ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-83-230

ПАШАЕВ
Октай Камал оглы

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИКА КВАЗИСПИНОВЫХ СИСТЕМ

Специальность: 01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1983

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор В.Г.Маханьков

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
профессор В.К.Федянин
доктор физико-математических наук А.М.Переломов

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Ленинградский государственный университет им. А.А.Жданова.

Автореферат разослан "___" ______________ 1983 г.

Защита диссертации состоится "___" ______________ 1983 г. на заседании Специализированного совета КО 47.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета В.И.Журавлев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Бурное развитие идей и методов исследования нелинейных явлений и их проникновение во все разделы современной физики приводит к пониманию универсальности нелинейного подхода. Среди нелинейных дифференциальных уравнений в отдельную ветвь математической физики выделилась теория интегрируемых и близких к ним уравнений. Специфические особенности таких систем находят свое выражение, в частности, в существовании решений в виде солитонов или уединенных волн. Эти, существенно нелинейные образования, принципиально отличаясь от линейных мод, и поэтому не вкладывающиеся в теорию возмущений, имеют столь же фундаментальное значение, как и последние. В интегрируемых системах этот факт непосредственно следует из того, что вклады разных нелинейных мод в гамильтониан полностью разделяются. В то же время эти уравнения представляют собой достаточно хорошее приближение к реальной ситуации, при учете разумных физических ограничений.

Экспериментальное исследование магнитных кристаллов и органических соединений показывает, что многие из них обладают слоистой или многоцепочечной структурой. Теоретическое описание таких систем основано на обобщенной спиновой модели Гейзенберга с внутренними степенями свободы. При этом, в наиболее трудно моделируемой низкотемпературной области, динамическое поведение системы определяется наличием различного типа нелинейных структур. Возможность нахождения, описания и учета этих структур представляет собой важнейшую проблему в теории конденсированного состояния.

Аналогичная ситуация имеет место и в квантовой теории поля. Современные единые теории поля в основе своей существенно нелинейны и обладают недостаточно богатым набором фундаментальных полей для описания в линейном приближении спектра элементарных частиц. Поэтому успехи современных теорий типа супергравитации определяются в значительной степени запасом присущих им нелинейных мод типа монополей, солитонов, инстантонов и т.д.

Цель работы – исследование ряда квазиодномерных моделей из теории конденсированного состояния на языке нелинейных эволюционных уравнений, а также некоторых теоретико-полевых моделей на предмет существования специфических нелинейных структур.

Научная новизна работы. Выведен и исследован ряд моделей в теории квазиодномерных магнитных систем. Получен новый тип нелинейных уравнений с некомпактной группой внутренней симметрии.

Показано, что они могут быть проинтегрированы методом обратной задачи рассеяния. Найдена связь между обобщенными уравнениями Ландау-Лифшица и Шредингера на симметрическом пространстве.

Проанализирована динамика и найдены новые решения $U(p,q)$ нелинейного уравнения Шредингера и показано, что появление параметра порядка (физического конденсата) в такой системе связано с бесконечномерностью унитарных представлений изогруппы.

Найдены солитоноподобные решения классических уравнений скалярного сектора $N = 4$ супергравитации и конформно-инвариантных моделей взаимодействующих скалярного и спинорного полей.

Практическая ценность работы. Разработанные в диссертации методы могут быть использованы при анализе магнитных структур в физике конденсированного состояния. Полученные результаты имеют важное прикладное значение для описания низкотемпературной динамики квазиодномерных кристаллических и органических соединений. Найденные в диссертации интегрируемые уравнения с некомпактной изогруппой для своего исследования могут потребовать значительного развития метода обратной задачи. Изученные решения полевых уравнений можно использовать для описания эффектов спонтанного нарушения конформной симметрии, оценки высоких порядков теории возмущений, генерации новых решений в классической теории супергравитации.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано I2 работ.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на семинарах ЛТФ и ЛВТА ОИЯИ, ИТФ (Киев), на Международном совещании по нелинейным эволюционным уравнениям и динамическим системам (Хания, Греция, I980 г.), на Всесоюзных совещаниях по квантовой теории солитонов (Ленинград, I980, I982 гг.), на Всесоюзной школе по нелинейным волнам (Горький, I98I г.), на Международной конференции "Солитоны-82" (Эдинбург, I982 г.) и на Международном семинаре по теоретико-групповым методам в физике (Звенигород, I982 г.).

Объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, содержащего I27 наименований. Каждая глава снабжена аннотацией. Общий объем диссертации II5 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается значение вопросов, рассмотренных в диссертации, кратко излагается содержание работы и полученные результаты.

В главе I изучен ряд моделей, описываемых "цветовым" обобщением спиновой модели Гейзенберга:

$$H_S = -\frac{1}{2}\sum_{ij}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(J_{ij}^{\alpha\beta} S_i^{+\alpha} S_j^{-\beta} + R_{ij}^{\alpha\beta} S_i^{z\alpha} S_j^{z\beta}\right). \tag{I}$$

В § I для многокомпонентной магнитной цепочки с двумя наборами цветовых степеней свободы в низкотемпературной области и непрерывном пределе получена редукция – матричное квантовое нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с $U(r,s)\otimes U(p,q)$ изогруппой

$$H = \mathrm{Tr}\int dx\left[\overline{\Psi}_x \Psi_x - \varkappa(\overline{\Psi}\Psi)^2\right], \tag{2}$$

$$\left[\Psi^{\gamma\delta}(x), \overline{\Psi}^{\beta\alpha}(y)\right] = \delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta}\delta(x-y),$$

где оператор $\overline{\Psi} = \Gamma_0^{(n)}\overset{*}{\Psi}\Gamma_0^{(m)}, \Gamma_0^{(n)} = \mathrm{diag}(I_p, -I_q)$, ($p+q=n$).
В § 2 рассмотрен многокомпонентный спиновый гамильтониан с учетом магнон-фононного взаимодействия: $H_S + H_L$. Показано, что использование известной процедуры Давыдова-Федянина получения нелинейных уравнений для шредингеровской амплитуды в длинноволновом приближении приводит к системе связанных нелинейных уравнений для амплитуд $\Psi^{\alpha}(\xi,t)$ ($\alpha = 1,\dots,n$) и колебаний решетки $X(\xi,t)$, обобщающих известные уравнения Захарова для ленгмюровских и ионно-звуковых волн в плазме. Рассмотрены две интегрируемые редукции:

I. Квазистационарный предел, когда скорость распространения $v \ll I$, при одинаковой интенсивности взаимодействия подрешеток приводит к векторному $U(p,q)$ НУШ.

2. "Ультрарелятивистский" предел ($v \sim I$), для распространения в одном направлении приводит к векторной модификации системы Яджимы-Ойкавы:

$$\begin{aligned} &\eta_t + \eta_\xi + (\overline{\Psi}\Psi)_\xi = 0, \\ &i\Psi_t + \tfrac{1}{2}\Psi_{\xi\xi} - \eta\Psi = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $(\overline{\Psi}\Psi) = \sum_{\alpha=1}^{p}|\Psi^{\alpha}|^2 - \sum_{\alpha=p+1}^{p+q}|\Psi^{\alpha}|^2, \eta(\xi,t) \equiv X_\xi$. В § 3 изучается редукция многокомпонентной спиновой цепочки (I): $H_S + H_L$, приводящая после обобщенного преобразования Йордана-Вигнера к "многоцветной" модели Хаббарда с кулоновским отталкиванием электронов в одном и в соседних узлах. В длинноволновом, квазистационарном приближении для шредингеровских амплитуд спинов вверх и вниз $\Psi_{\pm}^{\sigma} = \varphi^{\sigma} \pm \varphi^{-\sigma}$ получены уравнения $U(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ НУШ для антиферромагнитного основного состояния и $U(n,0)$ НУШ для ферромагнитного.

Учету влияния фононного ангармонизма и нелинейности обменных интегралов посвящен § 4. Показано, что при учете фононного ангармонизма

$$U = \frac{U_{II}}{2}\sum_j (x_{j+1}-x_j-a)^2 + \frac{U_{III}}{3!}\sum_j (x_{j+1}-x_j-a)^3 \tag{4}$$

при сделанных выше предположениях возникает система связанных уравнений Буссинеска и НУШ, обобщающая систему Маханькова

$$\eta_{tt} = \frac{c}{m}\eta_{\xi\xi} + \frac{D}{m}(\eta^2)_{\xi\xi} + \frac{E}{m}\eta_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{g}{m}(|\psi|^2)_{\xi\xi} \tag{5}$$

$$i\psi_t = -A\psi_{\xi\xi} - \tilde{\mu}\psi + g\eta\psi - \lambda|\psi|^2\psi .$$

Для нее найдены и проанализированы два типа солитонных решений. При учете нелинейности обменного интеграла

$$\mathcal{J}_{j\,j+\sigma} \approx \mathcal{J}_0 - \mathcal{J}_1|x_{j+\sigma}-x_j| + \mathcal{J}_2|x_{j+\sigma}-x_j|^2 \tag{6}$$

в длинноволновом, квазистационарном приближении получено нелинейное уравнение с насыщающей нелинейностью:

$$i\psi_t = -A\psi_{\xi\xi} - \tilde{\mu}\psi - c\,\frac{|\psi|^2\psi}{1+|\psi|^2} . \tag{7}$$

Многомерный аналог последнего обладает богатым спектром частицеподобных решений. Это позволяет надеяться на возможность описания зародышей новой фазы в двух и трехмерных системах.

<u>Во II главе</u> устанавливается калибровочное соответствие между некоторыми классическими интегрируемыми моделями магнетика Гейзенберга и НУШ, на которых калибровочная группа реализуется нелинейным и линейным образом, соответственно.

В § I сформулировано НУШ, ассоциированное с симметрическим пространством, и его матричная реализация на $gl(N,C)$:

$$-i\Gamma_0\Psi_t + \Psi_{xx} + 2\Psi^3 = 0 , \tag{8}$$

где $\Psi(x)$ - элемент касательного пространства в точке x. Установлена гамильтоновость (8) и найдена соответствующая линейная задача.

В § 2 изучены различные типы калибровочных преобразований, связанных с уравнением (8):

I) преобразование изогруппы как глобальное калибровочное преобразование, сохраняющее метрику касательного пространства;

2) преобразование Галилея как локальное калибровочное преобразование из максимальной абелевой подгруппы $(U(1))^m \otimes (U(1))^n \subset GL(m+n,C)$;

3) Бэклунд-преобразование как дробно-линейное преобразование в нелинейной реализации;

4) локальное калибровочное преобразование, приводящее НУШ для элемента касательного пространства к уравнению Ландау-Лифшица из однородного пространства $S \in G/H$.

Найдены специфические особенности, отличающие случаи компактных и некомпактных групп G. Требование унитарности для некомпактной калибровочной группы приводит к нетривиальным граничным условиям на потенциалы, что нарушает галилеевскую инвариантность и приводит к появлению щели в непрерывном спектре. Произвол в выборе H для некомпактных групп G значительно расширяет возможные редукции. Установлен геометрический смысл $S_{ij}(x)$ как метрического тензора искривленного пространства, в касательном пространстве каждой точки которого определен $\Psi(x)$.

В § 3 установлено калибровочное соответствие между анизотропным уравнением Ландау-Лифшица :

$$2iS_t = [S,S_{xx}] + \frac{\Delta}{2}[S,\sigma_3]\{\sigma_3,S\}, \tag{9}$$

его изотропным вариантом:

$$2iS_t = [S,S_{xx}] \tag{I0}$$

и НУШ. Показано, что в зависимости от знака Δ группа симметрии для уравнений (9) и (I0) в общем случае различна. Найдены следующие соотношения:

а) $S \in SU(2)$, $\Delta > 0$ соответствует $U(1,0)$ НУШ с притяжением;

б) $S \in SU(1,1)$, $\Delta < 0$ соответствует $U(0,1)$ НУШ с отталкиванием;

в) $S \in SU(2)$, $\Delta < 0$ соответствует неэрмитова редукция $SL(2,C)$ НУШ;

г) $S \in SU(2)$, $\Delta < 0$, $\frac{\partial}{\partial x}S^z = 0$ соответствует $U(0,1)$ НУШ.

<u>В главе Ш</u> изучаются свойства $U(p,q)$ НУШ. В §§ I,2 приводятся основные результаты исследования методом обратной задачи в случае тривиальных граничных условий. На основе вычисленных скобок Пуассона для элементов матрицы перехода

$$\{S_{kl}(\lambda), S_{ps}(\mu)\} = \frac{n}{(n+1)(\lambda-\mu)}\lim_{x\to\infty}\Big[S_{pl}(\lambda)S_{ks}(\mu)e^{-i(\lambda-\mu)(\Sigma_{pp}-\Sigma_{kk})x} - S_{pl}(\mu)S_{ks}(\lambda)e^{-i(\lambda-\mu)(\Sigma_{ss}-\Sigma_{ll})x}\Big], \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n}I_n \end{pmatrix} \tag{II}$$

проанализированы каноническая структура и законы сохранения. Получено односолитонное решение и показана его устойчивость.

Далее в § 3 показано, что для некомпактных групп более приемлемы нетривиальные граничные условия. Найдено и проанализировано 4 типа солитонных решений для $U(1,1)$ НУШ. Квазиклассическое квантование этих решений, рассмотренное в § 4, приводит к интерпретации их на языке "капель" и "пузырей" как связанных состояний частиц и дырок. Показана принципиальная возможность точного решения $U(1,1)$ системы квантовым методом спектрального преобразования, в том смысле, что найдена R -матрица и перестановочные соотношения для элементов матрицы перехода.

В главе IУ рассмотрены некоторые модели теории поля и их классические решения. Показано, что к ним также применимы некоторые из методов, изложенных выше (интегрируемая редукция, бесконечномерность унитарных представлений и нетривиальные граничные условия, изогрупповое преобразование и генерация новых решений и т.д.). В § I изучается скалярный сектор $N = 4$ расширенной супергравитации. Показано, что лагранжиан скалярного и спинорного полей ϕ и B может быть представлен в виде четырехмерной нелинейной σ -модели с некомпактной группой $O(2,1) \sim SU(1,1)$. Кроме аксиально-симметричной редукции, приводящей к уравнению Эрнста, найдено, что если на комплексное поле $\mathcal{E} = exp(-2\kappa\phi) - 2i\kappa B$ наложить условие, обобщающее условие аксиальной симметрии

$$\bar{\eta}^3_{\mu\nu}(\partial_\mu \operatorname{Im}\mathcal{E})(\partial_\nu \operatorname{Re}\mathcal{E}) = 0 , \qquad (12)$$

где $\bar{\eta}^a_{\mu\nu}$ – тензор Хофта, то уравнения движения

$$(\operatorname{Re}\mathcal{E})\partial^2_\mu\mathcal{E} = (\partial_\mu\mathcal{E})^2 , \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

являются интегрируемыми и выводятся из уравнений самодуальности для $SU(2)$ полей Янга-Миллса в R -калибровке Янга. Показано, что использование глобального суперповорота позволяет генерировать решения для остальных полей.

В § 2 изучаются конформно-инвариантные модели взаимодействующих скалярного и спинорного полей в пространстве произвольной размерности D:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{\lambda}{N}\phi^N + i\psi^+\gamma^\mu\partial_\mu\psi + g\psi^+\psi\phi^\ell ,$$

$N = \frac{2D}{D-2}$, $\ell = \frac{2}{D-2}$. Найдены необходимые условия существования инстантонов. С помощью стереографической проекции уравнений движения на поверхность сферы S_{D+1} получены инстантонные решения, инвариантные относительно максимальной компактной подгруппы $O(D+1)$ конформной группы $O(D+1,1)$. Улучшенный тензор энергии-импульса на полученном

решении исчезает ввиду одинакового, но противоположного по знаку вклада от фермионов и бозонов. Показано, что действие на найденных решениях оказывается ниже границы Соболева, насыщающейся чисто скалярными инстантонами. На языке функций Грина получено приближение, дающее вклад в функциональный интеграл, аналогичный инстантонному.

В заключении кратко перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

Основные результаты, полученные в диссертации:

I. Исследован ряд квазиодномерных моделей теории конденсированного состояния, описываемых обобщенной многокомпонентной спиновой моделью Гейзенберга. Найдены соответствующие нелинейные уравнения и их интегрируемые редукции, в непрерывном пределе описывающие низкотемпературную динамику системы:

а) $U(p,q)$ НУШ в квазистационарном пределе, когда $v \ll 1$;

б) векторная модификация системы Яджимы-Ойкавы в "ультрарелятивистском" пределе, когда $v \sim 1$ при однонаправленном движении.

2. Найдена редукция системы, приводящая к обобщенной модели Хаббарда и описываемая в квазистационарном, длинноволновом приближении $U(\frac{n}{2},\frac{n}{2})$ НУШ и $U(n,0)$ НУШ для антиферромагнитного и ферромагнитного основных состояний, соответственно.

3. Исследовано влияние фононного ангармонизма и нелинейности обменных интегралов на нелинейную динамику системы.

4. Установлено калибровочное соответствие между НУШ и изотропным уравнением Ландау-Лифшица на симметрическом пространстве, а также между уравнением Ландау-Лифшица с одноосной анизотропией с изотропным уравнением и с НУШ притягивающегося и отталкивающегося типов.

5. Изучен новый интегрируемый тип НУШ с некомпактной изогруппой $U(p,q)$ и найдены его новые солитонные решения.

6. Найдена интегрируемая редукция уравнений скалярного сектора $N = 4$ расширенной супергравитации и инстантонные решения в конформно-инвариантных моделях взаимодействующих скалярного и спинорного полей.

Результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. V.Ja.Fainberg and O.K.Pashaev. On the fermion contribution to instantons (О фермионном вкладе в инстантоны). Phys.Lett., vol.77B, No.2, 1978, p.208.

2. О.К.Пашаев. Класоические решения и "скрытая" симметрия бозе-ферми-системы. Препринт ОИЯИ, Р2-80-16, Дубна, 1980.

3. V.G.Makhankov, N.V.Makhaldiani and O.K.Pashaev. On the integrability and isotopic structure of the one-dimensional Hubbard model in the long wave approximation (Об интегрируемости и изотопической структуре одномерной модели Хаббарда в длинноволновом приближении). Phys.Lett., vol.81A, No.2,3, 1981, p.161.
4. V.G.Makhankov, O.K.Pashaev. On properties of the nonlinear Schrodinger equation with $U(p,q)$ internal symmetry (О свойствах нелинейного уравнения Шредингера с $U(p,q)$ внутренней симметрией). Preprint JINR, E2-81-70, Dubna, 1981.
5. V.G.Makhankov, O.K.Pashaev. Nonlinear Schrödinger equation with $U(p,q)$ isogroup. Part I. General Analysis(Нелинейное уравнение Шредингера с $U(p,q)$ изогруппой. Часть I. Общий анализ). Preprint JINR, E2-81-264, Dubna, 1981.
6. V.G.Makhankov, O.K.Pashaev. Nonlinear Schrodinger Equation with $U(p,q)$ isotopical group. II. The $U(1,1)$ System (Нелинейное уравнение Шредингера с $U(p,q)$ изогруппой. Часть II. Система $U(1,1)$). Preprint JINR, E2-81-540, Dubna, 1981.
7. V.G.Makhankov and O.K.Pashaev. A new integrable model of quantum field theory in the state space with indefinite metric (Новая интегрируемая модель квантовой теории поля в пространстве состояний с индефинитной метрикой). Phys.Lett., vol.89A, 1982, p.218.
8. В.Г.Маханьков, О.К.Пашаев. Нелинейное уравнение Шредингера с некомпактной изогруппой. ТМФ, т.53, № I, I982, с.55.
9. V.G.Makhankov, O.K.Pashaev. Solitons in N = 4 extended Supergravity (Солитоны в N = 4 расширенной супергравитации). Preprint JINR, E2-82-506, Dubna, 1982.
10. A.Kundu, V.Makhankov, O.Pashaev. On gauge equivalence of Landau-Lifshitz and nonlinear Schrodinger equations (О калибровочной эквивалентности уравнения Ландау-Лифшица и нелинейного уравнения Шредингера). Preprint JINR, E17-82-601, Dubna, 1982.
11. A.Kundu, V.Makhankov, O.Pashaev. On nonlinear effects in magnetic chains (О нелинейных эффектах в магнитных цепочках). Preprint JINR, E17-82-602, Dubna, 1982.
12. A.Kundu, V.G.Makhankov, O.K.Pashaev. Integrable reductions of manycomponent magnetic systems in (1,1) dimensions (Интегрируемые редукции в многокомпонентных магнитных системах в (I,I) пространстве-времени). Preprint JINR, E17-82-677, Dubna, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 апреля I983 года.