

Р-241

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 530.145

2-84-379

РАСИЗАДЕ
Октай Шамиль оглы

ИСТОЧНИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЛЕЙ

Специальность 01.04.02 – теоретическая
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 1984

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики
Объединенного института ядерных исследований

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук
старший научный сотрудник

А.Т. Филиппов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
профессор

В.Г. Маханьков

доктор физико-математических наук
старший научный сотрудник

А.К. Погребков

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Институт
физики высоких энергий, г. Серпухов.

Автореферат разослан " " _____ 1984 года
Защита диссертации состоится " " _____ 1984 года
на заседании Специализированного совета К047.01.01
Лаборатории теоретической физики Объединенного института
ядерных исследований, г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук

В.И. Дуравлев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Еще сравнительно недавно решение нелинейных физических задач сводилось к их линеаризации с последующим учетом нелинейности с помощью теории возмущений. Позже выяснилось, что применение подобной теории возмущений (ТВ) выводит из рассмотрения обширные классы решений, имеющих неаналитическую зависимость от параметра ТВ.

В связи с этим в последние годы разработаны и широко применяются довольно общие методы полного решения нелинейных уравнений, наиболее мощным из которых является метод обратной задачи рассеяния.

Недостатком этих методов является то, что они применимы только к вполне интегрируемым системам, т.е. к системам, для которых число функционально независимых законов сохранения равно числу степеней свободы.

В реальных системах условие полной интегрируемости не выполняется из-за наличия в них диссипации и неоднородностей, т.е. границ, примесей, внутренних дефектов, внешних воздействий, из-за которых часть законов сохранения нарушается. Поэтому использование решений однородных нелинейных задач позволяет описывать лишь узкий класс физических эффектов в реальных системах.

Как показывает точное решение неоднородных нелинейных задач, число решений во многих интересных случаях (например, в случае уравнений Хиггса и синус-Гордона) быстро растет с ростом числа неоднородностей. При этом наблюдаются новые эффекты, например, такие, как бифуркации статических решений, которые не возникают при решении соответствующих однородных задач.

Неоднородные нелинейные задачи возникают при описании многих реальных физических систем. При этом часто одно и то же нелинейное уравнение применяется для описания различных физических явлений. Неоднородности можно учесть путем введения в теорию внешних источников. Конкретной реализацией внешних источников в физических системах являются дефекты или примеси в кристаллах, внешние поля в термодинамических системах, тяжелые частицы в теориях фундаментальных взаимодействий. Ввиду этого исследование неоднородных нелинейных задач, часто встречающихся в физических приложениях, например, скалярных полей со степенным самодействием и полей Янга-Миллса с внешними источниками, является в настоящее время актуальной задачей.

Целью работы является изучение физических эффектов в нелинейных неоднородных системах на примере скалярных полей со степенным самодействием и теории Янга-Миллса с неоднородностями в виде внешних источников.

Научная новизна и практическая ценность. В диссертации обнаружены и исследованы явления, связанные с бифуркациями статических конфигураций нелинейных скалярных полей, имеющие место при наличии в системе внешних источников.

Впервые к подобного рода задачам применен метод теории катастроф. Применение метода теории катастроф позволило получить ряд общих результатов относительно решений и условий возникновения точки бифуркации в пространстве параметров системы, пользуясь только выражением для функционала энергии.

Показано, что следствием бифуркации стабильного статического решения является перестройка равновесного состояния в термодинамической системе и перестройка основного состояния в квантовой теории поля.

В теории классического скалярного поля со степенным самодействием обнаружено новое явление – бифуркация точечных источников при изменении размерности пространства и максимальной степени самодействия.

Построена минимальная классическая теория внешних источников полей Янга-Миллса с изоспином $1/2$ и произведено ее квантование.

Впервые найдено решение классических уравнений Янга-Миллса с грасмановыми источниками.

Разработанные в диссертации методы позволяют использовать аппарат современной теории катастроф для исследования нелинейных физических систем с неоднородностями. Полученные результаты имеют важное значение для описания динамики перестройки равновесного состояния в классической теории и вакуума в квантовой теории поля. Теория точечных источников полей Янга-Миллса с изоспином $1/2$, построенная в диссертации, и найденные в ней решения уравнений Янга-Миллса с грасмановыми источниками могут быть использованы для вычисления энергии межкваркового взаимодействия.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 4 статьи.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на семинарах ЛТФ ОИЯИ, ИФАН Азерб. ССР, на сессиях ОАФ АН СССР, на Рабочем совещании по солитонам (Протвино, 1980 г.).

Объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка литературы из 93 наименований. Каждая глава снабжена аннотацией. В диссертации имеется 9 рисунков. Общий объем диссертации 107 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность исследования явлений, происходящих в неоднородных нелинейных системах, и приводятся основные результаты, полученные в диссертации. Во введении также содержится обзор результатов, полученных в рамках трех основных подходов к теории Янга-Миллса с внешними источниками.

В главе I исследуется уравнение Хиггса с точечными внешними статическими источниками ρ в двумерном пространстве-времени

$$-\partial_t^2 \varphi + \partial_x^2 \varphi - g^2 \left(\varphi^2 - \frac{m^2}{g^2} \right) \varphi = \rho. \quad (I)$$

Задача формулируется в § I, где также приводятся статические решения однородного уравнения Хиггса, необходимые для решения задачи с источниками.

В § 2 решается задача с одним точечным источником $\rho = e\delta(x)$. Найдено три типа статических конфигураций поля, обозначенных $S1, S2$ и $S3$. Показано, что два из них – $S1$ и $S3$ – являются откликными системы, находившейся первоначально в одном из равновесных состояний $\varphi_0 = \pm \frac{m}{g}$, на "включение" точечного источника. Решение $S2$ описывает связанное состояние пары кинк-антикинк, возникающее в присутствии точечного источника. Установлено существование критической точки $v_c^2 = 1/\sqrt{2}$ в пространстве параметра системы $v^2 = m^2/eg$, при переходе которой происходит бифуркация решений $S1$ и $S2$. Далее задача исследуется с помощью метода теории катастроф. Это позволяет, пользуясь лишь выражением для функционала энергии, получить ряд общих результатов относительно свойств решений и условий появления точки бифуркации в пространстве параметра v^2 .

В § 3 находятся решения задачи с двумя точечными источниками $\rho = e[\delta(x-R) + \delta(x+R)]$. Найдены бесконечные серии решений, претерпевающих бифуркации при изменениях параметров v^2 и R . Показано, что большинство решений описывает взаимодействие конфигураций $S1, S2$ и $S3$ при наличии различного числа связанных пар кинк-антикинк. Найдены решения, существующие только при $R < R_c$, где R_c – точка бифуркации. Описано изменение картины решений при изменении параметров v^2 и R .

Решения, найденные в §§ 2,3 исследованы на устойчивость в § 4.

В § 5 изучаются физические следствия наличия бифуркации стабиль-

ного статического решения для классической термодинамической системы. Показано, что величиной, чувствительной к наличию бифуркации, является восприимчивость системы к внешнему полю $h(x) = \chi = \delta\psi/\delta h$. В точке бифуркации величина восприимчивости становится сколь угодно большой. Исследуется причина этого явления. Продемонстрировано, что восприимчивость растет в результате испускания системой пары кинк-антикинк при переходе параметра системы через критическое значение. Это в свою очередь приводит к перестройке равновесного состояния системы.

В § 6 исследуются следствия наличия бифуркации устойчивого классического решения в квантовой теории поля. Показано, что при переходе параметра системы через критическое значение происходит перестройка основного состояния системы, сопровождающаяся излучением пары кинк-антикинк и бозонов - элементарных возбуждений квантованного поля. Далее рассмотрен вопрос о связанном состоянии двух медленно движущихся точечных источников, построенном на устойчивом статическом решении с точкой бифуркации по расстоянию между источниками. Показано, что такое связанное состояние распадается с шириной пропорциональной вероятности нахождения системы в области перестройки его основного состояния.

В главе II исследуется более общая система - многомерное неоднородное уравнение с внешним источником:

$$\Delta_{\vec{r}} \varphi - U[\varphi] = J(\vec{r}) \varphi^\nu, \quad (2)$$

где $\varphi(\vec{r})$ - действительная функция. Относительно самодействия U делается только следующее предположение:

$$U[\varphi] = g^2 \varphi^\nu.$$

Размерность пространства χ и максимальная степень самодействия ν считаются произвольными действительными параметрами, что позволяет рассматривать теории с различными целыми значениями χ и ν в едином подходе, а также проследить за изменением свойств решений уравнения (2) при переходе от одной теории к другой путем простого изменения параметров χ и ν .

В § 1 рассматривается вопрос о существовании точечных источников поля φ . При размерности пространства $\chi > 2$ существование и свойства точечного источника, т.е. его заряд и тип связи с полем определяются наличием и видом соответствующей асимптотики однородного уравнения. Показано, что вблизи точечного источника $\varphi = Q\delta(\vec{r})$, т.е. при $|\vec{r}| \rightarrow 0$, поле φ становится сферически симметричным. Далее установлено, что кроме кулоновских точечных источников

$$Q_L = \begin{cases} -\Omega_{\chi} a (\chi - 2), & \chi > 2 \\ -2\pi a, & \chi = 2 \end{cases}; \quad \mu = 0, \quad (3)$$

где Ω_{χ} - объем единичной χ -мерной сферы, a - вещественная константа, может существовать точечный источник

$$Q_S = -\Omega_{\chi} \left(\frac{2}{\nu - 1}\right)^{\chi/2} \left(\frac{\chi_c - \chi}{g^2}\right)^{\frac{\chi - 2}{2}}, \quad \mu = \mu_s = \frac{(\chi_c - \chi)(\nu - 1)}{2}, \quad (4)$$

где $\chi_c = \frac{2\nu}{\nu - 1}$, имеющий существенно нелинейный характер и называемый далее "нелинейным" источником. Найдена область существования кулоновских и нелинейного источников в пространстве (χ, ν) , определяемая неравенством $\chi < \chi_c$ (или $\nu < \nu_c = \chi/(\chi - 2)$). При $\chi > \chi_c$ ($\nu > \nu_c$) источники (3) и (4) сливаются и при $\chi > \chi_c$ ($\nu > \nu_c$) перестают существовать. Таким образом, обнаружена бифуркация точечных источников в теории самодействующего скалярного поля. Далее в данном параграфе показано, что при достаточно малых взаимных расстояниях кулоновские точечные источники взаимодействуют по закону Кулона, а нелинейные точечные источники - по следующему закону:

$$E_{int} \sim 1/R^2 (\mu_s + 1) / (\nu - 1),$$

где R - расстояние между источниками.

В § 2 рассмотрен вопрос о регуляризации кулоновских точечных источников. В рамках сферически симметричного уравнения (2) с $U = g^2 \varphi^\nu$ доказана возможность регуляризации кулоновского источника распределенным источником. Указывается, что при $\chi > \chi_c$ одним из нелинейных эффектов, препятствующих достижению предела точечного источника при устремлении размера распределенного источника к нулю, является появление при достаточно малом R сингулярности у поля φ .

В связи с отсутствием при $\nu > \nu_c$ точечных источников возникает вопрос: какие источники наименьшей размерности существуют при всех ν при данной размерности пространства? В § 3 указывается, что такими источниками в физически интересном случае трехмерного пространства являются контурные источники $J[C_0] = \oint_{C_0} Q(s) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(s)) ds$, где C_0 - гладкий контур. Для контура в виде окружности доказано существование контурного источника при всех ν .

В § 4 рассмотрены свойства распределенных источников в случае сферически-симметричного уравнения (2). Для конкретности выбран явный вид самодействия: $U = g^2 \varphi^\nu$. Источник выбран в виде

$J = \theta(1 - \frac{1}{2}) \frac{Q}{R} \nu$. Продемонстрировано наличие бифуркаций новых решений при изменении размера источника R без явного решения уравнения. Это сделано с помощью графического метода, подробное изложение которого содержится в § I Приложения. В случае $\mu = 1$ имеется бесконечная серия решений, последовательно ответвляющихся от тривиального решения $\psi \equiv 0$ при увеличении параметра

$$z_0 = \sqrt{\frac{Q}{R}} \cdot R^{(\mu-1)/(\nu-1)}$$

Вычислены значения параметра z_0 , при которых происходят бифуркации. Предложен также метод нахождения приближенного вида ответвляющихся решений вблизи точек бифуркаций. Метод основан на факте наличия нулевой моды в спектре флуктуаций поля ψ в точке бифуркации.

В случае $\mu > 1$ показано, что новые решения появляются в точках бифуркаций попарно при увеличении параметра

$$z_0 = \left[\left(\frac{Q}{R} \right)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{g^{2(\mu-1)}} \right]^{\frac{1}{2(\nu-1)}} \cdot R^{(\mu-1)/(\nu-1)}$$

и не являются ответвлениями от тривиального решения.

Полученные результаты проиллюстрированы в конце параграфа на примере точно решаемого одномерного случая. Обнаружено, что в этом случае для каждого решения источник имеет некоторый равновесный размер, при котором энергия системы достигает минимума. Это свойство является спецификой одномерного случая.

В главе III изучается более сложная нелинейная система, содержащая неоднородности — теория Янга-Миллса с внешними точечными источниками.

В § I указаны основные трудности, возникающие при попытке аппроксимировать тяжелые кварки в хромодинамике статическими числовыми источниками, а именно:

1. Нарушение калибровочной симметрии при введении статического источника.

2. Проблема получения алгебры зарядов после квантования теории.

3. Проблема получения квантовых чисел кварков.

Первая проблема, очевидно, связана с тем, что статический источник не обладает степенями свободы и, следовательно, не является переменной и при калибровочных преобразованиях не преобразуется. Это свойство статического источника является также причиной возникновения второй проблемы, так как заряды источников после квантования остаются c -числами. Третья проблема аналогична проблеме классического описания спина $1/2$ числовыми переменными. Показывается, что

введение в теорию хромодинамического источника — статического в обычном пространстве и динамического в цветовом пространстве, решает первые две проблемы. Проблема получения квантовых чисел кварков при этом остается нерешенной.

Для разрешения проблемы получения квантовых чисел кварков в $SU(2)$ калибровочной теории, в § 2 строится минимальная классическая теория внешних источников полей Янга-Миллса с изоспином $1/2$. Все переменные теории являются элементами алгебры Грассмана, образующие которой $\psi_a^i; i=1, \dots, k; a=1, 2, 3$ описывают внутренние степени свободы точечных источников (здесь k — число точечных источников, а индекс a соответствует присоединенному представлению группы $SU(2)$).

Уравнения теории имеют вид

$$\partial_\mu F_a^{\mu\nu} + g \epsilon_{abc} A_\mu^b F_c^{\mu\nu} = g \sum_{i=1}^k Q_a^i \delta(\vec{x} - \vec{x}^i), \quad (5)$$

где $Q_a^i = \frac{i}{2} \epsilon_{abc} \psi_b^i \psi_c^i$ — изоспин источника, а $F_a^{\mu\nu}$ и A_a^μ являются четными элементами алгебры Грассмана. Далее теория обобщается на случай медленно движущихся источников.

В § 3 решены уравнения (5) в калибровке $A_{0a} = 0$. Показано, что кроме неабелева кулоновского решения не существует других стационарных решений, имеющих сингулярности только в точках $\vec{x} = \vec{x}^i$ и не приводящих к бесконечности при подстановке в гамильтониан.

В § 4 производится квантование теории. Сначала квантуются только степени свободы источников каноническим способом и с помощью континуального интеграла. В последнем случае использована форма континуального интеграла, предложенная Березиным и Мариновым. Показано, что для одного точечного источника квантовая динамика отсутствует. В случае двух точечных источников решены уравнения Гайзенберга для квантованных изоспинов источников. Найденное решение описывает прецессию изоспинов источников вокруг полного изоспина. С помощью метода континуального интегрирования вычислен оператор эволюции системы. Оба способа квантования приводят к наличию двух статических состояний системы двух источников: изосинглета с энергией $E_0 = -3g^2/4\pi R$ и изотриплета с энергией $E_1 = g^2/4\pi R$.

Далее с помощью континуального интеграла производится квантование как источника, так и полей Янга-Миллса. Для оператора эволюции, после снятия интегрирования по грассмановым переменным, получено следующее выражение:

$$\hat{G}_{d_1 \beta_1, \dots, d_k \beta_k} = \sum_{\tau_{\dots}} \left\langle \prod_{i=1}^k \left[T \exp \left(\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A_a^0(\vec{x}^i, t) dt \cdot \tau_{\alpha}^i \right) \right]_{d_i \beta_i} \right\rangle_{YM},$$

где Z - нормировочная константа, T означает упорядочение по времени, $\langle \dots \rangle_{YM}$ - усреднение по полям Янга-Миллса, τ'_a ; $a = 1, 2, 3$ - матрицы Паули. Теория обобщается также на случай медленно движущихся источников. В случае двух медленно движущихся точечных источников, траектории которых в пространстве Минковского имеют общее начало и общий конец, выведено контурное представление Вильсона для энергии основного состояния системы кварк-антикварк:

$$e^{-iE_0 T} = \langle P \exp \left(\frac{i}{2} g \oint A_a^\mu dx_\mu \tau_a \right) \rangle_{YM}.$$

В Заключении перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

В Приложении приведены методы получения некоторых результатов, содержащихся в диссертации.

В диссертации получены следующие основные результаты

1. Найден и исследован на устойчивость статические конфигурации двумерного поля Хиггса с одним и двумя точечными источниками. В случае одного точечного источника обнаружено три типа статических конфигураций, два из которых имеют точку бифуркации по параметру системы $\gamma^2 = m^2/g^2$. Показано, что одна из конфигураций неустойчива и распадается на пару кинк-антикинк.

В случае двух точечных источников обнаружено бесконечное число решений, описывающих взаимодействия вышеуказанных конфигураций для одного точечного источника с различным числом пар кинк-антикинк, находящихся в связанном состоянии. Обнаружены также решения, не поддающиеся такой интерпретации и существующие только при $R < R_c$, где

R_c - точка бифуркации по параметру R - расстоянию между источниками. Показано, что большинство решений обладает бифуркациями по параметрам γ^2 и R и описан вид энергетической поверхности решений в пространстве (E, γ^2, R) .

2. С помощью метода теории катастроф исследована задача с одним точечным источником поля Хиггса. Это позволило получить ряд новых результатов относительно свойств решений, а также условий возникновения точки бифуркации в пространстве параметра системы.

3. Показано, что наличие устойчивого классического статического решения, обладающего бифуркацией, приводит в квантовой теории поля к перестройке основного состояния при переходе параметра через критическое значение.

4. Обнаружена бифуркация точечных источников нелинейных скалярных полей со степенным самодействием при изменении максимальной степени самодействия ν и размерности пространства δ . В сферически симметричном случае доказана возможность регуляризации точечного кулоновского источника распределенным источником. Показано, что контурные источники в трехмерном физическом пространстве существуют при всех ν .

5. Обнаружены бифуркации статических конфигураций нелинейного скалярного поля с нелинейностью $U = g^2 \psi^4$ в пространстве произвольной размерности $\delta \geq 1$, при изменении размера распределенного источника, создающего эти конфигурации.

6. Построена минимальная классическая теория точечных источников полей Янга-Миллса с изоспином 1/2. Произведено квантование теории двумя способами - каноническим и с помощью континуального интеграла. При квантовании с помощью континуального интеграла, в частности, в случае двух точечных источников выведено контурное представление Вильсона для энергии основного состояния системы кварк-антикварк.

7. Решены классические уравнения теории Янга-Миллса с грасмановыми источниками. В калибровке $A_{0a} = 0$ показано, что при ограничении стационарными решениями, имеющими сингулярности только в точках расположения точечных источников и не приводящих при подстановке в гамильтониан к бесконечности, единственным решением классических уравнений является неабелево кулоновское решение.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Расизаде О.Ш. Взаимодействие точечных источников с полем Хиггса в одномерном пространстве. ТМФ, т. 48, № 2, 1981, с. 197.
2. Расизаде О.Ш. Бифуркации и "катастрофы" в поле Хиггса с внешними источниками. ТМФ, т. 49, № 1, 1981, с. 36.
3. Расизаде О.Ш. Бифуркации точечных источников и контурные источники нелинейных полей. ТМФ, т. 52, № 3, 1982, с. 393.
4. Расизаде О.Ш. Точечные источники полей Янга-Миллса. ЯФ, т. 38, вып. 6, 1983, с. 1586.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 мая 1984 года.