве-времени произвольной размерности. Построены операторы конформного момента импульса, действующие в пространстве решений этих уравнений. Показано, что тензор энергии-импульса имеет нулевой след.

3. Показано, что антисимметричные тензорные поля, удовлетворяющие релятивистским волновым уравнениям первого порядка, определяемым операторами внешнего дифференцирования и ко-дифференцирования, могут быть источником нелинейных тензорных полей типа Янга-Миллса. Доказана теорема о сохранении тензорного тока вероятности. Построена инвариантная схема квантования антисимметричных тензорных полей.

4. В рамках аналога уравнения Фейнмана - Гелл-Манна получено точное решение релятивистской кулоновской проблемы для заряженных частиц со спином 1 и 3/2.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих статьях:

1. Барбашов Б.М., Леонович А.А. Тензорное волновое уравнение. Движение в поле плоской электромагнитной волны. Вестник МГУ, сер. Физика-астрономия, 1981, № 5, с. 77-79. Препринт ОИЯИ P2-80-684, Дубна, 1980.
2. Леонович А.А., Пестов А.Б. О полях типа Янга-Миллса в теории тензорного волнового уравнения. ДАН БССР, 1981, т. 25, № 10, с. 892-895. Препринт ОИЯИ P2-80-823, Дубна, 1980.
3. Леонович А.А., Пестов А.Б. Аналог уравнения Фейнмана - Гелл-Манна для заряженной частицы со спином 1. ЯФ, т. 35, вып. 5, 1982, с. 1353-1357. Препринт ОИЯИ P2-81-403, Дубна, 1981.
4. Барбашов Б.М., Леонович А.А., Пестов А.Б. О дифференциальных тождествах и законах сохранения в теории поля. ЯФ, т. 38, вып. 1 (7), 1983, с. 261-263. Препринт ОИЯИ P2-82-151, Дубна, 1982.
5. Барбашов Б.М., Леонович А.А. Дифференциальные тождества и топологические инварианты в геометриях Римана, Римана - Картана и в пространствах произвольной аффинной связности. Сообщение ОИЯИ P5-83-398, Дубна, 1983.
6. Леонович А.А. Решение задачи Коши и перестановочная функция для тензорного волнового уравнения. ТМФ, т. 57, № 2, 1983, с. 265-267.

7. Барбашов Б.М., Леонович А.А. Конформно-инвариантная теория векторного и бивекторного полей. Препринт ОИЯИ P2-83-524, Дубна, 1983.
8. Леонович А.А., Пестов А.Б. Аналог уравнения Фейнмана - Гелл-Манна и точное решение релятивистской кулоновской проблемы для заряженной частицы со спином 3/2. ЯФ, т. 39, вып. 2, 1984, с. 509-511. Препринт ОИЯИ, P2-83-575, Дубна, 1983.
9. Leonovich A.A., Nesterenko V.V. Conformally Invariant Equation for the Symmetric Tensor Field. Communication JINR E2-84-II, Dubna, 1984. (Конформно-инвариантное уравнение для симметричного тензора).

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. - М.: Наука, 1976, с. 523.
2. Пальчик М.Я., Фрадкин Е.С. Введение в конформно-инвариантную теорию квантованных полей. Дубна, 1975, с. 88.
3. Черников Н.А., Шавахина Н.С. Принцип конформной инвариантности. Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума "Новейшие проблемы гравитации", - М.: 1973, с. 40-42.
4. de Wit B. Conformal invariance in gravity and supergravity. Preprint NINHEF-N/81-20. Карраж, 1981.
5. Chernikov N.A., Tagirov E.A. Quantum theory of scalar field in the de Sitter space.- Ann. Inst. H. Poincare, 1968, V. 9A, № 1, p. 109-141.
6. Кириллов-Угрюмов В.Г., Никитин Ю.П., Сергеев Ф.М. Атомы и мезоны. - М.: Атомиздат, 1980, с. 300.
7. Бетти С. Дж. Экзотические атомы. ЭЧАЯ, 1982, т. 13, вып. 1, с. 164.
8. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. Эквивалентность тензоров энергии-импульса Гильберта и Белинфанте. В трудах VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. Протвино, 1983, т. 1, с. 3-44.
9. Popovarev V.N. and Obukhov Ju. The Generalized Einstein - Maxwell Theory of Gravitation.- GRG, 1982, v. 14, No. 4, p. 309-330.
10. Черников Н.А., Шавахина Н.С. Конформный момент импульса. ТМФ, 1974, т. 13, с. 310-317.

Рукопись поступила в издательский отдел  
20 июля 1984 года