ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2 - 8314

ЛЕБЕДЕНКО Виктор Михайлович

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ГРУПП И ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Специальность 01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

Дубна 1974

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук В.Г.Кадышевский.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук Е.П.Жидков,
кандидат физико-математических наук М.Б.Менский.

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Математический институт Академии наук СССР им. В.Н.Стеклова.

Автореферат разослан " " 1974 года.
Защита диссертации состоится " " 1974 года на заседании Ученого совета Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета

Р.А.АСАНОВ

2 - 8314

ЛЕБЕДЕНКО Виктор Михайлович

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ГРУПП И ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Специальность 01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

(Диссертация написана на русском языке)

За последние годы в теоретической физике все шире используются алгебраические методы, в особенности теоретико-групповые.

Настоящую диссертацию можно разделить на две части. Одна из них посвящена чисто теоретико-групповым исследованиям, а другая - приложению теории представлений групп к квантовой теории поля.

Первая часть состоит из трех глав, написанных на основе работ автора /11,15,16,17/. Она посвящена системам образующих абелевых групп, или более точно, одному из направлений исследований тесных связей, которые существуют между строением абелевых групп и внутренними свойствами их систем образующих. Начало этому направлению положил В.Длаб в работах 1958-1961гг. /4-6/

Используя понятия неприводимой системы образующих и введенные им понятия сильно приводимой, наследственно приводимой и наследственно сильно приводимой системы образующих, Длаб разделил все системы образующих абелевых групп на следующие шесть типов:

(I) - неприводимая система образующих; /1/

(II) - приводимая, но не сильно приводимая и не наследственно приводимая система образующих;

(III) - сильно приводимая, но не наследственно приводимая система образующих;

(IV) - наследственно приводимая система образующих, но не сильно приводимая;

(V) - наследственно и сильно приводимая система образующих, но не наследственно сильно приводимая;

(VI) - наследственно сильно приводимая система образующих.

Поясним эти понятия.

Пусть $\mathfrak{D}$ - система образующих некоторой группы G.

$\mathfrak{D}$ - неприводима, если соотношение

$$g \in \{ \mathfrak{D} \setminus g \} \qquad /2/$$

не выполняется ни для одного элемента $g \in \mathfrak{D}$. В противном случае $\mathfrak{D}$ - приводима.

$\mathfrak{D}$ - сильно приводима, если соотношение /2/ выполняется для любого элемента $g \in \mathfrak{D}$.

$\mathfrak{D}$ - наследственно приводима, если приводима всякая подсистема $\mathfrak{D}' \subseteq \mathfrak{D}$, порождающая $G = \{ \mathfrak{D} \}$.

$\mathfrak{D}$ - наследственно сильно приводима, если сильно приводима всякая подсистема $\mathfrak{D}' \subseteq \mathfrak{D}$, порождающая $G = \{ \mathfrak{D} \}$.

Длаб показал, что существуют абелевы группы, обладающие всеми шестью типами систем образующих. Им установлено, какими вообще комбинациями типов /1/ могут обладась абелевы группы /см. [5] /. Это следующие комбинации:

(I),

(I) (II),

(I) (II) (III),

(I) (II) (III) (IV) (V),

(I) (II) (III) (IV) (V) (VI),

(IV) (V),

(IV) (V) (VI),

(VI)

В соответствии с этим абелевы группы можно разделить на восемь непересекающихся классов, если поставить

в соответствие каждой такой комбинации типов систем образующих все абелевы группы, в которых реализуется только она:

$\mathfrak{D}(100000)$ – (I),

$\mathfrak{D}(110000)$ – (I) (II),

$\mathfrak{D}(111000)$ – (I) (II) (III),

$\mathfrak{D}(111110)$ – (I) (II) (III) (IV) (V),

$\mathfrak{D}(111111)$ – (I) (II) (III) (IV) (V) (VI),

$\mathfrak{D}(000110)$ – (IV) (V),

$\mathfrak{D}(000111)$ – (IV) (V) (VI),

$\mathfrak{D}(000001)$ – (VI).

Проблема В.Длаба состоит в нахождении критериев, которым должны удовлетворять абелевы группы, принадлежащие к тем или иным из указанных классов.

Описание классов $\mathfrak{D}(100000)$, $\mathfrak{D}(110000)$, $\mathfrak{D}(000001)$ дано Длабом в работах [4,5]. Оказалось, что класс $\mathfrak{D}(100000)$ состоит из одной нулевой группы, а $\mathfrak{D}(110000)$ содержит только циклическую группу второго порядка - $C(2)$. Класс $\mathfrak{D}(000001)$ состоит из всех ненулевых полных абелевых групп. В [6] Длабом изучены примарные группы класса $\mathfrak{D}(111000)$. Им показано, что примарная абелева группа G ($|G| > 2$) принадлежит к $\mathfrak{D}(111000)$ тогда и только тогда, когда она ограничена *.

На этом результаты В.Длаба в указанном направлении исчерпываются. Оно получило дальнейшее развитие в работах автора [11,15,16,17].

---

* Здесь и ниже будем называть периодическую абелеву группу ограниченной, если порядки ее элементов ограничены в совокупности. В противном случае группа будет называться неограниченной.

Глава I, написанная на основе работы [11], посвящена группам класса $\mathfrak{D}(111000)$. Нами показано, что если абелева группа $G \in \mathfrak{D}(111000)$ ($|G| > 2$), то она имеет вид:

$$G = T + F_n \ , \qquad /3/$$

где T - ограниченная периодическая группа, F_n - свободная абелева группа ранга $n < \infty$ или равна О.

С другой стороны, показано, что всякая группа G, имеющая вид

$$G = T_p + A \ , \ |G| > 2,$$

где T_p - ограниченная примарная группа, а A - группа с конечным числом образующих, принадлежит к $\mathfrak{D}(111000)$.

Хотя группы вида /3/ устроены весьма просто, вопрос о том, каковы все группы класса $\mathfrak{D}(111000)$, остается пока открытым. Возможно, что он совпадает со всеми группами вида /3/. Нами установлено, по крайней мере, что эти группы не обладают системами образующих типа (VI).

Глава II написана на основе работ автора [15,16]. Здесь находятся некоторые достаточные условия, при которых абелева группа обладает или не обладает наследственно сильно приводимой системой образующих /тип (VI) /. Это позволило доказать теоремы вложения для классов $\mathfrak{D}(111110)$, $\mathfrak{D}(111111)$, $\mathfrak{D}(000111)$, характеризующие их широту. Из теорем следует, что для любой абелевой группы G в каждом из указанных классов существует группа, содержащая G в качестве прямого слагаемого. Полученные результаты могут рассматриваться и как достаточные условия принадлежности абелевых групп к классам $\mathfrak{D}(111110)$, $\mathfrak{D}(111111)$, $\mathfrak{D}(000111)$. Далее нами описаны все счетные периодические группы классов $\mathfrak{D}(000110)$, $\mathfrak{D}(000111)$. Найдены также некоторые виды счетных непериодических групп класса $\mathfrak{D}(000110)$. Показано, что каждая абелева группа с конечным числом образующих может быть вложена в некоторую счетную группу класса $\mathfrak{D}(000110)$. Аналогичные утверждения доказаны и для классов $\mathfrak{D}(111000)$, $\mathfrak{D}(111110)$, $\mathfrak{D}(111111)$, $\mathfrak{D}(000111)$.

Глава III написана на основе нашей работы [17]. В ней излагается полное решение проблемы Длаба для примарных и неограниченных периодических групп.

Приведем результаты, полученные нами для примарных групп. Поскольку примарные группы классов $\mathfrak{D}(100000)$, $\mathfrak{D}(110000)$, $\mathfrak{D}(111000)$, $\mathfrak{D}(000001)$ описаны Длабом, нам остается рассмотреть примарные группы классов $\mathfrak{D}(111110)$, $\mathfrak{D}(111111)$, $\mathfrak{D}(000110)$, $\mathfrak{D}(000111)$.

Класс $\mathfrak{D}(111110)$. p-примарная группа G принадлежит к $\mathfrak{D}(111110)$ тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$G = G_1 + G_2 \ ,$$

где G_1 - ограничена, G_2 - неограничена и $r_p(G_1) > r_p(G_2)$, $r_p(G_1) \geq \aleph_0$.

Класс $\mathfrak{D}(111111)$. Примарные группы этого класса характеризуются равенствами

$$r(G/B) = |G| = |B|$$

/ B -базисная подгруппа G /.

Класс $\mathfrak{D}(000110)$. Этому классу принадлежат все счетные примарные группы вида

$$G = G_1 + D \ ,$$

где G_1 - конечна, D - полная группа, $0 < r_p(D) < r_p(G_1)$, и только они.

Класс $\mathfrak{D}(000111)$. Примарные группы бесконечного ранга этого класса характеризуются соотношением

$$0 < |B| < |G/B| = |G|$$

/ B -базисная подгруппа/.

Среди групп конечного ранга классу $\mathfrak{D}(000111)$ принадлежат группы вида $G = G_1 + D$, где $G_1 \neq 0$ - конечная, а D - полная группа, $r_p(D) \geq r_p(G_1)$, и только они.

Для периодических групп получены следующие результаты:

Класс $\mathfrak{D}(111000)$. Если периодическая группа принадлежит к $\mathfrak{D}(111000)$, то она ограничена.

Вопрос о том, каковы все периодические группы класса $\mathfrak{D}(111000)$, остается пока открытым. Если есть ограниченные группы с наследственно приводимыми системами образующих, то они принадлежат к $\mathfrak{D}(111110)$. Все периодические группы вида

$$T_p + A,$$

где T_p - ограниченная примарная группа, а A - конечная группа, заведомо принадлежат к $\mathfrak{D}(111000)$.

Класс $\mathfrak{D}(111110)$. Неограниченная периодическая группа принадлежит к $\mathfrak{D}(111110)$ тогда и только тогда, когда она имеет вид:

$$G = G_1 + G_2,$$

где G_1 - ограничена, G_2 - неограничена, $r(G_1) \geq \aleph_0$, $r(G_1) > r(G_2)$.

Класс $\mathfrak{D}(111111)$. Он состоит из всех периодических групп G, не представимых в виде

$$G = G_1 + G_2,$$

где G_1 - ограничена, $r(G_1) \geq \aleph_0$, $r(G_1) > r(G_2)$, и удовлетворяющих соотношению: $|B| = |G|$ / B - некоторая базисная подгруппа G /.

Класс $\mathfrak{D}(000110)$. Периодические группы этого класса имеют вид

$$G = G_1 + D,$$

где G_1 - конечна, D - полная группа, $0 < r(D) < m(G_1)$*.

Класс $\mathfrak{D}(000111)$. Периодические группы бесконечного ранга этого класса характеризуются соотношением

$$|B| < |G / B| = |G|,$$

* Через $m(G_1)$ мы обозначаем максимум рангов примарных компонент конечной группы G_1.

где B - сумма базисных подгрупп всех примарных компонент группы G.

Периодические группы конечного ранга класса $\mathfrak{D}(000111)$ имеют вид:

$$G = G_1 + D,$$

где $G_1 \neq 0$ - конечна, а D - полная группа и

$$r(D) \geq m(G_1).$$

Отсюда видно, что для неограниченных периодических групп нами получена полная /в смысле Длаба/ классификация.

Вторая часть диссертации состоит из двух глав /IV и V / и написана на основе работ автора /13,14/.

Она посвящена группе обобщенных /орисферических/ сдвигов пятимерного гиперболоида, играющей большую роль в работе В.Г.Кадышевского /7/. В /7/ изложен новый подход в квантовой теории поля, использующий оригинальное понятие относительного импульса. В основе работы лежит гипотеза о том, что относительные импульсы принадлежат пространству де Ситтера. Группа движений этого пространства совпадает с группой движений однополостного пятимерного гиперболоида. Указанная выше группа обобщенных сдвигов пятимерного гиперболоида в орисферических координатах $(\omega, \vec{X})$ может быть представлена как группа преобразований вида

$$\omega' = \omega + a,$$

$$\vec{X}' = e^{-a}\vec{X} + \vec{\sigma}.$$

Заметим, что в работе /3/ рассматривается аналогичная задача, только размерность пространства там на единицу меньше. Легко показать, что указанная группа изоморфна четырехпараметрической группе Ли /которую мы будем в дальнейшем обозначать посредством K /, состоящей из действительных векторов $(x_0, \vec{X}) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ $(x_i \in (-\infty, +\infty))$. Операция в K задается так:

$$(x_0, \vec{X})(y_0, \vec{Y}) = (x_0 + y_0, e^{-y_0}\vec{X} + \vec{Y}).$$

Для дальнейшего развития указанного подхода в квантовой теории поля важное значение имеет фурье-анализ на группе К. В частности, необходимо знание всех, с точностью до эквивалентности, унитарных неприводимых представлений этой группы, а также соответствующих им следов.

Глава IV написана на основе нашей работы [13] и посвящена нахождению этих представлений. Очевидно, что К некомпактна в обычной топологии евклидова пространства E_4. Нами устанавливается, что группа К принадлежит к классу так называемых экспоненциальных групп. Используя метод, разработанный Л.Пуканским для этого класса групп [19], мы находим все, с точностью до эквивалентности представления, группы К. Оказалось, что все они, за исключением одномерных, бесконечномерны. Каждое такое представление задается вектором $c=(0,\vec{C})$, где $\vec{C}=(c_1,c_2,c_3)$, т.е. тремя параметрами.

В пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ эти представления имеют вид:

$$U_c(g)f(y)=e^{ie^{y+x_0}(\vec{C},\vec{X})}f(y+x_0),$$

где $g=(x_0,\vec{X})\in K$, $f(y)\in L_2(-\infty,\infty)$, $(\vec{C},\vec{X})$ - обычное скалярное произведение векторов $\vec{C}$ и $\vec{X}$. Каждое неприводимое унитарное представление группы К эквивалентно одному из этой серии. Серию этих представлений можно сузить, считая $\|\vec{C}\|_{E_3}=\|c\|_{E_4}=1$, поскольку нами установлено, что представления U_c и $U_{c'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $c'=kc$, $k>0$.

В главе V, написанной на основе нашей работы [14], получены формулы следов для указанных выше представлений.

Для любой функции $\phi\in C_0^\infty(L)$ / L - алгебра Ли группы К / оператор $U_\phi^c=\int\phi(g)U_c(g)dg$ /здесь ввиду экспоненциальности группы К, можно отождествить функцию на К с функцией на L / имеет конечный след, определяемый формулой

$$\operatorname{sp}U_\phi^c=\frac{1}{8}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\left(\int_L\phi(x)e^{2\pi i(sa+tc,x)}\frac{x_0^3}{\operatorname{sh}^3(\frac{x_0}{2})}dx\right)t\,ds\,dt$$

/интеграл в смысле Лебега/, где $x=(x_0,X)\in L$, $a=(1,0,0,0)$, $c=(0,c_1,c_2,c_3)$, $c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$.

Литература

1. *А.Г.Курош. Теория групп. "Наука", Москва, 1967.*
2. *L.Fuchs. Abelian groups. Budapest, 1958.*
3. *В.Р.Гарсеванишвили, В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков. Представление для релятивистской амплитуды рассеяния при высоких энергиях. ТМФ, т. 7, № 2, 203 /1971/.*
4. *В.Длаб. Заметка к теории полных абелевых групп. Чехословацкий математический журнал, 8/33/, 1958, 54-61.*
5. *В.Длаб. Некоторые соотношения между системами образующих абелевых групп. Чехословацкий математический журнал, 9/84/, 1959, 161-169.*
6. *V.Dlab. On characterization of primary abelian groups of bounded order. Journal London Math.Soc., 36 (1961), 139-144.*
7. *В.Г.Кадышевский. Квантовая теория с неевклидовым пространством относительных импульсов. Препринт ОИЯИ, Р2-5717, Дубна, 1971.*
8. *А.А.Кириллов. Унитарные представления нильпотентных групп Ли. УМН, т. XVII, вып. 4, 106 /1962/.*
9. *А.А.Кириллов. Элементы теории представлений. Москва, "Наука", 1972.*
10. *S.Khabbaz. Abelian Torsion groups having a minimal system of generators. Trans.Amer.Math.Soc., vol. 98 No. 3, 1961.*
11. *В.М.Лебеденко. Абелевы группы со свойством (Р). Сибирский математический журнал, т. XI, № 6, 1970. ВИНИТИ, 1971, № 1499-70 Деп.*
12. *В.М.Лебеденко. Элементы теории групп Ли и теории их представлений. Препринт ОИЯИ, Р2-5740, Дубна, 1971.*
13. *В.М.Лебеденко. Описание неприводимых унитарных представлений некомпактной группы обобщенных сдвигов пятимерного гиперболоида. Препринт ОИЯИ, Р2-6033, Дубна, 1971.*
14. *В.М.Лебеденко. Следы представлений группы обобщенных сдвигов пятимерного гиперболоида. Препринт ОИЯИ, Р2-7002, Дубна, 1973.*
15. *В.М.Лебеденко. Абелевы группы с неприводимыми системами образующих. Депонированная публикация ОИЯИ, Б1-5-7346, Дубна, 1973.*
16. *В.М.Лебеденко. О некоторых связях между типами*

систем образующих абелевых групп и их прямыми слагаемыми. Сообщение ОИЯИ, Р5-7344, Дубна, 1973.

17. *В.М.Лебеденко. О системах образующих периодических абелевых групп. Препринт ОИЯИ, Р5-7817, Дубна, 1974.*

18. *А.С.Понтрягин. Непрерывные группы. Москва, ГИТТЛ, 1954 г.*

19. *L.Pukanszky. On the Unitary Representations of Exponential Groups. Journal of Functional Analysis, 2, 73-113 (1968).*

20. *А.Ю.Сойфер. Абелевы группы, обладающие неприводимыми системами образующих. Сибирский математический журнал, т. XII , №3, 1971.*

21. *А.Ю.Сойфер. Критерии существования неприводимых систем образующих у абелевых групп. Сибирский математический журнал, т. XV , №1, 1974.*

22. *П.Халмош. Теория меры. Москва, ИЛ, 1953.*

Рукопись поступила в издательский отдел
8 сентября 1974 года.